1

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

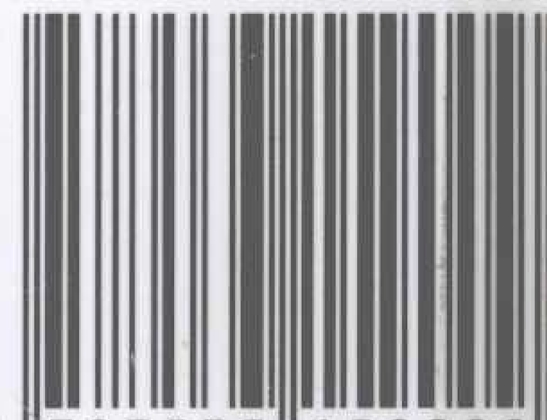
第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾
封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐
经典Б.П.吉米多维奇数学习题集系列


ISBN 978-7-5331-5900-9
定价：19.00元

1

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 1/费定晖，周学圣编演. —4 版. —济南:山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5900-9

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120147 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 1

出版者：山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发行者：山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098071
印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址:潍坊市潍州路753号
邮编:261031　电话:(0536)2116806

开本:787 mm × 1092mm　1/16
印张:14
版次:2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5900-9
定价：19.00 元

第四版前言 DISIBANQIANYAN

本书自1979年出版发行以来，历经30多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书4462题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南

目录 MULU

第一章　分析引论

§1. 实　数

1° **数学归纳法**　为了证明某定理对任意的正整数 n 为真，只需证明下面两点即可：(1)这定理对 $n=1$ 为真，(2)设这定理对任何的一个正整数 n 为真，则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2° **分割**　若分有理数为 A 和 B 两类，使其满足下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(**下类**)的任一数小于属于 B 类(**上类**)的任何数，则这样的一个分类法称为**分割**.(i)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ii)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° **绝对值**(或模)　若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值(模)：

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° **上确界和下确界**　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1)每一个 $x\in X$** 满足不等式 $x\geqslant m$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使 $x'<m+\varepsilon$，则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式 $x\leqslant M$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x''\in X$，使 $x''>M-\varepsilon$，则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说 $\inf\{x\}=-\infty$；

若集合 X 上方无界，则认为 $\sup\{x\}=+\infty$.

5° **绝对误差和相对误差**　设 a $(a\neq 0)$是被测量的精确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为被测量的绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半，则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立：

【1】　$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证　当 $n=1$ 时，等式成立.

设对于 $n=k$ (正整数)时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是，由数学归纳法知，对于任何正整数 n，有 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

【2】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

【3】 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

【4】 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证：

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数，由此推出牛顿二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，由于 $[a+b]^{[1]}=a+b$ 及 $\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b$，所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$$

$$=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\}$$
$$=\{(a-kh)+b\} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+\{a+(b-kh)\} C_k^k a^{[0]} b^{[k]}$$
$$=C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]} b^{[k]}+C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1) a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k) a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}$$
$$=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}$$
$$=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

故由$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$中，令 $h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$.

【6】 证明伯努利不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于-1的数.

证 当 $n=1$ 时，此式取等号.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于-1，所以，$1+x_i>0$. 因而，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以，

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】 证明：若 $x>-1$，则不等式$(1+x)^n\geqslant 1+nx$ $(n>1)$为真，且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

证 只要在6题的伯努利不等式中，设 $x_i=x$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从6题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

【8】 证明不等式：$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>1)$.

提示 注意不等式$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2$ $(k=1,2,\cdots)$.

证 当 $n=2$ 时，因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有
$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何正整数 n,有 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【9】 证明不等式:$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad (n>1)$.

证 当 $n=2$ 时,因为 $2!\cdot 4!=48$,及 $[(2+1)!]^2=36$,所以 $2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即
$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有
$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! &> [(k+1)!]^k(2k+2)! = [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\ &> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立. 于是,由数学归纳法原理,本题证毕.

【10】 证明不等式:$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证 当 $n=1$ 时,因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

则对于 $n=k+1$ 时,由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$,即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,而上述不等式由于
$$4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是,最后得
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立. 于是,由数学归纳法,本题证毕.

【11】 设 c 为正整数,而不为整数的平方,且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含所有满足 $b^2 > c$ 的正有理数 b,而 A 类包含所有其余的有理数. 求证:在 A 类中无最大数,而在 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$. 若 $a\leqslant 0$,则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若 $a^2=c$,设 $a=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互素的正整数,则 $\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互素的,故必 $q=1$,从而 $c=p^2$,此与假定矛盾,故必 $a^2<c$. 下面我们证明,存在正整数 n,使
$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于:$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < c$, $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < c-a^2$,若 n 满足不等式 $\frac{2a+1}{n} < c-a^2$,则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$，而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来建立：A 类包含所有满足 $a^3<2$ 的有理数 a；B 类包含所有其余的有理数. 证明：在 A 类中无最大数，而在 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$，即 $a^3<2$. 下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$. 若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立. 从而 $a+\frac{1}{n}\in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 下证不可能有 $b^3=2$. 事实上，若 $b^3=2$，设 $b=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互素的正整数，则 $\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r 为正整数. 由于 p 与 q 是互素的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾. 由此可知必有 $b^3>2$. 仿前面的证明，可取正整数 n，使 $\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\frac{1}{n}\in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

【13】 作出适当的分割，然后证明等式：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；　　(2) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (1)作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入 B 类. 又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B'：一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类，一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类. 我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式：

$$a+a'<c<b+b'\quad(\text{对任何 } a\in A, b\in B, a'\in A', b'\in B')$$

的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此，如果我们能证明恒有 $(a+a')^2<18$（当 $a+a'>0$ 时），$(b+b')^2>18$，则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$. 于是得知 $\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$，则 a 与 a' 中至少有一个为正，从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$，

$$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18;$$

同样，因 $b^2>2$，$b'^2>8$，$b>0$，$b'>0$，故 $b^2b'^2>16$，$bb'>4$，

$$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18.$$

于是证毕.

(2)作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B 如(1)中所示，再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 A_1/B_1：一切有理数 $a_1\leqslant 0$ 以及满足 $a_1^2<3$ 的正有理数 a_1 归入 A_1 类，一切满足 $b_1^2>3$ 的正有理数 b_1 归入 B_1 类，根据实数乘法的定义，满足

$$aa_1<c_1<bb_1\quad(\text{对任何 } a\in A, a>0, a_1\in A_1, a_1>0, b\in B, b_1\in B_1)$$

的（正）实数 c_1 存在唯一，它就是 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 但由于当 $a\in A$，$a>0$，$a_1\in A_1$，$a_1>0$ 时 $(aa_1)^2<6$，而当 $b\in B$，$b_1\in B_1$ 时，$(bb_1)^2>6$，故恒有 $aa_1<\sqrt{6}<bb_1$. 由此可知 $\sqrt{6}=c_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 证毕.

【14】 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1，使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次，作分割 A/B，其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a：

如果有 $\frac{p}{q}$（p、q 互素）属于 A_1，则有 $a^q<2^p$；而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

【15】 求证：任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性，只证本题的后半部分，分两种情形：

(1)A 中有最大数 $\bar{a}$，此时，设 $a\in A$，则有 $a\leqslant\bar{a}$，说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a}\in A$，故对 A 的任何上界 M，均有 $\bar{a}\leqslant M$，故 $\bar{a}$ 为 A 的上确界.

(2)A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/B_1：取集 A 的一切上界归入 B_1 类，而其余的数归入 A_1 类. 这样，A 中一切数全部落在 A_1 内，A_1 及 A 均非空，且 A_1 中的数小于 B_1 中的数，这确实是一个实数分割，易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数，即 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

【16】 证明：一切有理真分数 $\frac{m}{n}$（式中 m 及 n 为正整数，且 $0<m<n$）的集合无最小及最大的元素. 并求这个集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分数 $\frac{m}{n}$（式中正整数 m,n 满足 $0<m<n$）所成的集合，对任何 $\frac{m}{n}\in E$，显然 $\frac{m+1}{n+1}\in E$ 且 $\frac{m+1}{n+1}>\frac{m}{n}$，又 $\frac{m^2}{n^2}\in E$，且 $\frac{m^2}{n^2}<\frac{m}{n}$；故 E 中既无最大数，也无最小数. 显然

$$\sup E=1,\quad \inf E=0.$$

【17】 有理数 r 满足不等式 $r^2<2$. 求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2<2$ 的有理数 r 所成的集合. 我们知道，分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$，这里 A 表由一切非正有理数以及满足 $r^2<2$ 的正有理数 r 所成的类，B 表其余有理数构成的类，并且已证 A 中无最大数，于是

$$\sup E=\sup A=\sqrt{2}.$$

同样，分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$，这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2<2$ 的负有理数 r 构成的类，A' 表其余有理数构成的类，并且 B' 中无最小数. 于是，显然有

$$\inf E=\inf B'=-\sqrt{2}.$$

【18】 设 $\{-x\}$ 为数的集合，这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1)$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$；　(2)$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1)设 $\inf\{-x\}=m'$，则有：

(ⅰ)当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\geqslant m'$；　(ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有 $-x'\in\{-x\}$，使 $-x'<m'+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x\in\{x\}$ 时，$x\leqslant -m'$；　(ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'>-m'-\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $-m'=\sup\{x\}$，即 $m'=-\sup\{x\}$，所以，$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

(2)设 $\sup\{-x\}=M'$，则有：

(ⅴ)当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\leqslant M'$；　(ⅵ)对于任何的正数 ε，存在有 $-x'\in\{-x\}$，使 $-x'>M'-\varepsilon$.

由(ⅴ)及(ⅵ)推得：

(ⅶ)当 $x\in\{x\}$ 时，$x\geqslant -M'$；　(ⅷ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'<-M'+\varepsilon$.

由(ⅶ)及(ⅷ)知数 $-M'=\inf\{x\}$，即 $M'=-\inf\{x\}$，所以，$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

【19】 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$. 证明等式：

(1)$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$；　(2)$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，则有：

(ⅰ)当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$ 时，$x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$；

(ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有数 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使 $x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2}$，　$y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x+y\in\{x+y\}$ 时（其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$），$x+y\geqslant m_1+m_2$；

(ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$（其中 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$），使 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

(2)同法可证 $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

【20】 设$\{xy\}$为所有 xy 乘积的集合,其中 $x\in\{x\}$及 $y\in\{y\}$,且 $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$. 证明等式:

(1)$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$; (2)$\sup\{x\}\sup\{y\}=\sup\{xy\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$, $\inf\{y\}=m_2$, 由于恒有 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 故必 $m_1\geqslant 0$, $m_2\geqslant 0$. 于是,

(ⅰ)当 $x\in\{x\}, y\in\{y\}$时,$x\geqslant m_1\geqslant 0, y\geqslant m_2\geqslant 0$;

(ⅱ)对任何的正数 ε,存在有数 $x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$,使 $0\leqslant x'<m_1+\varepsilon$, $0\leqslant y'<m_2+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得:

(ⅲ)当 $xy\in\{xy\}$,其中 $x\in\{x\}, y\in\{y\}, xy\geqslant m_1m_2$;

(ⅳ)对于任何的正数 ε,存在有 $x'y'\in\{xy\}$(其中 $x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$),使

$$0\leqslant x'y'<(m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+\varepsilon',$$

其中 $\varepsilon'=(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1m_2=\inf\{xy\}$,即 $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$.

(2)同法可证 $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

【21】 求证不等式:

(1)$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$; (2)$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

证 (1)由
$$|x-y|=|x+(-y)|\geqslant|x|-|-y|=|x|-|y|,$$
及
$$|x-y|=|y-x|\geqslant|y|-|x|=-(|x|-|y|),$$
即得
$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|.$$
也可如下证明:由 $|xy|\geqslant xy$ 知 $x^2-2xy+y^2\geqslant x^2-2|xy|+y^2$,则 $(x-y)^2\geqslant(|x|-|y|)^2$,开方即得
$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|.$$

(2)$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-|x_1+\cdots+x_n|$,

而
$$|x_1+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2+\cdots+x_n|\leqslant\cdots\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$
所以,$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

解不等式:

【22】 $|x+1|<0.01$.

解 由$|x+1|<0.01$ 推得$-0.01<x+1<0.01$,所以,$-1.01<x<-0.99$.

【23】 $|x-2|\geqslant 10$.

解 由$|x-2|\geqslant 10$ 推得 $x-2\geqslant 10$ 或 $x-2\leqslant -10$,所以,$x\geqslant 12$ 或 $x\leqslant -8$.

【24】 $|x|>|x+1|$.

解 两边平方,即得 $x^2>(x+1)^2$或 $2x+1<0$,于是,有 $x<-\dfrac{1}{2}$.

【25】 $|2x-1|<|x-1|$.

解 两边平方,即得$(2x-1)^2<(x-1)^2$或 $3x^2-2x<0$,解之,得 $0<x<\dfrac{2}{3}$.

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

提示 令 $x-2=t$,易得$-8\leqslant t\leqslant 4$,从而有$|x|\leqslant 6$.

解 令 $x-2=t$,则得$|t+4|+|t|\leqslant 12$ 或 $|t+4|\leqslant 12-|t|$.

两边平方,即有 $t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$, 或 $3|t|\leqslant 16-t$.

将上式两端再平方,化简整理得 $t^2+4t-32\leqslant 0$,于是,有$-8\leqslant t\leqslant 4$. 从而得$-8\leqslant x-2\leqslant 4$,即
$$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【27】 $|x+2|-|x|>1$.

解　$1+|x|<|x+2|$，将此式两端平方，化简得 $2|x|<4x+3$. 再平方之，化简得 $4x^2+8x+3>0$. 于是，有

$$x>-\frac{1}{2} \quad 或 \quad x<-\frac{3}{2}.$$

后者不适合，所以，$x>-\frac{1}{2}$.

【28】　$\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

提示　两端平方，化简即得 $|x|<\frac{1}{2}$.

解　两端平方，化简得 $x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|$，即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2} \quad 或 \quad x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

前者不可能，所以，$x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$，即 $x^2<\frac{1}{4}$，解之得 $|x|<\frac{1}{2}$.

【29】　$|x(1-x)|<0.05$.

解　由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$得 $x^2-x+\frac{1}{20}>0$ 或 $x^2-x-\frac{1}{20}<0$，解之得

$$\begin{cases} \frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\frac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即
$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【30】　证明恒等式：$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

证　$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x|x|=x^2$.

【31】　当测量长度 10cm 时，绝对误差为 0.5mm；当测量距离 500km 时，绝对误差等于 200m. 哪种测量较为精确？

解　用相对误差 $\delta=\frac{\Delta}{|a|}$进行比较，其中 a 为被测量的精确值，而 Δ 是绝对误差.

对于前者，$\delta=\frac{0.5\times0.1}{10}=0.5\%$；对于后者，$\delta=\frac{200}{500\times1000}=0.04\%$.

所以，后者测量较为精确.

【32】　设数 $x=2.3752$ 的相对误差为 1%，试求此数包含若干位精确数字？

解　因为 $\frac{\Delta}{2.3752}=0.01$，所以 $\Delta=0.023752$.

因而，此数包含两位精确数字.

【33】　数 $x=12.125$ 包含三位精确数字. 试求此数的相对误差？

解　因为 x 包含三位精确数字，所以 $\Delta<0.05$. 于是得相对误差

$$\delta=\frac{\Delta}{|x|}<\frac{0.05}{12.125}<0.42\%$$

即 $\delta<0.42\%$.

【34】　矩形的边长等于：

$$x=2.50\text{cm}\pm0.01\text{cm}, \quad y=4.00\text{cm}\pm0.02\text{cm}.$$

这个矩形的面积 S 界于什么范围内？当其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少？

解　$S_{\min}=(2.50-0.01)(4.00-0.02)=9.9102(\text{cm}^2)$,

$S_{\max}=(2.50+0.01)(4.00+0.02)=10.0902(\text{cm}^2)$,

$S_{\min} \leqslant S \leqslant S_{\max}$， $S_{平均}=2.50\times 4.00=10(\mathrm{cm}^2)$，

$\Delta_1=10.0902-10=0.0902(\mathrm{cm}^2)$， $\Delta_2=10-9.9102=0.0898(\mathrm{cm}^2)$；

$\Delta \leqslant \max(\Delta_1,\Delta_2)=0.0902(\mathrm{cm}^2)$， $\delta=\dfrac{\Delta}{10}\leqslant\dfrac{0.0902}{10}<0.91\%$.

【35】 物体的质量 $P=12.59\mathrm{g}\pm 0.01\mathrm{g}$,其体积 $V=3.2\mathrm{cm}^3\pm 0.2\mathrm{cm}^3$.若对物体的质量和体积都取其平均值,试求物体的密度,并估计密度的绝对误差和相对误差.

解 密度 $C=\dfrac{12.59}{3.2}\mathrm{g/cm^3}=3.93\mathrm{g/cm^3}$.

$C_{\max}=\dfrac{12.60}{3.0}\mathrm{g/cm^3}=4.20\mathrm{g/cm^3}$， $C_{\min}=\dfrac{12.58}{3.4}\mathrm{g/cm^3}=3.70\mathrm{g/cm^3}$， $C_{\min}\leqslant C\leqslant C_{\max}$，

$\Delta_1=C_{\max}-C=0.27\mathrm{g/cm^3}$， $\Delta_2=C-C_{\min}=0.23\mathrm{g/cm^3}$； $\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=0.27\mathrm{g/cm^3}$；

一般地,密度为$(3.93\pm 0.27)\mathrm{g/cm^3}$； $\delta\leqslant\dfrac{0.27}{3.70}<7.3\%$.

【36】[+ *] 圆半径 $r=7.2\mathrm{m}\pm 0.1\mathrm{m}$.若取 $\pi=3.14$,则求出的圆面积和最小相对误差是多少?

解 圆面积 $A=\pi\times 7.2^2\approx 51.84\pi(\mathrm{m}^2)$

$$\Delta_1=\pi(7.2+0.1)^2-\pi\cdot 7.2^2=1.45\pi.$$
$$\Delta_2=|\pi(7.2-0.1)^2-\pi\cdot 7.2^2|=1.43\pi.$$
$$\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=1.45\pi(\mathrm{m}^2)$$

即一般的圆面积 A 为$(51.84\pm 1.45)\pi(\mathrm{m}^2)$,故

$$\delta\leqslant\frac{1.45\pi}{51.84\pi}<2.80\%.$$

【37】 已测得长方体各边长为

$$x=24.7\mathrm{m}\pm 0.2\mathrm{m};\quad y=6.5\mathrm{m}\pm 0.1\mathrm{m};\quad z=1.2\mathrm{m}\pm 0.1\mathrm{m}.$$

此长方体的体积 V 界于什么范围内?若测量的各结果都取其平均值,则所求出的体积可能有的绝对误差和相对误差是多少?

解 $24.5\times 6.4\times 1.1\leqslant V\leqslant 24.9\times 6.6\times 1.3$ 即 $172.480\mathrm{m}^3\leqslant V\leqslant 213.642\mathrm{m}^3$.

当 x,y,z 均取平均值时,

$$V=24.7\times 6.5\times 1.2=192.660(\mathrm{m}^3).$$
$$\Delta_1=213.642-192.660=20.982(\mathrm{m}^3),$$
$$\Delta_2=192.660-172.480=20.180(\mathrm{m}^3).$$

于是,$\Delta\leqslant 20.982(\mathrm{m}^3)$；$\delta\leqslant\dfrac{20.982}{172.480}\approx 12.2\%$.

【38】 测量正方形的边长 x,此处 $2\mathrm{m}<x<3\mathrm{m}$,应有多小的绝对误差,才能使此正方形面积有可能精确到 $0.001\mathrm{m}^2$?

解 按题设我们有 $0<x^2-4<0.001$ 或 $0<9-x^2<0.001$,解之得

$$2.99983<x<3 \quad 或 \quad 2<x<2.00024.$$

因此,Δ 取二者中误差较小者,即

$$\Delta\leqslant 0.00017(\mathrm{m})=0.17(\mathrm{mm}),$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17mm 时,就能使此正方形的面积精确到 $0.001\mathrm{m}^2$.

【39】 假定矩形每边的长皆不超过 10m,为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 $0.01\mathrm{m}^2$,问测量矩形的边 x 与 y 时,许可的绝对误差 Δ 的值多大[*)]?

解 按题设我们有$(x+\Delta)(y+\Delta)-xy\leqslant 0.01$, 即 $\Delta^2+(x+y)\Delta\leqslant 0.01$,

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明.中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

由于 $x\leqslant 10$ 及 $y\leqslant 10$，所以只要 $\Delta^2+20\Delta\leqslant 0.01$ 或 $\Delta^2+20\Delta-0.01\leqslant 0$ 即可.解之，得

$$\Delta\leqslant\frac{-20+\sqrt{20^2+0.04}}{2}=-10+\frac{20.00099}{2}=0.000499<0.0005(\mathrm{m}).$$

*） 此题假设 x,y 有相等的绝对误差.又原著上为"$0.01\mathrm{m}^2$"，而误译为"$0.01\mathrm{cm}^2$".

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差，$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差.求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

提示 由绝对误差与相对误差的定义，命题即获证.

证 设 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

于是，

$$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1° **数列极限的概念** 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列，称为发散的.

2° **极限存在的准则**

(1)若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，

(2)单调而且有界的数列有极限.

(3)**柯西准则** 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是：对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3° **关于数列极限的基本定理** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有：

(1)若 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(4)若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4° **数 e** 数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$$

5° **无穷极限** 符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示:对于任何的 $E>0$,存在数 $N=N(E)$,使当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$.

6° **聚点** 若已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots \quad (1\leqslant p_1<p_2<\cdots)$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号∞)为已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$的聚点(聚点也称为极限点).

一切有界的数列至少有一个有限的聚点(波尔查诺——魏尔斯特拉斯原理).若这个聚点是唯一的,则它即为已知数列的有限极限.

数列 x_n 的最小聚点(有限的或无穷的)$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 称为此数列的下极限,而它的最大聚点$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 称为此数列的上极限.

等式$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 为数列 x_n 的(有限或无穷)极限存在的充分必要条件.

【41】 设 $x_n=\frac{n}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$,即:对于任一个给定的 $\varepsilon>0$,求出数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-1|<\varepsilon$.

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					

证 $|x_n-1|=\frac{1}{n+1}$.任给 $\varepsilon>0$,要$|x_n-1|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$.即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

可取 $N=N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n-1|<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N	10	100	1000	10000	…

【42】 设:

(1)$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (2)$x_n=\frac{2n}{n^3+1}$; (3)$x_n=\frac{1}{n!}$; (4)$x_n=(-1)^n\cdot 0.999^n$.

对于任何的 $\varepsilon>0$,求出数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$;从而证明:$x_n(n=1,2,\cdots)$ 为无穷小量(就是说,它的极限值为 0).

对应着上面四种情形,填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	…
N				

证 (1)$|x_n|=\frac{1}{n}$.任给 $\varepsilon>0$,要$|x_n|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{*)}$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(2)$|x_n|=\frac{2n}{n^3+1}<\frac{2}{n^2}$.任给 $\varepsilon<0$,要$|x_n|<\varepsilon$,只要$\frac{2}{n^2}<\varepsilon$,即只要 $n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$.取 $N=\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$时,$|x_n|<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(3)$|x_n|=\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$.任给 $\varepsilon>0$,要$|x_n|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$,即只要 $n>1+\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.取 $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(4) $|x_n|=0.999^n$. 任给 $\varepsilon>0$, 要 $|x_n|<\varepsilon$, 只要 $n\lg 0.999<\lg\varepsilon$. 由于 $\lg 0.999<0$, 故只要 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.999}\approx 2500\lg\frac{1}{\varepsilon}$ **). 取 $N=\left[2500\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, $|x_n|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

填下表:

ε		0.1	0.01	0.001	…
(1)	N	10	100	1000	…
(2)	N	4	14	44	…
(3)	N	4	7	10	…
(4)	N	2500	5000	7500	…

*) 或取 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$. 以下各题类似, 不再一一说明.

**) 查四位数学用表所得的数据.

【43】 证明: 数列

(1) $x_n=(-1)^n n$, (2) $x_n=2^{\sqrt{n}}$, (3) $x_n=\lg(\lg n)$ $(n\geqslant 2)$

当 $n\to\infty$ 时, 有无穷极限(即成为无穷大), 即: 对任意的 $E>0$, 求数 $N=N(E)$, 使得当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$.

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	…
N					

证 (1) $|x_n|=n$, 任给 $E>0$, 要 $|x_n|>E$, 只要 $n>E$. 取 $N=[E]$, 则当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(2) $|x_n|=2^{\sqrt{n}}$, 任给 $E>0$, 要 $|x_n|>E$, 只要 $2^{\sqrt{n}}>E$. 即只要 $n>\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取 $N=\left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right]$, 则当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(3) 当 $n>10$ 时, $\lg n>1$ 及 $\lg(\lg n)>0$. 任给 $E>0$, 要 $|x_n|>E$, 只要 $\lg(\lg n)>E$, 即只要 $n>10^{(10^E)}$. 取 $N=[10^{(10^E)}]$, 则当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

填下表:

E		10	100	1000	10000	…
(1)	N	10	100	1000	10000	…
(2)	N	11	44	99	176	…
(3)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$	…

【44】 求证: $x_n=n^{(-1)^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 无界, 但当 $n\to\infty$ 时, 它并不成为无穷大.

提示 只要注意到当 k 为正整数时, 有 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k,\\ \frac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

命题即获证.

证 因为 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k, k\text{ 为正整数},\\ \frac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

所以, $x_{2k}\to\infty$, $x_{2k-1}\to 0$ $(k\to\infty)$. 由于 $x_{2k}\to\infty$, 故 x_n 无界; 但因 $x_{2k-1}\to 0$, 故 x_n 并不趋于无穷大.

【45】 用不等式表述下列命题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

解 (1)对于任给的正数 E，存在正整数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

(2)对于任给的正数 E，存在正整数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n<-E$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

(3)对于任给的正数 E，存在正整数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n>E$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

设 n 遍历正整数列，求下列各式之值：

【46】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000}{n+\dfrac{1}{n}}=0$.

【47】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$ 有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$.

【49】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}$.

【50】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

【51】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

提示 分别令 $n=2k$ 及 $n=2k+1$（k 为正整数），易知极限不存在.

解 当 $n=2k$ 时（k 为正整数），

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$，

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时，所得的极限值不同，所以，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$ 不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\dfrac{1}{3}$.

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

提示 令 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$,先证 $\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}=8f(2n)-4f(n)$.利用53题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$,由53题即得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

提示 令 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ 及 $g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$,易证 $f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}$.利用58题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, $g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$,

则有 $2f(n+1)-g(n)=f(n)+1$,又由 $2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1$,故

$$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$*),故得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$.

*) 参看58题.

【56】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

相加之,得 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

【57】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

解 由于 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}=2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}=2$.

证明下列等式:

【58】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

提示 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$ $(n>2)$.

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2}$ $(n>2)$,

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$;又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

【59】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

提示 $0<\frac{2^n}{n!}\leqslant\frac{4}{n}\quad(n\geqslant3)$.

证 因为 $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdots\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

【60】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$.

提示 $a^n>\frac{n^2(a-1)^2}{4}\quad(n>2)$. 分别就 $k\leqslant0, k=1$ 及 $k>0$ 加以证明.

证 令 $a=1+\lambda\ (\lambda>0)$，

则
$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\quad(n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，此时，$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}$.

分三种情况：

(1)当 $k\leqslant0$ 时，这时显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0$.

(2)当 $k=1$ 时，$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2}$，而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2}\to0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$；

(3)当 $k>0$ 时，$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k$，而 $a^{\frac{1}{k}}>1$，于是由(2)知，$\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\to0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

总之，当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

提示 令 k 代表任一大于 $2|a|$ 的正整数，则当 $n>k$ 时，有 $0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|<\frac{(2|a|)^k}{2^n}$.

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的正整数，则当 $n>k$ 时，有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}\right)<|a|^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2|a|)^k}{2^n}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$，若 $|q|<1$.

提示 分别就 $0<q<1, -1<q<0$ 及 $q=0$ 加以证明.

证 (1)当 $0<q<1$ 时，可令 $q=\frac{1}{a}$，其中 $a>1$，所以，当 $n\to\infty$ 时，$nq^n=\frac{n}{a^n}\to0$ *)；

(2)当 $-1<q<0$ 时，可令 $q=-q'$，其中 $0<q'<1$，所以，当 $n\to\infty$ 时，$nq^n=(-1)^n nq'^n\to0$；

(3)当 $q=0$ 时，$nq^n=0$.

总之，当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

*) 利用60题的结果.

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

提示 分别就 $a=1, a>1$ 及 $0<a<1$ 三种情形加以证明.

证 (1)当 $a=1$ 时，等式显然成立；

(2)当 $a>1$ 时，因为 $(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon\,(n>1,\varepsilon>0)$，则当 n 充分大后，可使 $1+n\varepsilon>a$，即 $(1+\varepsilon)^n>a$. 事实上，只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就可保证这点. 所以，$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，于是，当 $n>N$ 时，$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(3)当 $0<a<1$ 时，则令 $a=\frac{1}{a'}$，其中 $a'>1$. 于是，当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to1$.

总之，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【64】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$

提示 利用 60 题的不等式，先证 $0<\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

证 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 事实上，令 $a_n=\sqrt[n]{n}$，则 $a_n>1$. 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n>\frac{n^2}{4}(a_n-1)^2,\quad 即\quad n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

由此可知 $0<\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 成立.

现任给 $\varepsilon>0$. 因 $a^\varepsilon>1\ (a>1)$，故存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，恒有 $\sqrt[n]{n}<a^\varepsilon$，由此可知 $(n>N)$，

$$0<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$.

【65】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 在 64 题的证明过程中已证.

【66】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 由数学归纳法易证 $n!\geqslant\dfrac{1}{2}n^{\frac{n}{2}}$，从而，$\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant 2^{\frac{1}{n}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，又因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

【67】 当 n 充分大时，下列各组表达式中哪个更大些？

(1) $100n+200$ 或 $0.01n^2$；(2) 2^n 或 n^{1000}；(3) 1000^n 或 $n!$.

证 (1)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+200}{0.01n^2}=0$，所以，当 n 充分大时，$0.01n^2$ 较 $100n+200$ 大些.

(2)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{2^n}=0$*)，所以，当 n 充分大时，2^n 较 n^{1000} 大些.

(3)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000^n}{n!}=0$**)，所以，当 n 充分大时，$n!$ 较 1000^n 大些.

*) 利用 60 题的结果.

**) 利用 61 题的结果.

【68】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$.

提示 利用 10 题的结果及夹逼准则.

证 因为 $0<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$*)，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$.

*) 利用 10 题的结果.

【69】 证明：数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\ (n=1,2,\cdots)$ 是单调增加的，且上方有界. 而数列 $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是单调减少的，且下方有界. 由此推出这些数列有公共的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

证明思路 首先，将 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 展开，可得

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

当 n 增加时，上式的项数增多，而且每个括弧内的数值也增大，故知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加. 由上式，利用 $\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}\ (k>2)$，可得 $x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$，即数列 x_n 上方有界.

其次，由

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即易推出 $y_{n-1}>y_n$，故知数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 单调减少. 又显然可知 $y_n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{n}{n}=2$，即数列 y_n 下方有界.

证 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

又当 $k>2$ 时，$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$，$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

此即数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以 e 表之.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n}$，也即 $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$，所以，$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，此即 $y_{n-1}>y_n$，因而，数列 $y_n(n=1,2,\cdots,)$ 单调减少. 又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以，数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 下方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

【70】 证明：$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\ (n=1,2,\cdots)$. 当指数 n 是什么样的数值时，表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

证明思路 利用 69 题的结果知 $0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，由此即得不等式

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

当 $n\geqslant 3000$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与 e 之差小于 0.001.

证 利用 69 题的结果知 $0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

即
$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

而
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

因而 $0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}$.

其次,要 $\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.001$,只要 $\frac{3}{n}\leqslant 0.001$,即只要 $n\geqslant 3000$,所以,当指数 n 是代表任一不小于 3000 的正整数,表示式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差就小于 0.001.

【71】 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列,而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列($p_n,q_n\notin[-1,0]$).求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

证明思路 首先,令 $k_n=[p_n]$,利用 69 题的结果可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\mathrm{e}$.

又由 $\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1}$,可证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$.

其次,令 $q_n=-p_n$,即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}$.

证 令 $k_n=[p_n]$,即 k_n 表 p_n 的整数部分,则 $k_n\leqslant p_n<k_n+1$.

由于 $p_n\to+\infty$,故 $k_n\to+\infty$,从而,显然 $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to\mathrm{e}$.(参看 69 题题解).由于

$$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},\quad\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\mathrm{e},\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$.

其次,若 $q_n\to-\infty$,令 $q_n=-p_n$,其中 $p_n\to+\infty$.于是,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)=\mathrm{e},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}$.

【72】 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.由此推出公式

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n},$$

其中 $0<\theta_n<1$,并计算数 e 精确到 10^{-5}.

证明思路 首先,令 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,由 69 题证明中 x_n 的展式知:任意固定 k,当 $n>k$ 时,有

$$x_n>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

两端令 $n\to\infty$ 取极限,得 $\mathrm{e}\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}$.由于此式对任何 k 均成立,故得

$$\mathrm{e}\geqslant\lim_{k\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right).$$

另一方面,由 69 题证明中 x_n 的展式又知:对任何 n,有 $x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$,两端令 $n\to\infty$ 取极

限，得

$$e\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

于是，$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$.

其次，令 $\omega_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，则有

$$0<\omega_{n+m}-\omega_n<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right]<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

固定 n，并让 $m\to\infty$ 取极限，得 $0<e-\omega_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$.

由 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$ 得 $0<e-\omega_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$，从而可得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\cdot n},\ 0<\theta_n<1.$$

又经计算可得 $e=2.71828\pm0.00001$.

证 由 69 题证明中 x_n 的展式知：

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

若固定 k，且 $n>k$，则有

$$x_n>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

今使 n 趋于无穷，在上式两端取极限，得 $e\geqslant1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}$. 由于此不等式对任何正整数 k 皆成立，因此，

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)\leqslant e.$$

另一方面，由 69 题证明中 x_n 的展式又知：对任何正整数 n，有 $x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，及 $x_n\to e$，两端令 $n\to\infty$ 取极限，得

$$e\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$.

其次，设 $\omega_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，则

$$\begin{aligned}0<\omega_{n+m}-\omega_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},\end{aligned}$$

今让 n 固定不变，并让 m 趋于无穷，取极限，得

$$0\leqslant e-\omega_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$，所以，$0<e-\omega_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$，即 $0<e-\omega_n=\frac{\theta_n}{n!\ n}$，其中 $0<\theta_n<1$，因而，

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}. \tag{1}$$

下面将用公式(1)计算 e,使之精确到 10^{-5}. 首先须确定怎样选取 n,才能实现这一精确度. 取 $n=8$,在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!8}<0.0000032,$$

所以弃去它时,由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度. 因此,取 $n=8$ 计算之. 其次,还须考虑计算每一项时的舍入误差,为保证 e 精确到 10^{-5},我们在计算每一项时,计算到第六位小数上四舍五入凑成整数. 则舍入误差总的不超过 $\frac{1}{2\cdot 10^6}\times 6=\frac{3}{10^6}$. 于是,总误差不超过 $6.2\times 10^{-6}<10^{-5}$.

列表:

$$
\begin{array}{ll}
2.000000 & \\
\frac{1}{2!}=0.500000 & \\
\frac{1}{3!}=0.166667 & (-)\\
\frac{1}{4!}=0.041667 & (-)\\
\frac{1}{5!}=0.008333 & (+)\\
\frac{1}{6!}=0.001389 & (-)\\
\frac{1}{7!}=0.000198 & (+)\\
\frac{1}{8!}=0.000025 & (-)\\
\hline
2.718279 &
\end{array}
$$

考虑到修正数的符号,则总误差介于 $-\frac{4}{10^6}$ 和 $\frac{2}{10^6}$ 之间,因而,数 e 介于 2.718275 及 2.718281 之间,所以,

$$e=2.71828\pm 0.00001.$$

【73】 证明:数 e 为无理数.

提示 用反证法.

证 假设 e 为有理数 $\frac{m}{n}$,则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}\quad(0<\theta_n<1).$$

在等式两端同乘以 $n!$,我们即得出左端是整数,而右端是整数加一真分数 $\frac{\theta_n}{n}$,但这是矛盾的. 所以,数 e 为无理数.

【74】 证明不等式:$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证明思路 由 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\frac{n}{2}$,两边取对数,并就 k 从 1 到 $n-1$ 相加,得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},\quad \text{从而可得 } n!\leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

再令 $x_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n$,可得 $\frac{x_n}{x_{n-1}}<n$. 注意到 $x_1=\frac{1}{e}<1$,即知 $x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$.

证 由 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\frac{n}{2}$,则 $\frac{1}{2}[\ln k+\ln(n-k)]\leqslant\ln\frac{n}{2}$,从而,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},(n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

两边同乘以$\frac{n}{2}$,得$\frac{1}{2}n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是 $n!\leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 即 $n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$. 设 $x_n=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$,则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{\mathrm{e}}<n.$$

所以(注意到 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$), $x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$. 从而,证得$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$.

【75】 证明不等式:

(1)$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 其中 n 为任意的正整数; (2)$1+a<\mathrm{e}^a$, 其中 a 为异于零的实数.

证 (1)因为 $1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 两边取对数,得 $0<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$,故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$;

又因为 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,两边取对数,得 $1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$.

因而 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

(2)$(1+x)^n\geqslant 1+nx$ ($x>0$,n 为正整数).

设 a 为正有理数:$a=\frac{p}{q}$,p,q 是正整数,则由于 $\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{q}\right)^q$,故

$$\mathrm{e}^a>\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qa}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^p\geqslant 1+\frac{p}{q}=1+a.$$

至于 a 为任意实数($\neq 0$)时的证明见 1289 题(1).

【76】 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ ($a>0$), 式中 $\ln a$ 是取 $\mathrm{e}=2.718\cdots$作底时,数 a 的对数.

证 先设 $a>1$. 令 $b_n=a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $b_n>0$,且$\frac{\ln a}{n}=\ln(1+b_n)$,故

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\,\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n\to 0$,故存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$0<b_n<1$. 于是,对每个 $n>N$,存在唯一正整数 k_n,使$\frac{1}{k_n+1}\leqslant b_n<\frac{1}{k_n}$. 由于 $b_n\to 0$,故 $k_n\to+\infty$. 由 75 题(1)知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n}.$$

从而,

$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}=1+\frac{2}{k_n},$$

由于 $k_n\to+\infty$ ($n\to\infty$),故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}\to 1$ ($n\to\infty$),由此得

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$$

现设 $0<a<1$. 则$\frac{1}{a}>1$. 于是,由上结果可知

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\left[(-a^{\frac{1}{n}})\cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=-\ln\frac{1}{a}=\ln a.$$

当 $a=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ 显然成立,故此式对任何 $a>0$ 成立. 证毕.

利用关于单调有界数列极限存在的定理，证明以下各数列的收敛性：

【77】 $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 式中 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$是非负整数，并且从 p_1 起不大于9.

证 $x_{n+1}=x_n+\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$，由于 $p_{n+1}>0$，所以，$x_{n+1}>x_n$，因而，数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$是单调增加的. 其次由于 $p_0+\frac{1}{10}<x_n\leqslant 9\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)+p_0<1+p_0$，所以，数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$是有界的.

因而，根据单调有界数列极限存在的定理，可知数列$\{x_n\}$是收敛的.

【78】 $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$.

解 当 $n\leqslant 10$ 时，虽然$\{x_n\}$单调增加；但当 $n>10$ 时，由$\frac{n+9}{2n-1}<1$ 知数列$\{x_n\}$单调减少. 注意有下界 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$. 因而，数列$\{x_n\}$收敛.

【79】 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<x_n$，所以，数列$\{x_n\}$是单调减少的.

又因 $0<x_n<1$，所以，数列$\{x_n\}$是有界的. 因而，数列$\{x_n\}$收敛.

【80】 $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>x_n$，所以，数列$\{x_n\}$是单调增加的.

又因 $1+a<e^a$，所以，

$$0<x_n<e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<e,$$

即数列是有界的. 因而，数列$\{x_n\}$收敛.

【81】 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\cdots$, $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}$, $\cdots$,

证 数列$\{x_n\}$显然是单调增加的.

其次，利用数学归纳法可以证明：$x_n<\sqrt{2}+1$. 事实上，对于$n=1$是成立的. 假设 $x_k<\sqrt{2}+1$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}<\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1,$$

因而，不等式对一切正整数均成立.

由此知数列$\{x_n\}$是有界的. 因而，数列$\{x_n\}$收敛.

利用柯西准则，证明以下各数列的收敛性：

【82】 $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$，其中$|a_k|<M$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 且 $|q|<1$.

证 $|x_m-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_mq^m|\leqslant|a_{n+1}|\cdot|q|^{n+1}+\cdots+|a_m|\cdot|q|^m$

$$<M\cdot|q|^{n+1}(1+|q|+\cdots+|q|^{m-n-1})<M\cdot|q|^{n+1}\cdot\frac{1}{1-|q|}\quad(m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$，由于$|q|^{n+1}\to 0(n\to\infty)$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|q|^{n+1}<\frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}.$$

于是，当 $m>n>N$ 时，恒有$|x_m-x_n|<\varepsilon$. 由此可知，数列$\{x_n\}$收敛.

【83】 $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$.

证 $|x_m-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$ $(m>n)$.

任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$,则当 $m>n>N$ 时,必有 $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$,从而 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,所以,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【84】 $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

提示 利用不等式 $\dfrac{1}{k(k+1)}<\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\quad(k=2,3,\cdots)$.

证
$$|x_m-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m!}{m(m+1)}\right|<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$
$$<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\quad(m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $m>n>N$ 时,必有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,所以,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【85】 $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$.

证 $|x_m-x_n|=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{m^2},\quad(m>n)$.

以下与84题证法步骤相同,故知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【86】 对于数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$,若存在数 c,使得
$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c\quad(n=2,3,\cdots),$$
则称数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有**有界变差**.

证明:凡有有界变差的数列是收敛的.举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\ (n=2,3,\cdots)$,则数列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界,所以,它是收敛的.

根据柯西收敛准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 N,使当 $m>n>N$ 时,$|y_m-y_n|<\varepsilon$,即
$$|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

而对于数列 $\{x_n\}$ 有
$$|x_m-x_n|=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n|$$
$$\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,$$
所以,数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

数列:$1,-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},(-1)\dfrac{1}{n},\cdots$,它是以零为极限的收敛数列.但它不是有有界变差的.事实上,
$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$
$$>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$
而数列 $\omega_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 是发散的*),又是递增的,故 $\omega_n\to+\infty$.于是,
$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$
不是有界的,因而,收敛数列 $\{x_n\}:1,-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\cdots$ 无有界变差.

*) 详见88题的证明.

【87】 试叙述"某数列不满足柯西准则"的含义.

解 即存在一个 $\varepsilon_0>0$,不论对于怎样的数 N,总有 $n_0>N,m_0>N$,使得 $|x_{n_0}-x_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0$.

【88】 利用柯西准则,证明:数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 的发散性.

提示 取 $m=2n$.

证 取 $m=2n$,则

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

所以,数列 $\{x_n\}$ 发散.

【89】 证明:若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛,则它的任何子数列 x_{p_n} 也收敛,且有同一极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$.

今因正整数列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限,所以,对于 N,存在正整数 k_0,使当 $k>k_0$ 时,$p_k>N$,此时 $|x_{p_k}-a|<\varepsilon(k>k_0)$,所以,子数列 $\left\{x_{p_k}\right\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【90】 证明:若单调数列的某一子数列收敛,则此单调数列本身是收敛的.

证 不失一般性,假设数列 $\{x_n\}$ 单调增加,其一子数列 $\left\{x_{p_n}\right\}$ 收敛于 a. 则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $k>N$ 时,$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$,令 $N'=p_{N+1}$. 设 $n>N'$,由于 $p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$,故必有 $p_k(k>N)$ 使 $p_k\leqslant n<p_{k+1}$. 由上知

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon,\quad |x_{p_{k+1}}-a|<\varepsilon.$$

而 $x_{p_k}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{k+1}}$(因 x_n 递增),故必 $|x_n-a|<\varepsilon$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 即 $\{x_n\}$ 是收敛的.

【91】 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

提示 利用极限定义及 $\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$.

又因 $\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$,故当 $n>N$ 时,$\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$,于是,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

【92】 设 $x_n\to a$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 是什么?

解 按题意,应设 $x_n\neq0(n=1,2,\cdots)$.

若 $a\neq0$,则显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\frac{a}{a}=1$.

若 $a=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在,例如,若 $\{x_n\}$ 为:

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots$$

则 $x_n\to0$, 但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}}\to1$, $\frac{x_{2m+1}}{x_{2m}}\to\frac{1}{2}$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在. 下面我们证明,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,设为 b, 则必有 $-1\leqslant b\leqslant1$.

用反证法. 若 $|b|>1$. 取 r,使 $|b|>r>1$. 利用 91 题结果,知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=|b|$. 于是,存在正整数 N,使当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}>r$. 从而,当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|x_N|\cdot\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|>|x_N|\cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,此与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾,故必有 $-1\leqslant b\leqslant1$.

总结起来,若 $a\neq0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$;若 $a=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在,当存在时,它必属于 $[-1,1]$.

【93】 证明:收敛的数列是有界的.

证　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 要证$\{x_n\}$有界. 对于正数$\varepsilon=1$,存在正整数$N$,使当$n>N$时,必有$|x_n-a|<1$,从而$|x_n|<|a|+1\ (n>N)$. 于是,令

$$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|a|+1\}.$$

则$|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 由此可知$\{x_n\}$有界.

【94】　证明:收敛的数列或达到其上确界,或达到其下确界,或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证　(1)对于各项恒为常数的数列,显然上、下确界均达到.

(2)对于不恒为常数的收敛数列,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则或存在某$x_i>A$,或存在某$x_j>A$,或这种$x_i,x_j$都存在. 作$A$的充分小的邻域使它不包含$x_i$或$x_j$,或$x_i,x_j$都不包含在此邻域内. 由于$x_n\to A$,故在这三种情况的任一种下,这个邻域外部都只有$\{x_n\}$中的有限个元素. 因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到. 在第一种情形下确界可能达到,也可能达不到;在第二种情形,上确界可能达到,也可能达不到.

【95】　证明:趋近于$+\infty$的数列$x_n(n=1,2,\cdots)$必定达到其下确界.

证　由题设可知存在正整数N,使当$n>N$时恒有$x_n>x_1$,于是,显然,$x_1,x_2,\cdots,x_N$中的最小者即为$\{x_n\}$的下确界.

求数列$x_n(n=1,2,\cdots)$的最大项,设:

【96】　$x_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

提示　当$n=3$时,$n^2>2^n$;当$n\neq 3$时,$n^2\leqslant 2^n$.

解　当$n=3$时;$n^2>2^n$;当$n\neq 3$时,$n^2\leqslant 2^n$;所以,最大项为$x_3=\dfrac{9}{8}$.

【97】　$x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.

提示　$x_n=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{n}-\dfrac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2+20}$, $x_{100}=\dfrac{1}{20}$.

解　$x_n=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{n}-\dfrac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2+20}\leqslant\dfrac{1}{20}$, 其中$x_{100}=\dfrac{1}{20}$, 所以,最大项为$x_{100}=\dfrac{1}{20}$.

【98】　$x_n=\dfrac{1000^n}{n!}$.

提示　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1000}{n+1}$.

解　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1000}{n+1}$. 当$n+1<1000$时,$x_{n+1}>x_n$;当$n+1>1000$时,$x_{n+1}<x_n$.

所以,最大项为$x_{999}=x_{1000}=\dfrac{1000^{1000}}{1000!}$.

求数列$x_n(n=1,2,\cdots)$的最小项,设:

【99】　$x_n=n^2-9n-100$.

解　若$n^2-9n\geqslant 0$,则$n\geqslant 9$;若$n^2-9n<0$,则$0<n<9$.

所以,最小项从x_1到x_8中去寻找,比较之,得x_n的最小项为$x_4=x_5=-120$.

【100】　$x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

提示　$x_n=\left(\sqrt{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)^2+20$及$x_{10}=20$.

解　$x_n=\left(\sqrt{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)^2+20\geqslant 20$, 其中$x_{10}=20$, 所以,最小项为$x_{10}=20$.

求数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$的 $\inf\{x_n\}$，$\sup\{x_n\}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$，设：

【101】 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=1$； $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=1$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

【102】 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

解 $\inf\{x_n\}=-1$； $\sup\{x_n\}=\dfrac{3}{2}$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

【103】 $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

解 $x_1=1$，$x_2=1-\dfrac{2}{3}$，$x_3=1$，$x_4=1+\dfrac{4}{5}$，$\cdots$.

$\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=2$； $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

【104】 $x_n=1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解 $x_{4k}=1-2+3$， $x_{4k+1}=1+2+3$，$x_{4k+2}=1-2-3$， $x_{4k+3}=1+2-3(k=1,2,\cdots)$.

$\inf\{x_n\}=-4$； $\sup\{x_n\}=6$； $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-4$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=6$.

【105】 $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $x_1=0$， $x_2=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $x_3=\dfrac{1}{2}$， $x_4=\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $x_5=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $x_6=\dfrac{5}{7}$，

$x_7=\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $x_8=\dfrac{7}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $x_9=\dfrac{4}{5}$，$\cdots$.

$\inf\{x_n\}=-\dfrac{1}{2}$； $\sup\{x_n\}=1$； $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{1}{2}$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

【106】 $x_n=(-1)^n n$.

解 $\inf\{x_n\}=-\infty$； $\sup\{x_n\}=+\infty$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

【107】 $x_n=-n[2+(-1)^n]$.

解 $\inf\{x_n\}=-\infty$； $\sup\{x_n\}=-1$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

【108】 $x_n=n(-1)^n$.

解 $\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=+\infty$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

【109】 $x_n=1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 $x_1=1+1$，$x_2=1+0$，$x_3=1-3$，$x_4=1+0$，$x_5=1+5$，$\cdots$.

$\inf\{x_n\}=-\infty$； $\sup\{x_n\}=+\infty$；$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

【110】 $x_n=\dfrac{1}{n-10.2}$.

解 当 n 由 1 到 10 时，x_n 由负数往下降；当 n 由 11 到 $+\infty$时，x_n 由正数往下降，所以，

$\inf\{x_n\}=x_{10}=-5$； $\sup\{x_n\}=x_{11}=1.25$； $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$， $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

求$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 及$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. 设：

【111】 $x_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{1}{2}$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

【112】 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$.

解 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$； $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\mathrm{e}+1$.

【113】 $x_n=\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

解 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$； $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$.

【114】 $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$.

解 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$； $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=2$ （因$(2^{2k}+1)^{\frac{1}{2k}}=2\left(1+\frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}}\to2$）.

【115】 $x_n=\cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

解 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$； $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$.

求以下各数列的聚点：

【116】 $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$.

解 聚点为 0 及 1.

【117】 $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,$

$\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\cdots.\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots$.

解 聚点为 $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$. 它们分别为子数列：$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right\}$，$\cdots$ 的极限.

【118】 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$.

解 所述数列正好包含$(0,1)$中全部有理数，故对于闭区间$[0,1]$上的每一点 x，在其任意的 ε 邻域内均有此数列中无穷个数，因此 x 必可作为某子数列的极限，所以，x 是所述数列的聚点. 由此可知$[0,1]$中的任何点都是所述数列的聚点，显然，$[0,1]$外的点都不是所述数列的聚点.

【119】 $x_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

解 因为 $2(-1)^n$ 为 2 或 -2. 所以，聚点为 5 及 1.

【120】 $x_n=\frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

解 聚点为 a 及 b.

【121】 试举出以已知数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1-\frac{1}{2},a_2-\frac{1}{2},\cdots,a_p-\frac{1}{2},a_1-\frac{1}{3},a_2-\frac{1}{3},\cdots,a_p-\frac{1}{3},\cdots,a_1-\frac{1}{n},a_2-\frac{1}{n},\cdots,a_p-\frac{1}{n},\cdots$$

显然以 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为聚点.

【122】 试举出数列的例子，对此数列而言，已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的所有各项皆为其聚点，所举数列还必有怎样的聚点？

解 例如，数列

$$a_1+\frac{1}{2},a_2+\frac{1}{2},a_1+\frac{1}{3},a_2+\frac{1}{3},a_3+\frac{1}{3},a_1+\frac{1}{4},a_2+\frac{1}{4},a_3+\frac{1}{4},a_4+\frac{1}{4},\cdots,$$

$$a_1+\frac{1}{n},a_2+\frac{1}{n},a_3+\frac{1}{n},\cdots,a_n+\frac{1}{n},\cdots$$

就以 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 为其聚点.

此外,很明显,若 $\{x_n\}$ 为一数列,使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点,则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

【123】 举出数列的例子:

(1)没有有限的聚点;　　(2)有唯一有限的聚点,但不收敛;

(3)有无限多的聚点;　　(4)以每一实数作为聚点.

解 (1)数列 $x_n=n(n=1,2,\cdots)$ 没有有限的聚点.

(2)数列:$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ \frac{1}{3},\ -3,\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ -n,\ \cdots$ 有唯一有限的聚点 0,但此数列却不收敛.

(3)118 题的数列即有无限多的聚点.

(4)我们按下述"对角线法则"来构造一个数列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1.1.

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=-\frac{1}{2},\ x_5=2, x_6=-2,$$

$$x_7=3,\ x_8=-3,\ x_9=\frac{2}{2}, x_{10}=-\frac{2}{2},\ x_{11}=\frac{1}{3},\ x_{12}=-\frac{1}{3},$$

$\cdots$.

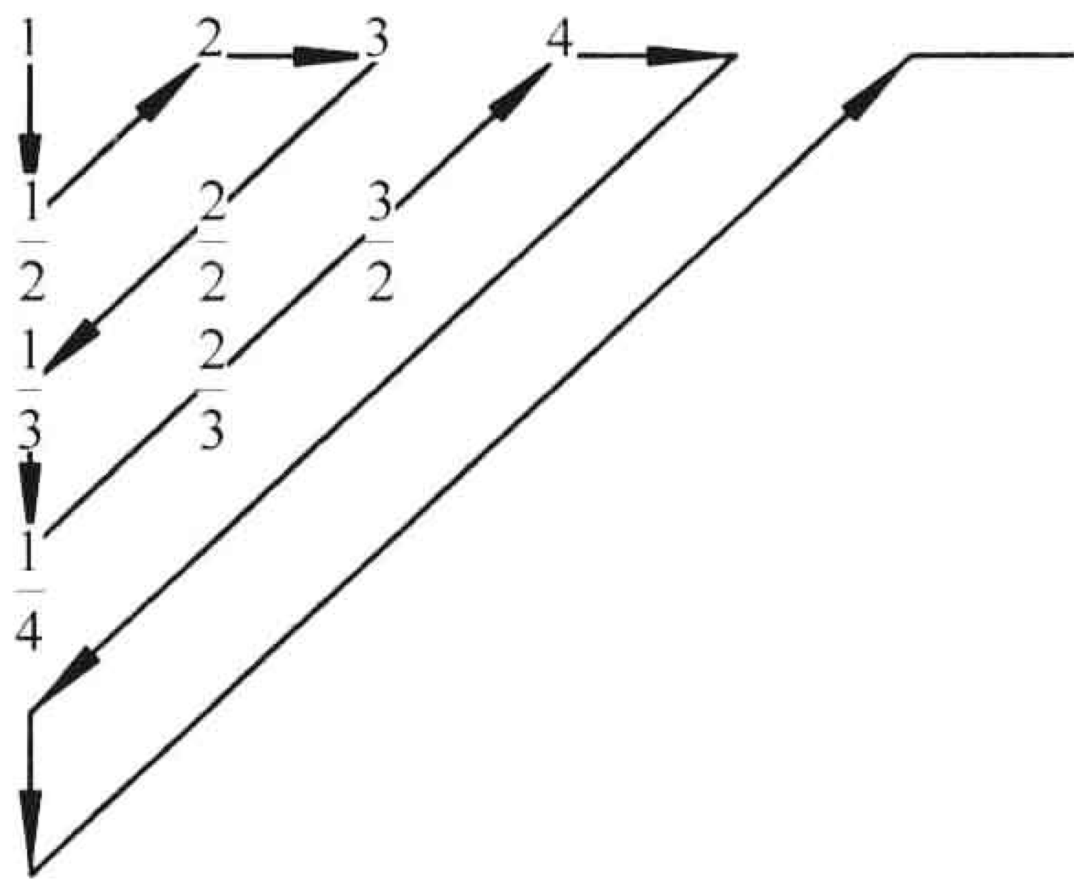


图 1.1

此数列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为$(-\infty,+\infty)$.

【124】 证明:数列 x_n 和 $y_n=x_n\sqrt[n]{n}\,(n=1,2,\cdots)$ 有相同的聚点.

证 因为$\sqrt[n]{n}\to 1$,所以,数列 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_n\}$ 的对应子数列 $\{x_{n_k}\sqrt[n_k]{n_k}\}$ 同时收敛,且具有相同的极限,此即数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的聚点.

【125】 证明:从有界的数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 中,永远可选出收敛的子数列 $x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$.

证明思路 可设 $a\leqslant x_n\leqslant b$. 将区间$[a,b]$二等分,其中必至少有一个子区间包含$\{x_n\}$的无限多项,记为$[a_1,b_1]$. 再将区间$[a_1,b_1]$二等分,又可得区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$,它包含$\{x_n\}$的无穷多项,依次类推,得

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

每一$[a_n,b_n]$均包含$\{x_n\}$的无限多项,且 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$,由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

按下法选$\{x_n\}$的一个子序列$\left\{x_{p_n}\right\}$:先在包含于$[a_1,b_1]$内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1}. 然后,在包含于$[a_2,b_2]$内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2},余类推,可得$\{x_n\}$的一个子序列$\left\{x_{p_k}\right\}$,满足

$$a_k\leqslant x_{p_k}\leqslant b_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此可得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=c$. 即$\{x_{p_k}\}$为$\{x_n\}$的一个收敛子数列.

证 因为数列$\{x_n\}$有界,故可设一切项满足不等式

$$a\leqslant x_n\leqslant b,$$

其中 a,b 为有限的实数,将区间$[a,b]$二等分之,得区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$,其中必至少有一个包含所给数列的无限多项,将它记为$[a_1,b_1]$(若两者均含无穷多项,则任取其一作为$[a_1,b_1]$). 再将区间$[a_1,b_1]$等分之,又可得区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$,它包含所给数列的无限多项. 依次类推,于是得一串区间:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每一$[a_n,b_n]$都包含所给数列$\{x_n\}$中的无限多项,且有

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此,根据区间套定理诸$[a_n,b_n]$具有唯一的公共点 c,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c.$$

现按下法选出$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{p_k}\}$：在包含于$[a_1,b_1]$内的诸x_n中任取一个作为x_{p_1}. 然后，在包含于$[a_2,b_2]$内且在x_{p_1}后面的诸x_n中任取一个作为x_{p_2}，然后，又在包含于$[a_3,b_3]$内且在x_{p_2}后面的诸x_n中任取一个作为x_{p_3}. 余类推(这是可能的，因为每个$[a_k,b_k]$中都包含有x_n无穷多项). 于是，我们得出$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$a_k \leqslant x_{p_k} \leqslant b_k \quad (k=1,2,\cdots).$$

由此，知$|x_{p_k}-c| \leqslant b_k-a_k\ (k=1,2,\cdots)$，故$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k}=c$. 从而，$\{x_{p_k}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子数列.

证毕.

【126】 证明：若数列$x_n(n=1,2,\cdots)$无界，则存在子数列$x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}=\infty$.

证 因$x_n(n=1,2,\cdots)$无界，故存在某项x_{p_1}满足$|x_{p_1}|>1$. 由于数列$x_n(n=p_1+1,p_1+2,\cdots)$也无界，故又存在某项$x_{p_2}(p_2>p_1)$，使$|x_{p_2}|>2$；又由于数列$x_n(n=p_2+1,p_2+2,\cdots)$无界，故又存在某项$x_{p_3}$ $(p_3>p_2)$，使$|x_{p_3}|>3$. 余类推. 于是，我们得$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$|x_{p_k}|>k \quad (k=1,2,\cdots).$$

由此可知$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k}=\infty$. 证毕.

【127】 设数列$x_n(n=1,2,\cdots)$收敛，而数列$y_n(n=1,2,\cdots)$发散，则能否断定关于数列(1)x_n+y_n；(2)x_ny_n的收敛性？举出适当的例子.

解 (1)$\{x_n+y_n\}$一定发散. 如果$\{x_n+y_n\}$收敛，则由$(x_n+y_n)-x_n=y_n$，知$\{y_n\}$收敛，与题设矛盾.

(2)数列$\{x_ny_n\}$可能收敛，也可能发散. 例如：

(ⅰ)数列$x_n=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$收敛，数列$y_n=n\ (n=1,2,\cdots)$发散，

而数列$x_ny_n=1\ (n=1,2,\cdots)$是收敛的.

(ⅱ)数列$x_n=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$收敛，数列$y_n=n^2\ (n=1,2,\cdots)$发散，

而数列$x_ny_n=n\ (n=1,2,\cdots)$却是发散的.

【128】 设数列x_n和y_n发散$(n=1,2,\cdots)$，可否断定数列(1)x_n+y_n；(2)x_ny_n. 也发散呢？举出适当的例子.

提示 不能. 例如，

$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}, \quad y_n=\frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1,2,\cdots).$$

解 不能. 例如，数列

$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2} \quad \text{及} \quad y_n=\frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

都发散，但数列

$$x_n+y_n=1 \quad (n=1,2,\cdots) \quad \text{及} \quad x_ny_n=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

却都是收敛的.

【129】 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，$y_n(n=1,2,\cdots)$为任意数列. 能否断定$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$？举出适当的例子.

解 不能. 例如，数列

$$x_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty) \text{ 及 } y_n=n\ (n=1,2,\cdots) \text{的乘积 } x_ny_n=1\ (n=1,2,\cdots),$$

当$n\to\infty$时趋于1，不趋于0.

【130】 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$. 是否由此可得出：或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$？

提示 不能. 例如，

$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}, \quad y_n=\frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1,2,\cdots), \quad \text{或} \quad x_n=\frac{1}{n^2}, \quad y_n=n \quad (n=1,2,\cdots).$$

解 不能. 例如，数列 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $y_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均不存在.

当然，还可举例 $x_n=\frac{1}{n^2}$，$y_n=n(n=1,2,\cdots)$，则 $x_ny_n\to0$，$x_n\to0$，而 $\{y_n\}$ 极限不存在(当 $n\to\infty$). 注意，假若已知 $x_ny_n\to0$，而又已知 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 中至少有一个数列有极限的话，则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 至少有一个是成立的.

【131】 证明：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

证明思路 (1)先证右端不等式. 存在 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k}\to\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 对于数列 $\{y_{n_k}\}$，必有子数列 $y_{n_{k_i}}$ 使 $y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$. 由于 $x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$，故 $\alpha+\beta$ 为 $\{x_n+y_n\}$ 的一个聚点. 由此有 $\alpha+\beta\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 及 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

再证左端不等式. 存在 $\{x_n+y_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于 $\{x_{n_k}\}$，存在子数列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta',$$

故 $\alpha'-\beta'$ 为 $\{y_n\}$ 的一个聚点. 由此有

$$\alpha'-\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n \quad 及 \quad \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\varliminf_{n\to\infty}y_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(2)同(1)的思路.

证 (1)先证右端不等式. 根据定义，存在 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k}\to\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 对于数列 $\{y_{n_k}\}$，必有子数列 $y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$. 显然 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$. 由于 $x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$，故 $\alpha+\beta$ 是 $\{x_n+y_n\}$ 的一个聚点. 由此可知

$$\alpha+\beta\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

故得

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

再证左端的不等式，根据定义，存在 $\{x_n+y_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于数列 $\{x_{n_k}\}$，存在子数列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$，显然 $\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta'.$$

故 $\alpha'-\beta'$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点. 从而，

$$\alpha'-\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n,$$

由此可知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$.

(2)先证右端不等式. 根据定义，存在 $\{x_n+y_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}+y_{n_k}\to r=\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于数列 $\{x_{n_k}\}$，存在子数列 $x_{n_{k_i}}\to\tau=\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$. 显然 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to r-\tau,$$

故 $r-\tau$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点. 从而，

$$r-\tau\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

由此可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=r\leqslant\tau+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一个子数列$\{y_{n_k}\}$，使$y_{n_k}\to r'=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$. 对于数列$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\tau'=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}$. 显然$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to r'+\tau',$$

故$r'+\tau'$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点. 从而，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'.$$

由此可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$. 证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如，令

$\{x_n\}$为：1,0,1,0,1,0,…　$\{y_n\}$为：0,2,0,2,0,2,….

则有不等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n=0<\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=1<\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=2.$$

而对于数列

$\{x_n\}$为：0，2，0，2，0，2，…　$\{y_n\}$为：1，0，1，0，1，0，…，

则有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=1<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=2<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=3$.

【132】 设$x_n\geqslant0$和$y_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，　及

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

证　(1)先证右端的不等式. 根据定义，存在$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$，使$x_{n_k}\to\alpha=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\geqslant0$；对于数列$\{y_{n_k}\}$，存在子数列$\{y_{n_{k_i}}\}$，使$y_{n_{k_i}}\to\beta=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}\geqslant0$. 显然$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\alpha\beta$，故$\alpha\beta$是数列$\{x_ny_n\}$的一个聚点. 因此，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta,$$

由此，再注意到$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$，即得知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

再证左端的不等式. 若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$，则此不等式显然成立，故设$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\beta^*>0$. 于是，存在正整数$N_0$，使当$n>N_0$时，$x_n>0$. 根据定义，存在$\{x_n y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\alpha'=\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)\geqslant0.$$

对于数列$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$，使

$$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\underline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}.$$

注意到$\beta'=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\beta^*>0$以及$x_n>0(n>N_0)$，知

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故$\frac{\alpha'}{\beta'}$是$\{y_n\}$的一个聚点. 从而，

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant\beta'(\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n)\geqslant(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n)$.

(2)先证右端不等式，可设$\{y_n\}$有界(若$\{y_n\}$无界，则$\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n=+\infty$，从而此不等式显然成立). 根据定义，存在$\{x_n\,y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\bar{\alpha}=\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$，使

$$x_{n_{k_i}}\to\bar{\beta}=\overline{\lim}_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant 0.$$

若$\bar{\beta}=0$，则由于$\{y_n\}$有界，知$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to 0$，从而$\bar{\alpha}=0$，此时所要证的不等式显然成立，故下设$\bar{\beta}>0$. 于是，当$i$充分大时($i>i_0$)，$x_{n_{k_i}}>0$，故得

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此，$\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$是$\{y_n\}$的一个聚点，从而，$\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n$；由此可知

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)=\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n)\leqslant(\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一子数列$\left\{y_{n_k}\right\}$，使$y_{n_k}\to r=\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n\geqslant 0$，对于$\left\{x_{n_k}\right\}$，存在子数列$\left\{x_{n_{k_i}}\right\}$，使

$$x_{n_{k_i}}\to\tau=\underline{\lim}_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant 0.$$

显然$\underline{\lim}_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\tau r,$$

故τr是$\{x_ny_n\}$的一个聚点. 从而，

$$\tau r\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n),$$

由此可知$(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n)\leqslant\tau r\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)$. 证毕.

下面举不等号成立的例子. 例如，令

$$\{x_n\}\text{为}:\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots\quad\{y_n\}\text{为}:2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$$

则有不等式

$$(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n)=\frac{1}{8}<\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)=\frac{1}{2}<(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n)=1.$$

再令

$$\{x_n\}\text{为}:2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots\quad\{y_n\}\text{为}:\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$$

则有不等式

$$(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n)=\frac{1}{2}<\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)=1<(\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n)=4.$$

【133】 证明：若$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，则对于任何数列$y_n(n=1,2,\cdots)$，有：

(1)$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n$；

(2)$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n\quad(x_n\geqslant 0)$.

证 (1)由于$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，故$\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$，从而，利用131题的结果可知

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(2)分三种情形:(ⅰ)设 $y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 则利用 132 题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

(ⅱ)设 $y_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 则 $-y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,于是,仍利用 132 题的结果可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n),$$

故得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义,显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(ⅲ)设 $\{y_n\}$ 中有无穷多项是非负的,设这些项构成的子数列为 $\{y_{n_k}\}(y_{n_k}\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots)$(如果 $\{y_n\}$ 中只有有限项是非负的,则从某一项开始有 $y_n<0$,这时应用(ⅱ)的结果即知所要证的等式成立). 于是,注意到 $x_n\geqslant 0$,显然有(利用(ⅰ)已证的结果)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k}y_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}y_{n_k}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

证毕.

【134】 证明:若对于某非负[*)]数列 $x_n(x_n\geqslant 0,\ n=1,2,\cdots)$,无论数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$怎样选取,以下两个等式中至少有一个成立:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$, (2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

则数列 x_n 是收敛的.

证 取 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k}\to\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$. 取

$$y_n=\begin{cases}-x_n, & n\neq n_k,\\ A, & n=n_k,\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 A 为任取的正常数,对此 $\{y_n\}$ 若(1)成立,则由(注意到 $x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=A,$$

知$(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n)+A=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n)+A$,由此可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,故 $\{x_n\}$ 收敛.

若(2)成立,则由(同样,注意到 $x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

知 $A\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,由此可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,故 $\{x_n\}$ 也是收敛的. 证毕.

*) 作者注:原著中将 $x_n\geqslant 0$ 的假定加在条件(2)后,似不妥,因为数列 x_n 应该是预先给定的.

【135】 证明:若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$及$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{x_n}=1$,则数列 x_n 是收敛的.

证 由假定知

$$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n<+\infty,\quad 0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}<+\infty. \tag{*}$$

由于(利用 132 题的结果.)

$$1=\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\cdot\frac{1}{x_n})\leqslant(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n})\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\cdot\frac{1}{x_n})=1,$$

故

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n})=1,$$

从而，

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n})=(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}).$$

由此，再注意到（*）式，即知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=a \quad (0<a<+\infty).$$

故存在$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$有限，因此$\{x_n\}$收敛，证毕.

【136】 证明：若数列$x_n(n=1,2,\cdots)$有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则此数列的聚点充满于下极限和上极限

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad 和 \quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

之间，即间隔$[l,L]$中的任意一个数都是该数列的聚点.

证 根据定义，l与L都是$\{x_n\}$的聚点，故我们只要证明l与L之间的任何数$a(l<a<L)$都是$\{x_n\}$的聚点.先证：对于任意给定的$\varepsilon>0$及任意给定的正整数N，必有正整数$n^*>N$存在，使$|x_{n^*}-a|<\varepsilon$.

由假定，必有正整数N'存在，使当$n>N'$时，恒有$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. 令$N_0=\max\{N,N'\}$，则于数列$x_n(n=N_0+1,N_0+2,\cdots)$中必至少有两项$x_{n'}$和$x_{n''}$存在，使$x_{n'}<a$，$x_{n''}>a$(因为否则的话，例如，无小于$a$的项，则必$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n\geqslant a$，此与$l<a$矛盾)，不妨设$n'<n''$，令满足$n'\leqslant n\leqslant n''$且使$x_n<a$的正整数$n$中之最大者为$n^*$. 显然$n^*\leqslant n''-1$，且$x_{n^*}<a$，$x_{n^*+1}>a$. 故$n^*>N$，$n^*>N'$并且

$$|x_{n^*}-a|<x_{n^*+1}-x_{n^*}<\varepsilon.$$

现取$\varepsilon_1=1$，$N_1=1$，则存在$x_{n_1}(n_1>1)$使$\left|x_{n_1}-a\right|<1$；再取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$，$N_2=n_1$，则存在$x_{n_2}(n_2>n_1)$使$|x_{n_2}-a|<\frac{1}{2}$；又取$\varepsilon_3=\frac{1}{3}$，$N_3=n_2$，则存在$x_{n_3}(n_3>n_2)$使$|x_{n_3}-a|<\frac{1}{3}$；这样一直继续下去，则得$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$，满足

$$|x_{n_k}-a|<\frac{1}{k} \quad (k=1,2,\cdots),$$

故$x_{n_k}\to a$，即a是$\{x_n\}$的一个聚点，证毕.

【137】 设数列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$满足条件$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n \quad (m,n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$存在.

证 证法1：

由于

$$x_n\leqslant x_{n-1}+x_1\leqslant x_{n-2}+x_1+x_1\leqslant\cdots\leqslant nx_1,$$

故$0\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant x_1$，从而数列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$有界，令$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}=a$，则$0\leqslant a\leqslant x_1$. 任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N>1$使$\frac{x_N}{N}<a+\varepsilon$. 任何正整数$n>N$都可表为$n=qN+r$的形式，其中$q$为正整数，$r$为小于$N$的非负整数$(0\leqslant r<N)$.

我们有

$$x_n=x_{qN+r}\leqslant x_{(q-1)N}+x_N+x_r\leqslant x_{(q-2)N}+x_N+x_N+x_r\leqslant\cdots\leqslant qx_N+x_r\leqslant qx_N+rx_1\leqslant qx_N+Nx_1,$$

从而，

$$\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{qx_N}{n}+\frac{Nx_1}{n}\leqslant\frac{x_N}{N}+\frac{Nx_1}{n}<a+\varepsilon+\frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}\leqslant a+\varepsilon$，再根据$\varepsilon>0$的任意性，即得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}\leqslant a$，故$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$存在有限.

证法2：

用反证法. 假定$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$不存在，则数列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$至少有两个聚点$a$与$b$，不妨设$a<b$，由于(证法1中已证)

$$0\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant x_1\qquad(n=1,2,\cdots)$$

故 $0\leqslant a<b\leqslant x_1$. 根据聚点定义，存在 $\{x_n\}$ 的两个子数列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{x_{m_j}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty}\frac{x_{n_i}}{n_i}=a,\quad \lim_{j\to\infty}\frac{x_{m_j}}{m_j}=b.$$

任给 $\varepsilon>0$，必存在正整数 $i_0>1$，使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}}<a+\varepsilon.$$

显然，当 j 充分大时($j>j_0$)，必 $m_j>n_{i_0}$，此时仿证法 1，有不等式($[x]$表 x 的整数部分)

$$x_{m_j}\leqslant\left[\frac{m_j}{n_{i_0}}\right]x_{n_{i_0}}+n_{i_0}x_1\leqslant\frac{m_j}{n_{i_0}}x_{n_{i_0}}+n_{i_0}x_1,$$

故($j>j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j}\leqslant\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}}+\frac{n_{i_0}x_1}{m_j}<a+\varepsilon+\frac{n_{i_0}x_1}{m_j},$$

由此可知 $b=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{x_{m_j}}{m_j}\leqslant a+\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $b\leqslant a$，此与 $a<b$ 矛盾，证毕.

【138】 证明：若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛，则算术平均值数列 $\zeta_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

逆命题不成立，举例说明.

证明思路 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$. 令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

取 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有 $\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon$，$\quad\frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}$，可证 $\left|\frac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$. 反之不然，例如，$x_n=(-1)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

证 令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设收敛于 a，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，即 x_{N+1}，x_{N+2}，$\cdots$均$\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 由此推得 $\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}$ 也含在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之内，即

$$\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}=a+\alpha,$$

式中 $|\alpha|<\varepsilon$.

这样，$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+(a+\alpha)\left(1-\frac{N}{n}\right)$. 由此得

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|s_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n}.$$

今取 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon,\quad \frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有 $\left|\frac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$.

由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=a$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

反之不然，例如，数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$是发散的，但是数列

$$\zeta_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

却是收敛的.

【139】 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

提示 同 138 题的思路.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，故对于任给的 $M>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$x_n>3M$，此时，仿 138 题的证明，有

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right)>\frac{s_N}{n}+3M\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0$，$1-\frac{N}{n}\to 1(n\to\infty)$，故可取正整数 $N'>N$，使当$n>N'$时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是，当 $n>N'$时恒有$\frac{s_n}{n}>M$. 由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

【140】 证明：若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛且 $x_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明思路 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 及 $x_n>0$，故 $a\geqslant 0$. 当 $a>0$ 时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$，利用 138 题的结果. 当 $a=0$ 时，则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$，利用 139 题的结果.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，故 $a\geqslant 0$. 先设$a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$，于是，利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若 $a=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$. 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证毕.

【141】 证明：若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

证明思路 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$，则 $y_n>0$. 且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，设为 a. 注意到 $x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$，并利用 63 题及 140 题的结果.

证 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，则 $y_n>0$. 由假定$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，设为 a. 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\left[(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}=1^{*)}\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

*) 利用 63 题的结果.

【142】 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

提示 令 $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$,并利用 141 题的结果.

证 设数列 $x_n=\dfrac{n^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

利用 141 题的结果,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\mathrm{e}.$$

【143】 证明施托尔茨定理:若

(1)$y_{n+1}>y_n\quad(n=1,2,\cdots)$, (2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, (3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

证明思路 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 则对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$\left(a-\dfrac{\varepsilon}{2},a+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$内,注意到 $y_{m+1}>y_m(m=1,2,\cdots)$,得

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

$$\vdots$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n),$$

相加,即得$\left|\dfrac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 再注意到

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+\left(1-\frac{y_{N+1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right).$$

取 $N'>N$,使当 $n>N'$ 时,恒有$\dfrac{|x_{N+1}-ay_{N+1}|}{y_n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,则可知当 $n>N'$ 时,恒有$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$.

证 假定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 由此,并注意到 $y_n\to+\infty$,可知对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{且 }y_n>0).$$

于是,分数(当 $n>N$ 时)

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$\left(a-\dfrac{\varepsilon}{2},a+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$之内,因为 $y_{n+1}>y_n$,所以,这些分数的分母都是正数,于是,得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

$$\vdots$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n),$$

相加之，得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即 $a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$，所以，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 另外，我们有（当 $n>N$ 时）

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_n})\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

故 $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$.

现取正整数 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|x_{N+1}-ay_{N+1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. 证毕.

注 本题中，若将条件(3)换为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty$（或 $-\infty$），则结论仍成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

【144】 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}$.

提示 利用 143 题的结果.

解 (1)设 $x_n=n^2$，$y_n=a^n(a>1)$. 则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}=\frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n=2n+1$，$y'_n=a^n$，则 $y'_{n+1}>y'_n$，$y'_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\frac{2}{a^n(a-1)}\to0,$$

因而利用 143 题的结果得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$.

继续利用 143 题的结果，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0$.

(2)设 $x_n=\lg n$，$y_n=n$，则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\to0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$.

注 143 题的结果属于 O. Stolz，当 $y_n=n$ 时，早已被 A. L. Cauchy 所证明，此结果常用于确定“$\frac{\infty}{\infty}$”型

的不定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限，144 题即是一例. 应用此结果，也可证明 138 题及 139 题的结果(此结果属于柯西 Cauchy). 事实上，令

$$x_n'=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad y_n'=n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n'}{y_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}'-x_n'}{y_{n+1}'-y_n'}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

【145】 证明：若 p 为正整数，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

提示 利用 143 题的结果.

证 (1)令 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$，$y_n=n^{p+1}$，则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{p+1},$$

式中$\lim\limits_{n\to\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)=0$为无穷小量，以下不再说明.

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

(2)令 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$，$y_n=(p+1)n^p$，则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(p+1)(n+1)^p+[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\cdots}{p(p+1)n^{p-1}+\cdots}.$$

当 $n\to\infty$时，$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to\frac{1}{2}$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3)令 $x_n=1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p$，$y_n=n^{p+1}$，则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}=\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{2^p}{p+1},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

【146】 证明：数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$称为**欧拉常数**，且当 $n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to0$.

证明思路 利用 75 题(1)的结果：$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，故 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$. 分别令 $n=1,2,\cdots,n$，将 n 个不等式相加，得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 又 $x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0$. 且 $x_n-x_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 C，其中 C 的近似值为 0.577216，即 1+

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n(\varepsilon_n\to 0)$.

证 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ *)，故 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，令 $n=1,2,3,\cdots,n$，得出

$$\ln 2-\ln 1<1,\quad \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},\quad \ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},\quad \cdots\quad \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

相加之，得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 于是，

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0,$$

即 $\{x_n\}$ 是一个有下界的数列. 其次，

$$x_n-x_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1},$$

因为 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **)，所以，$x_n-x_{n+1}>0$，这就是说，$\{x_n\}$ 又是一个单调下降的数列. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，用 C 表示之，即

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

*) 及 **) 利用 75 题(1)的结果.

【147】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

提示 对 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 及 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ 利用 146 题的结果.

解 因为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n, \tag{1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}, \tag{2}$$

其中 C 为欧拉常数，$\varepsilon_n\to 0$，$\varepsilon_{2n}\to 0$ $(n\to\infty)$.

(2)式减(1)式得

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2n-\ln n+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)=\ln 2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)\to\ln 2\quad(n\to\infty),$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

【148】 数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是由下列各式

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n=3,4,\cdots)$$

所确定. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

提示 注意 $x_{n+1}-x_n=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$ 及 $x_{n+1}=\sum\limits_{m=1}^{n}(x_{m+1}-x_m)+x_1$.

解 由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}=\cdots=\frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}}=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

及

$$x_{n+1}=\sum_{m=1}^{n}(x_{m+1}-x_m)+x_1=(b-a)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(-2)^{m-1}}+a,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{b-a}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}+a=\dfrac{a+2b}{3}$.

【149】 设 $a>0$ 和 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为由以下各式

$$x_0>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\ (n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

提示 注意 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{x_n}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}\right]^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}$ 及 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x_n}-x_n\right)\leqslant 0$.

证 由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{x_n}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}\right]^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}(n=0,1,2,\cdots)$，则 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x_n}-x_n\right)\leqslant 0$.

因此，$\{x_n\}$ 为单调下降的有界数列，必有极限存在. 设其极限为 l，则 $l\geqslant\sqrt{a}>0$，对于等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

两端取极限，即得

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right),$$

解之得 $l=\sqrt{a}$（负值不合适），故证得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

【150】 证明：由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 有公共的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n\quad\text{（数 } a \text{ 和 } b \text{ 的算术几何平均值）}.$$

证明思路 分两种情形：

(1)a 与 b 中至少有一个为零，例如，设 $a=0$. 则有 $x_n=0,y_{n+1}=\dfrac{y_n}{2}=\cdots=\dfrac{b}{2^{n-1}}$.

(2)设 $a\neq 0,b\neq 0$，则必有 $a>0,b>0$，不妨假定 $a\leqslant b$. 应用数学归纳法可得 $a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b$.

证 分两种情形：

(1)a 与 b 中至少有一个为零，例如，设 $a=0$. 则显然有 $x_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，$y_{n+1}=\dfrac{y_n}{2}$，从而，递推得

$$y_n=\frac{b}{2^{n-1}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

(2)设 $a\neq 0,b\neq 0$，这时，必须 $a>0,b>0$. 否则，若 $ab<0$，则 $x_2=\sqrt{ab}$ 没有意义；若 $a<0$，$b<0$，则 $x_2=\sqrt{ab}>0$，$y_2=\dfrac{a+b}{2}<0$，从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义. 因此，必须 $a>0$，$b>0$. 不妨假定 $a\leqslant b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项，并且都界于原来两数之间，故有

$$a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b,\quad\text{由此又有}\quad a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b\quad(n=2,3,\cdots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列，$\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列，因此它们的极限都存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$. 在等式 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 两端取极限，得 $\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，故 $\alpha=\beta$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证毕.

§3. 函数的概念

1° **函数的概念** 若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x，有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应，则变量 y 称为变量 x 在所给变化域 X 上的单值函数，并记为 $y=f(x)$.

集合 X 称为函数 $f(x)$ 的*定义域*或*存在域*；Y 称为这个函数的*值域*，在最简单的情形下，集合 X 或为开区间 (a,b)：$a<x<b$，或为半开区间 $(a,b]$：$a<x\leqslant b$ 或 $[a,b)$：$a\leqslant x<b$，或为闭区间(线段) $[a,b]$：$a\leqslant x\leqslant b$，其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$（在这种情形下，没有等号）.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$ 与之对应，则 y 称为 x 的*多值函数*.

2° **反函数** 若把 x 了解为满足方程

$$f(x)=y$$

（式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一个固定数值）的任何数值，则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的*反函数*，这个函数一般说来是多值函数. 若函数 $y=f(x)$ 是严格单调的，即当 $x_2>x_1$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$]，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为单值而且严格单调的函数.

求下列函数的存在域：

【151】 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

解 当 $1+x\neq 0$，即 $x\neq -1$ 时，函数 y 才有意义，所以，它的存在域为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$.

【152】 $y=\sqrt{3x-x^3}$.

解 存在域为满足不等式 $3x-x^3\geqslant 0$ 的实数 x 的集合，解之，得存在域为 $(-\infty,-\sqrt{3}]$，$[0,\sqrt{3}]$.

【153】$^+$ $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 当 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为满足 $-1\leqslant x<1$ 的数 x 的集合.

【154】 (1) $y=\log(x^2-4)$， (2) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

解 (1) 当 $x^2-4>0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为 $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$.

(2) 函数 y 由两个函数组成，其中第一个函数的存在域为 $(-2,+\infty)$，而第二个函数的存在域为 $(2,+\infty)$，于是，函数 y 的存在域为它们的公共部分，即 $(2,+\infty)$.

【155】 $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数. 解之，得 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,1,2,\cdots)$.

存在域为满足不等式 $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 的数的集合.

【156】 $y=\sqrt{\cos x^2}$.

解 当 $\cos x^2\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数，即只要 x 满足

$$0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}\ \text{及}\ (4k-1)\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant(4k+1)\frac{\pi}{2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

解之，得存在域为满足不等式

$$|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\text{及}\quad\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}\quad(k=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合.

【157】 $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin\frac{\pi}{x}>0$ 时，y 值确定，即只要

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots) \quad 及 \quad -(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi.$$

所以，存在域为满足不等式 $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$，$(k=0,1,2,\cdots)$ 及 $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ 的数 x 的集合.

【158】 $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

解 当 $x\geqslant0$ 及 $\sin\pi x\neq0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为满足关系式 $x>0, x\neq n\ (n=1,2,\cdots)$ 的数 x 的集合.

【159】 $y=\arcsin\frac{2x}{1+x}$.

解 当 $\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant1$ 时，y 值确定. 解之，得

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant1, \quad -1\leqslant2-\frac{2}{1+x}\leqslant1, \quad -3\leqslant-\frac{2}{1+x}\leqslant-1, \quad \frac{2}{3}\leqslant1+x\leqslant2.$$

最后得存在域为满足不等式 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$ 的数 x 的集合.

【160】 $y=\arccos(2\sin x)$.

解 当 $|2\sin x|\leqslant1$ 时，y 值确定.

解之，得存在域为满足不等式 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的数 x 的集合.

【161】 $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

解 当 $\cos(\lg x)>0$ 时，y 值确定. 解之，得 $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$.

从而，存在域为满足不等式 $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的数 x 的集合.

【162】$^{+}$ $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$.

解 由于 $\sin^2\pi x\geqslant0$，故仅当 $\sin\pi x=0$ 时 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 才有意义，从而，函数 y 才有意义. 解之，得存在域为

$$x=k \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【163】 $y=\cot\pi x+\arccos(2^x)$.

解 当 $\sin\pi x\neq0$ 时，第一项有意义，即 $x\neq k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $0\leqslant2^x\leqslant1$ 时，第二项有意义，即 $x\leqslant0$. 由此得存在域为满足关系式 $x<0,\quad x\neq-n\quad (n=1,2,\cdots)$ 的数 x 的集合.

【164】 $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

解 当 $-1\leqslant1-x\leqslant1$，即 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，第一个函数有意义；

当 $\lg x>0$，即 $x>1$ 时，第二个函数有意义. 由此得存在域为满足不等式 $1<x\leqslant2$ 的数 x 的集合.

【165】 $y=(2x)!$.

解 当 $2x=n(n=0,1,\cdots)$ 时，y 值确定，所以，存在域为集合：$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots,\frac{n}{2},\cdots$.

求下列函数的存在域和函数值域：

【166】 $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2\geqslant0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant2$ 的数 x 的集合. 又因

$$y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{3}{2},$$

所以，函数值域为满足不等式 $0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$ 的数 y 的集合.

【167】 $y=\lg(1-2\cos x)$.

提示 由 $1-2\cos x>0$ 易得存在域 A. 注意,由 $\max\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=3$, $\inf\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=0$,即可求得函数值域.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时,y 值确定. 解之,得存在域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的数 x 的集合 A. 因为 $\max\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=1-(-2)=3$, $\inf\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=0$,
所以,函数值域为满足不等式 $-\infty<y\leqslant\lg3$ 的数 y 的集合.

【168】 $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$ 时,y 值确定,而对于 $-\infty<x<+\infty$ 来说,始终有 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$,所以,存在域为全体实数所组成的集合,而函数值域为闭区间 $[0,\pi]$.

【169】 $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

解 当 $-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant1$ 时,即当 $\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant10$,或 $1\leqslant x\leqslant100$ 时,y 值确定,且在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上变化,所以,存在域为闭区间 $[1,100]$,函数值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

【170】 $y=(-1)^x$.

解 存在域为数 x:$x=\frac{p}{2q+1}$(p,q 为整数)的集合,而函数值域为:$y=(-1)^p$,即由 $-1,1$ 两数组成的集合.

【171】 在底 $AC=b$ 和高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(图 1.2)内接一个高 $NM=x$ 的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表示为 x 的函数.

作函数 $P=P(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图像.

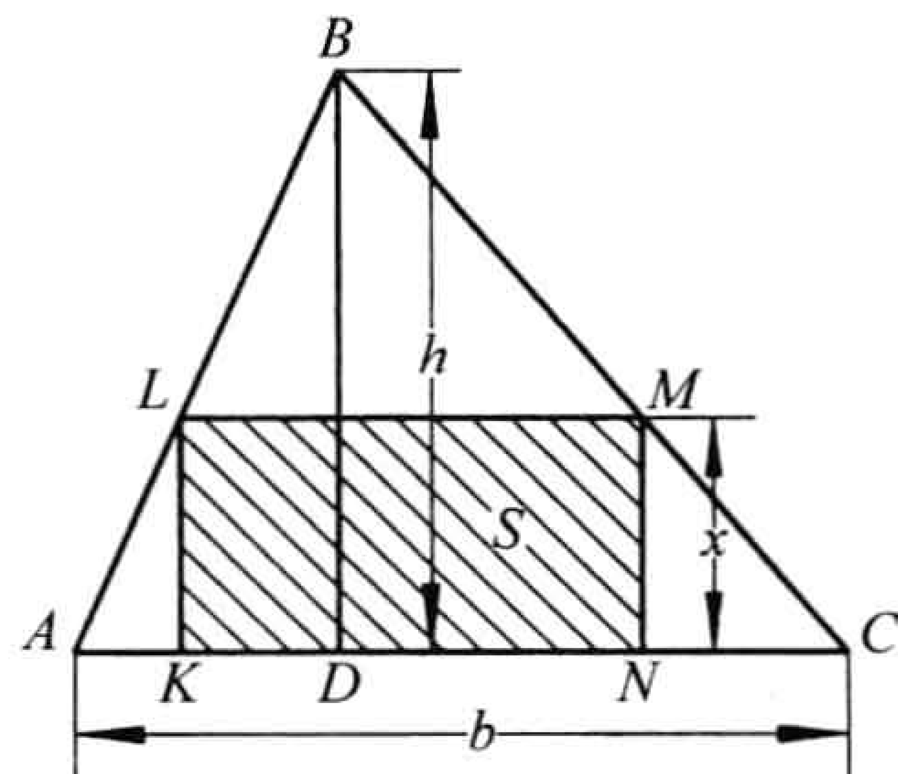


图 1.2

解 因为 $\frac{LM}{b}=\frac{h-x}{h}$,所以,$LM=b\left(1-\frac{x}{h}\right)$.

周长 $P=2LM+2x$,即 $P=P(x)=2\left(1-\frac{b}{h}\right)x+2b$,式中 $0<x<h$.

当 $b<h$ 时,如图 1.3 中直线段 AB 所示(不包含 A,B 两点).

当 $b>h$ 时,如图 1.3 中直线段 AC 所示(不包含 A,C 两点). 其中 $OA=2b$,B 和 C 的坐标为 h 和 $2h$.

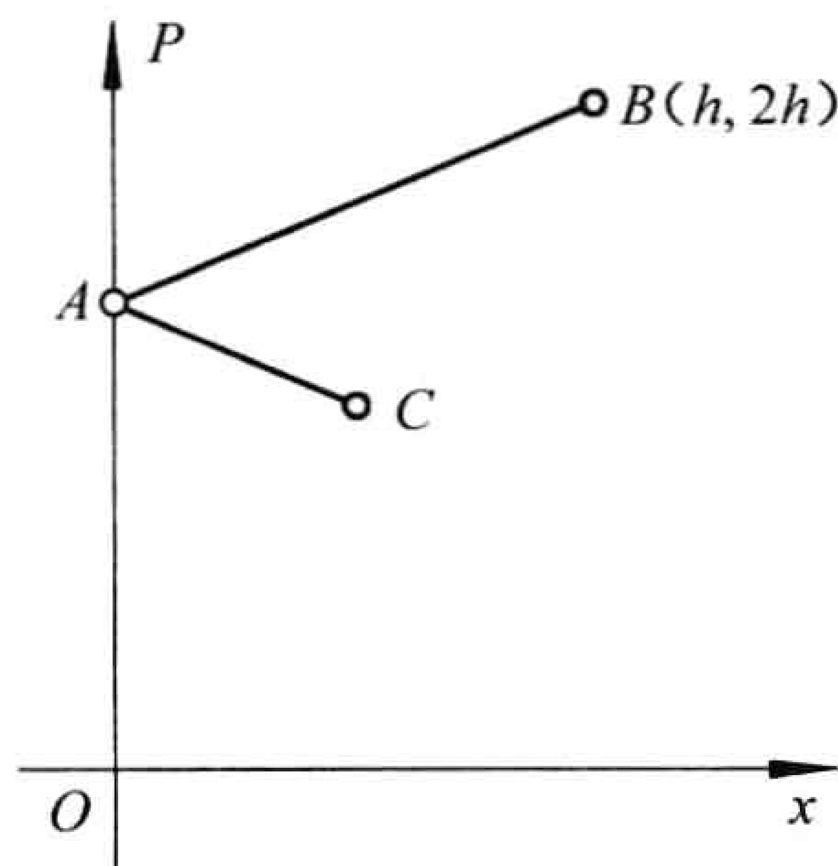


图 1.3

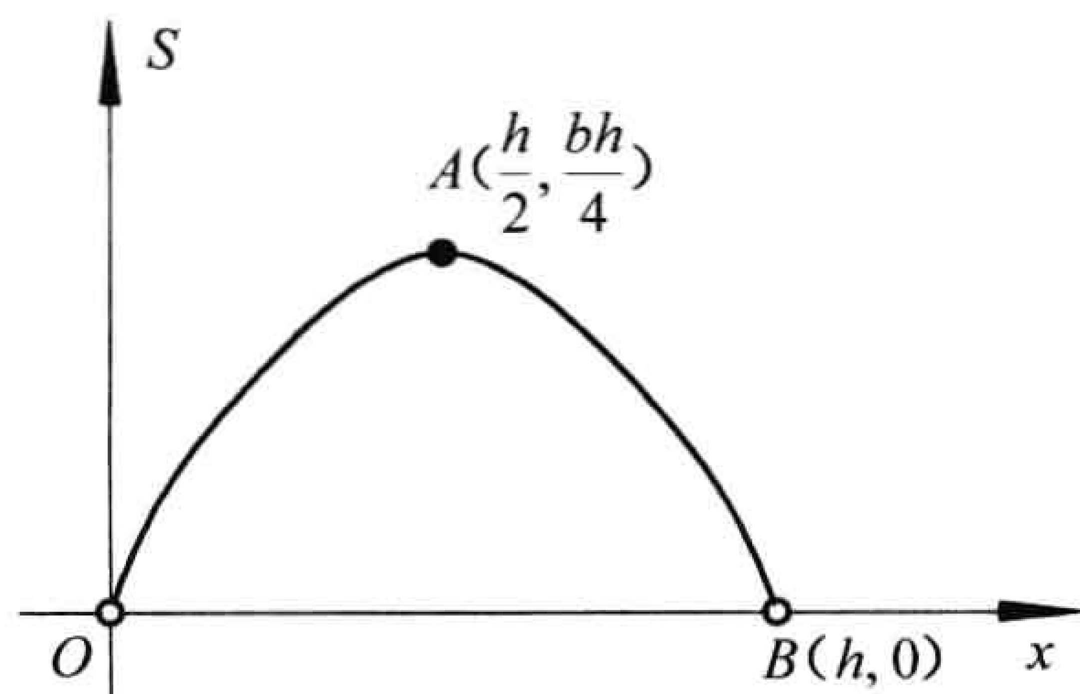


图 1.4

矩形面积 $S=LM\cdot x=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)$ $(0<x<h)$ 如图 1.4 所示,它是一段不包含 O 点及 B 点的抛物线弧 $\overset{\frown}{OAB}$.

【172】 在三角形 ABC 中，边 $AB=6\text{cm}$，$AC=8\text{cm}$，角 $BAC=x$. 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表示为变量 x 的函数. 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图像.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a=\sqrt{6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cos x}=\sqrt{100-96\cos x}\quad (0<x<\pi),$$

如图 1.5 所示(系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧$\overset{\frown}{AB}$).

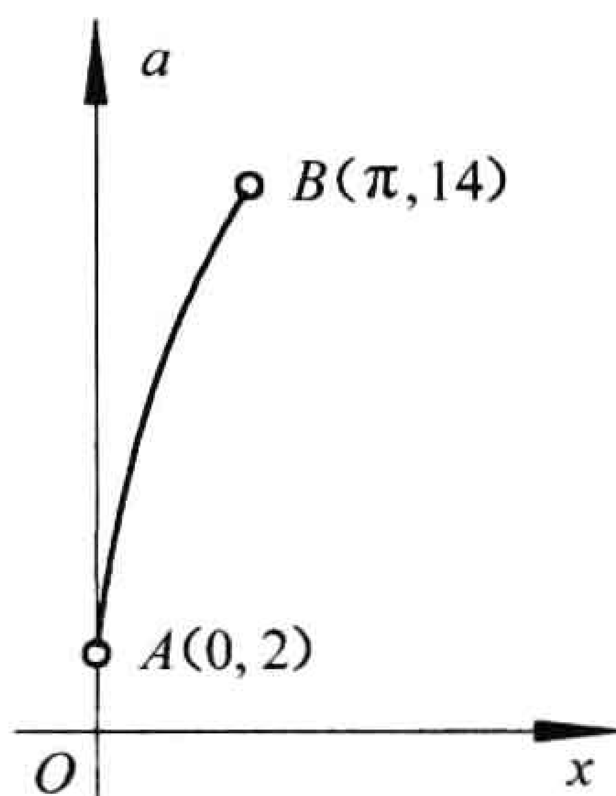


图 1.5

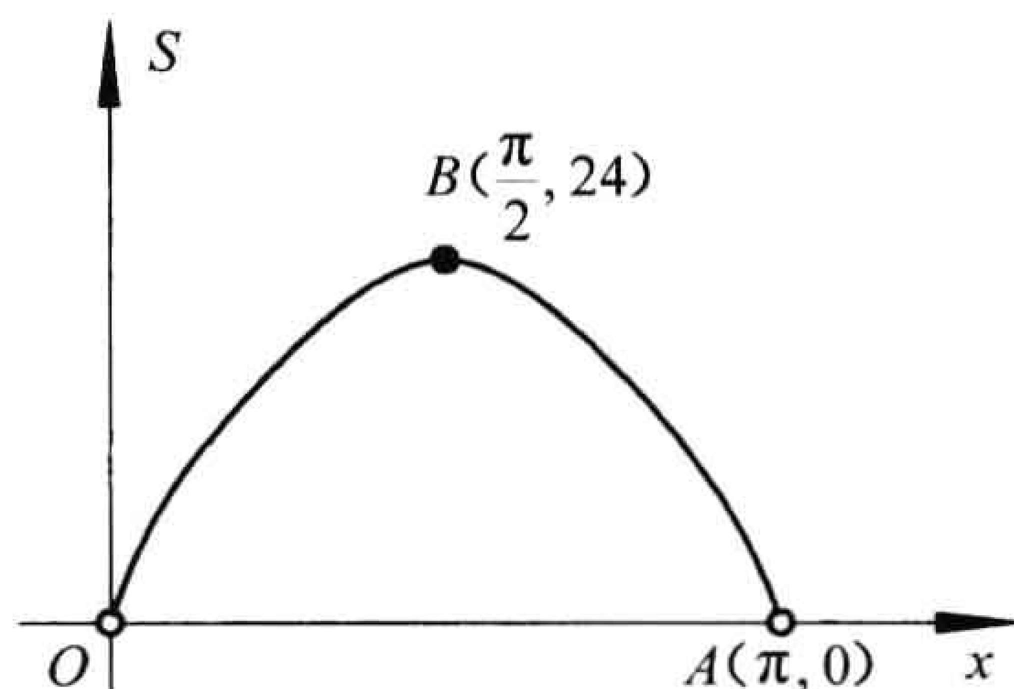


图 1.6

而三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\sin x=24\sin x\quad (0<x<\pi).$$

如图 1.6 所示(两轴单位取得不同，系一不包含 O 点及 A 点的弧$\overset{\frown}{OBA}$).

【173】 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 1.7)，底 $AD=a$，$BC=b\ (a>b)$，高 $HB=h$，引直线 $MN/\!/BH$，MN 与顶点 A 相距 $AM=x$，把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示为变量 x 的函数. 作函数 $S=S(x)$ 的图像.

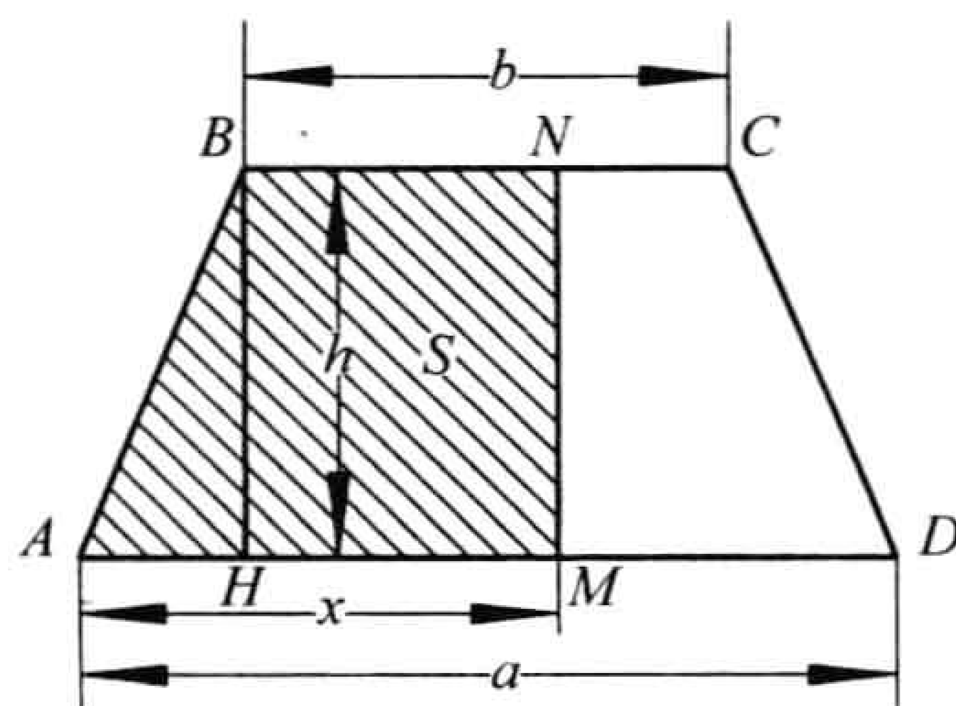


图 1.7

提示 分三种情况求解：

(1)$0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$； (2)$\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$； (3)$\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$.

解 $AH=\frac{1}{2}(a-b)$，分三种情况讨论：

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$时，即 MN 线在$\triangle ABH$ 内，此时$\frac{MN}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}}$，$MN=\frac{2hx}{a-b}$.

于是，$S=\frac{1}{2}MN\cdot x=\frac{hx^2}{a-b}$，如图 1.8 中弧$\overset{\frown}{OA}$(系抛物线段).

(2)当$\frac{a-b}{2}<x<\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$时，面积

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{h}{2}+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right),$$

如图 1.8 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB.

(3)当$\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$ 时，面积

$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{h}{a-b}\cdot(a-x)^2=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],$$

如图 1.8 中抛物线段$\overset{\frown}{BC}$.

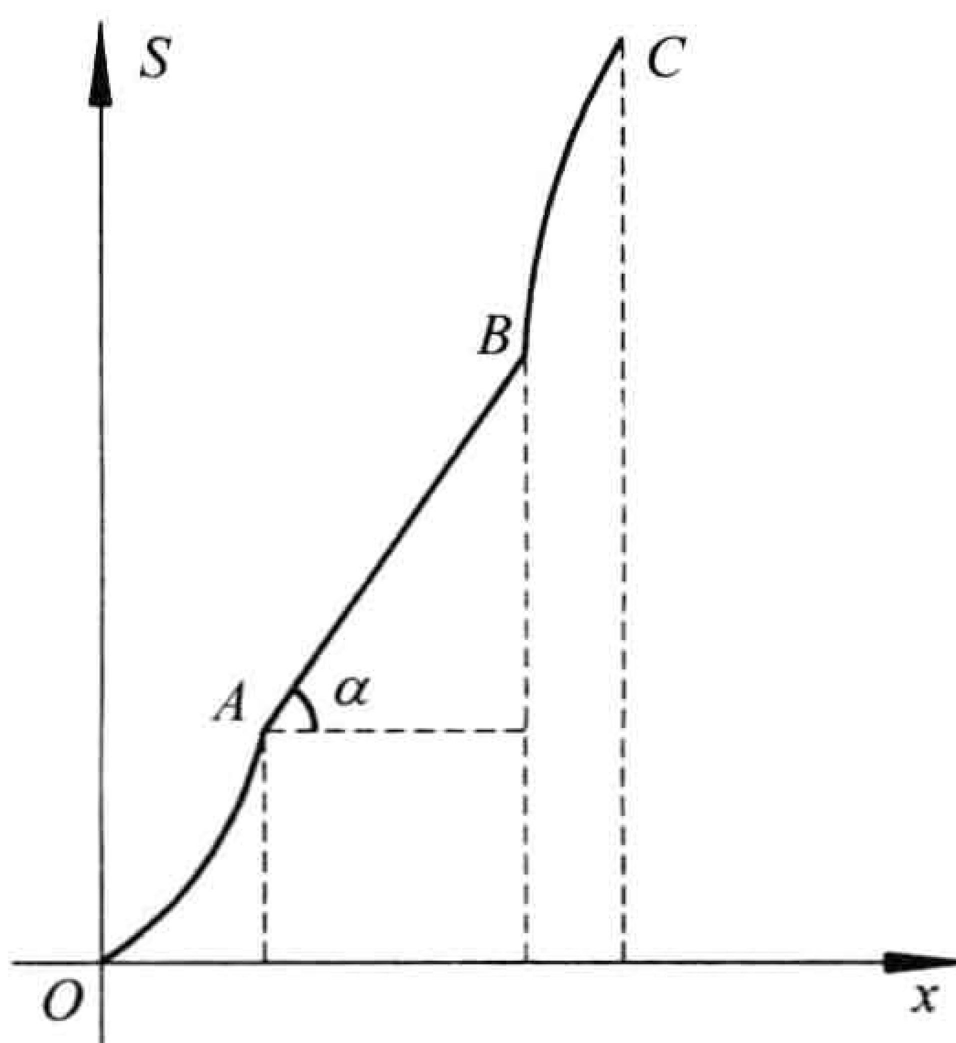


图 1.8

图 1.8 中各点的位置如下：

$$A\left(\frac{a-b}{2},\frac{h(a-b)}{4}\right),\quad B\left(\frac{a+b}{2},\frac{h(a+3b)}{4}\right),\quad C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\tan\alpha=h$.

【174】 有 2g 质量均匀分布在 Ox 轴上的闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，另有两个质量为 1g 的质点分别位于点 $x=2$ 和 $x=3$.

设 $m(x)$ 是区间 $(-\infty,x)$ 内的质量的值，求函数

$$m=m(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的解析表达式. 并作这个函数的图像.

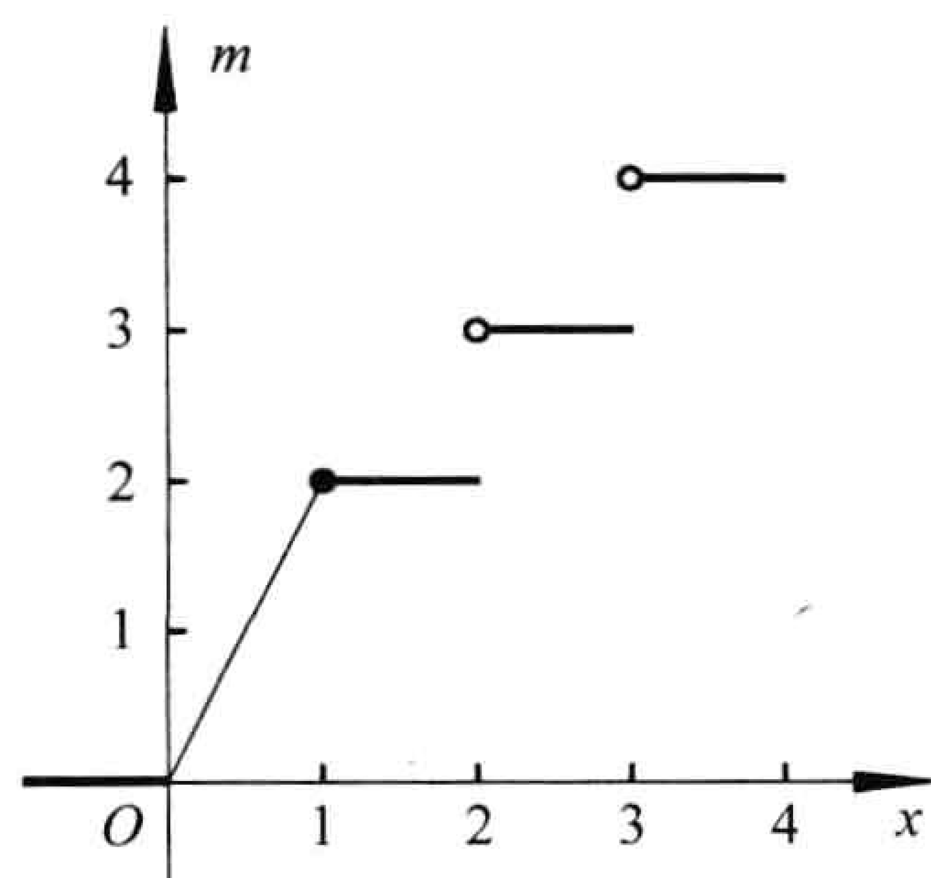


图 1.9

解 当 $-\infty<x\leqslant 0$ 时，$m(x)=0$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，因为 $1:x=2:m(x)$，于是，$m(x)=2x$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$m(x)=2$；

当 $2<x\leqslant 3$ 时，$m(x)=3$；

当 $3<x\leqslant +\infty$ 时，$m(x)=4$.

如图 1.9 所示.

【175】 函数 $y=\operatorname{sgn}x$，被定义为：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

作这个函数的图像. 证明：

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

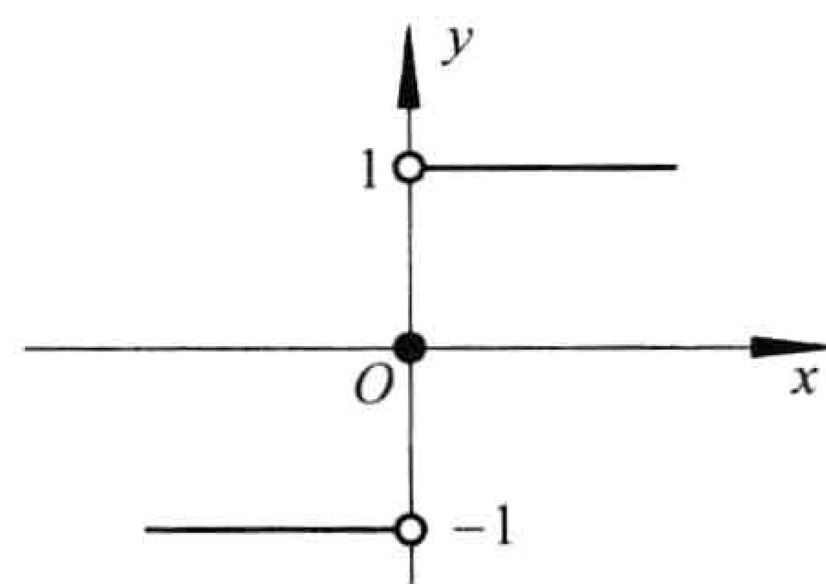


图 1.10

解 函数 $\operatorname{sgn}x$ 的图像如图 1.10 所示.

因为，当 $x<0$ 时，$|x|=-x=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x=0$ 时，$|x|=0=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x>0$ 时，$|x|=x=x\operatorname{sgn}x$.

所以，$|x|=x\operatorname{sgn}x$.

【176】 函数 $y=[x]$（数 x 的整数部分）用下法定义：

若 $x=n+r$，式中 n 为整数且 $0\leqslant r<1$，则 $[x]=n$.

作这个函数的图像.

解 当 $x\in[n,n+1)$ 时（n 为整数）$y=n$，如图 1.11 所示.

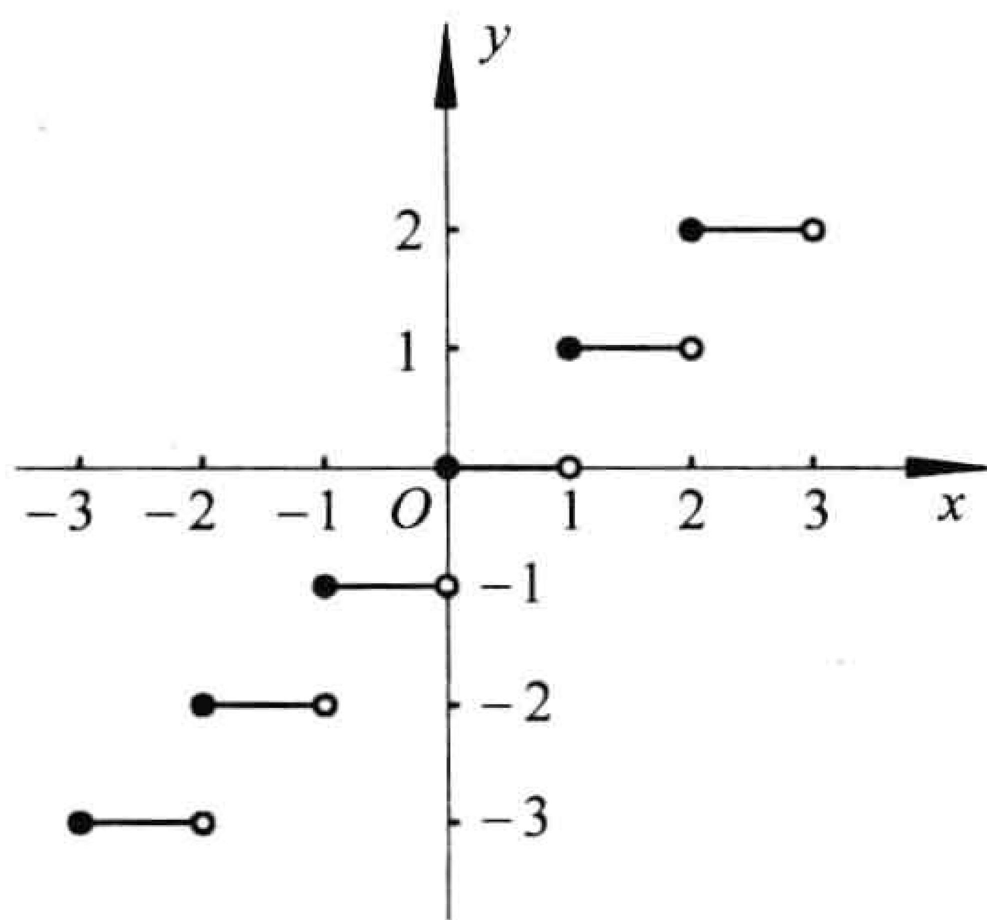


图 1.11

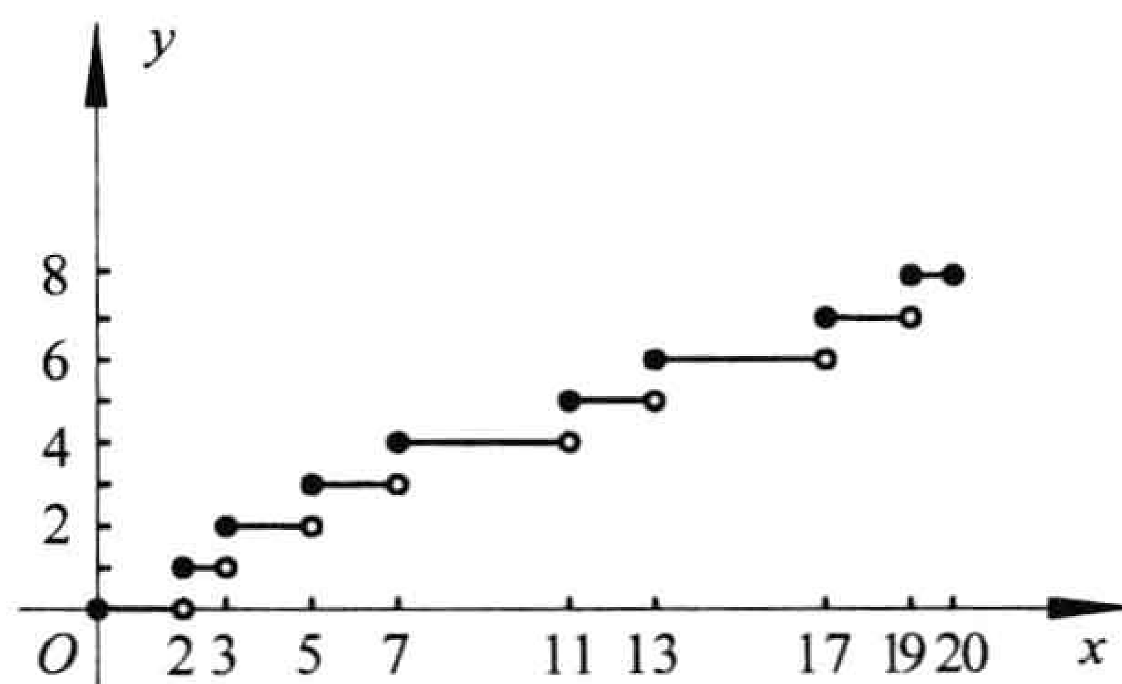


图 1.12

【177】 设：$y=\pi(x)\quad(x\geqslant 0)$，表示不超过数 x 的素数的数目，作这个函数在 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时的图像.

解 按题设可知：

当 $0\leqslant x<2$ 时，$\pi(x)=0$；　当 $2\leqslant x<3$ 时，$\pi(x)=1$；　当 $3\leqslant x<5$ 时，$\pi(x)=2$；

当 $5\leqslant x<7$ 时，$\pi(x)=3$；　当 $7\leqslant x<11$ 时，$\pi(x)=4$；　当 $11\leqslant x<13$ 时，$\pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\pi(x)=6$；　当 $17\leqslant x<19$ 时，$\pi(x)=7$；　当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\pi(x)=8$.

如图 1.12 所示.

下列函数 $y=f(x)$ 把集合 E_x 映射成怎样的集合 E_y?

【178】 $y=x^2, E_x=\{1\leqslant x\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{1\leqslant y\leqslant 4\}$.

【179】 $y=\lg x$, $E_x=\{10<x<1000\}$.

解 $E_y=\{1<y<3\}$.

【180】 $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}x$, $E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

解 $E_y=\{0<y<1\}$.

【181】 $y=\cot\frac{\pi x}{4}$, $E_x=\{0<|x|\leqslant 1\}$.

解 $E_y=\{1<|y|<+\infty\}$.

【182】 $y=|x|, E_x=\{1\leqslant|x|\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{1\leqslant y\leqslant 2\}$.

设变量 x 遍历区间 $0<x<1$,试确定变量 y 所遍历的集合:

【183】 $y=a+(b-a)x$.

解 变量 x 从 0 变至 1 时,y 从 a 变至 b.

于是,变量 y 的变化区间为 $a<y<b$(当 $a<b$)或 $b<y<a$(当 $b<a$).

【184】 $y=\frac{1}{1-x}$.

解 当 x 从 0 变至 1 时,y 从 1 变至正无穷大.于是,y 的变化区间为 $1<y<+\infty$.

【185】 $y=\frac{x}{2x-1}$.

解 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$.

当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$,y 从 0 变至负无穷大;当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时,y 从正无穷大变至 1.于是,y 的变化区间为 $-\infty<y<0$, $1<y<+\infty$.

【186】 $y=\sqrt{x-x^2}$.

解 $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$y=\frac{1}{2}$(最大值);由于 x 趋于 0 时,y 趋于 0,而 $y>0$,从而 $y=0$ 是变量 y 的下确界.于是,y 的变化区间为 $0<y\leqslant\frac{1}{2}$.

【187】 $y=\cot\pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时,变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$.于是,变量 y 的变化区间为 $-\infty<y<+\infty$.

【188】 $y=x+[2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时,y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$;当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时,y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2.于是,y 的变化区间为 $0<y<\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\leqslant y<2$.

【189】 设 $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$,求 $f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

解 因为 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$,所以,$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=24$.

【190】 设 $f(x)=\lg x^2$,求 $f(-1),f(-0.001),f(100)$.

解 $f(-1)=\lg 1=0$; $f(-0.001)=\lg 0.000001=-6$; $f(100)=\lg 10000=4$.

【191】 设 $f(x)=1+[x]$,求 $f(0.9),f(0.99),f(0.999),f(1)$.

解 $f(0.9)=f(0.99)=f(0.999)=1,\quad f(1)=2.$

【192】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2)$.

解 $f(-2)=1-2=-1,\quad f(-1)=1-1=0,\quad f(0)=1+0=1,\quad f(1)=2^1=2,\quad f(2)=2^2=4.$

【193】 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(0),f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\dfrac{1}{x}\right),\dfrac{1}{f(x)}$.

解 $f(0)=1,$ $\qquad f(-x)=\dfrac{1+x}{1-x},$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2},\qquad f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},\qquad \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

【194】 设(1) $f(x)=x-x^3$; (2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$; (3) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

求满足以下各式的 x 值:(ⅰ) $f(x)=0$; (ⅱ) $f(x)>0$; (ⅲ) $f(x)<0$.

解 (1)(ⅰ) $x-x^3=0$,所以,$x=0,1$ 及 -1.

(ⅱ) $x-x^3>0$,即 $x(1-x)(1+x)>0$,所以,$-\infty<x<-1$ 和 $0<x<1$.

(ⅲ) $x(1-x)(1+x)<0$,所以,$-1<x<0$ 和 $1<x<+\infty$.

(2)(ⅰ) $\sin\dfrac{\pi}{x}=0$,则 $\dfrac{\pi}{x}=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,所以,$x=\dfrac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

(ⅱ) $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$,则 $2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 和 $-(2k+2)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$,所以,

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\ \text{和}\ -\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

(ⅲ) $\sin\dfrac{\pi}{x}<0$,则 $(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+2)\pi$ 和 $-(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-2k\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$,所以,

$$\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}\quad\text{和}\quad -\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

(3)(ⅰ) $(x+|x|)(1-x)=0$,则 $x\leqslant0$ 和 $x=1$.

(ⅱ)因为 $x+|x|\geqslant0$,所以,$1-x>0$,即 $x<1$.而由 $f(x)>0$,得 $x+|x|>0$,即 $x>0$.

总之,当 $0<x<1$ 时,$(x+|x|)(1-x)>0$.

(ⅲ) $(x+|x|)(1-x)<0$.首先,$x>0$,否则 $x+|x|=0$.其次,应有 $1-x<0$,所以,$x>1$,此即所求之解.

【195】 设(1) $f(x)=ax+b$;(2) $f(x)=x^2$;(3) $f(x)=a^x$.求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 (1) $\varphi(x)=\dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=a$;

(2) $\varphi(x)=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$;

(3) $\varphi(x)=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\dfrac{a^h-1}{h}$.

【196】 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,证明:$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv0$.

证 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$=a(x+3)^2+b(x+3)+c-3[a(x+2)^2+b(x+2)+c]+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-(ax^2+bx+c)$

$=ax^2+6ax+9a+bx+3b+c-3ax^2-12ax-12a-3bx-6b-3c+3ax^2+6ax+3a+3bx+3b+3c$

$\quad -ax^2-bx-c$

$=0,$

于是，$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

【197】 若 $f(0)=-2, f(3)=5$,求线性函数:$f(x)=ax+b$. $f(1)$及 $f(2)$等于什么(线性插值法)?

解 因为 $f(0)=b=-2$ 及 $f(3)=3a+b=5$,所以,$a=\frac{7}{3}$, $b=-2$.

于是,所求的线性函数为 $f(x)=\frac{7}{3}x-2$,且 $f(1)=\frac{1}{3}$, $f(2)=\frac{8}{3}$.

【198】 若 $f(-2)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=5$.求二次有理函数:$f(x)=ax^2+bx+c$. $f(-1)$及 $f(0.5)$等于什么(二次插值法)?

解 因为 $f(-2)=4a-2b+c=0$, $f(0)=c=1$, $f(1)=a+b+c=5$,所以,$a=\frac{7}{6}$, $b=\frac{17}{6}$, $c=1$.

于是,所求的二次有理函数为 $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$,且 $f(-1)=-\frac{2}{3}$, $f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}$.

【199】 设 $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$.求三次有理函数:$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

解 因为 $f(-1)=-a+b-c+d=0, f(0)=d=2, f(1)=a+b+c+d=-3, f(2)=8a+4b+2c+d=5$,所以,$a=\frac{10}{3}$, $b=-\frac{7}{2}$, $c=-\frac{29}{6}$, $d=2$.

于是,所求的三次有理函数为 $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$.

【200】 设 $f(0)=15$, $f(2)=30$, $f(4)=90$,求形为 $f(x)=a+bc^x$ 的函数.

解 因为 $f(0)=a+b=15, f(2)=a+bc^2=30, f(4)=a+bc^4=90$,所以,$a=10$, $b=5$, $c=2$(-2 不适合).

于是,所求的函数为 $f(x)=10+5\cdot 2^x$.

【201】 证明:对于线性函数 $f(x)=ax+b$,若自变量的值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$组成等差数列,则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$也组成等差数列.

提示 利用等差数列的定义.

证 设数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$为 $x_1, x_1+d, x_1+2d, x_1+3d, \cdots, x_1+(n-1)d, \cdots$其中 d 为公差.

于是,

$$y_n-y_{n-1}=(ax_n+b)-(ax_{n-1}+b)=\{a[x_1+(n-1)d]+b\}-\{a[x_1+(n-2)d]+b\}=ad,$$

由于 ad 为一常数,所以,数列 $y_n=f(x_n)$也组成等差数列.

【202】 证明:对于指数函数 $f(x)=a^x(a>0)$,若自变量的值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$组成等差数列,则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$组成等比数列.

证 因为 $x_n-x_{n-1}=d$,所以,

$$y_n:y_{n-1}=a^{x_n}:a^{x_{n-1}}=a^{x_n-x_{n-1}}=a^d,$$

由于 a^d 为一常数,于是,函数值 $y_n=f(x_n)$组成等比数列.

【203】 设当 $0<u<1$ 时函数 $f(u)$有定义,求下列函数的定义域:

(1)$f(\sin x)^+$; (2)$f(\ln x)$; (3)$^+ f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

解 (1)因为 $0<\sin x<1$,所以,

$$2k\pi<x<\pi+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \quad 且 \quad x\neq\frac{4k+1}{2}\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

(2)因为 $0<\ln x<1$,所以,$1<x<\mathrm{e}$;

(3)因为 $0<\frac{[x]}{x}<1$,所以,$x>1$ 且 $x\neq k$ $(k=2,3,4,\cdots)$.

【204】 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0)$.证明:$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

证 $f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$

$=\frac{1}{2}(a^x\cdot a^y+a^{-x}\cdot a^{-y})+\frac{1}{2}(a^x\cdot a^{-y}+a^{-x}\cdot a^y)=\frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y})+\frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y}+a^y)$

$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})=2f(x)f(y)$,

于是，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

【205】 设 $f(x)+f(y)=f(z)$. 求出 z，若：

(1) $f(x)=ax$； (2) $f(x)=\frac{1}{x}$； (3) $f(x)=\arctan x$ ($|x|<1$)； (4) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

提示 (3)由 $\arctan x+\arctan y=\arctan z$ 可得 $\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan z$.

解 (1) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$，$f(z)=az$，由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y$.

(2)由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ 得 $z=\frac{xy}{x+y}$.

(3)由 $\arctan x+\arctan y=\arctan z$ 得 $\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan z$ 所以，$z=\frac{x+y}{1-xy}$.

(4)由 $\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\frac{1+z}{1-z}$ 得 $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{1+z}{1-z}$，所以，$z=\frac{x+y}{1+xy}$.

求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$，设

【206】 $\varphi(x)=x^2$ 及 $\psi(x)=2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4$； $\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$； $\psi[\psi(x)]=2^{(2^x)}$； $\psi[\varphi(x)]=2^{(x^2)}$.

【207】 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}x)=\operatorname{sgn}x$； $\psi[\psi(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$ $(x\neq 0)$；

$\varphi[\psi(x)]=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x$ $(x\neq 0)$； $\psi[\varphi(x)]=\frac{1}{\operatorname{sgn}x}=\operatorname{sgn}x$ $(x\neq 0)$.

【208】 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$；$\psi[\psi(x)]=0$ (因为 $-x^2\leqslant 0$)； $\varphi[\psi(x)]=0$； $\psi[\varphi(x)]=\psi(x)$.

【209】 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$； $f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x$.

【210】 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$. 若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

提示 利由数学归纳法易得 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ $(n\in\mathrm{N})$.

解 当 $n=2$ 时，$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设对于 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$f_{k+1}(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而，由数学归纳法知，对于任何正整数 n，有 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

【211】 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$,于是,$f(x)=x^2-5x+6$.

【212】 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $(|x|\geqslant 2)$,求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,于是 $f(x)=x^2-2$.

【213】 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$,求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$,于是,$f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

证明:下列各函数在所给区间内是单调增函数.

【214】 $f(x)=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

证 当 $x_2>x_1\geqslant 0$ 时(其中 x_1,x_2 为任意两点,下同),

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0,$$

于是,$f(x)=x^2$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内是单调增函数.

【215】 $f(x)=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,因为

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2} \quad 及 \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以,$\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$ 及 $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$.

又因

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以,$f(x)=\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

【216】 $f(x)=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\tan x_2-\tan x_1=\dfrac{\sin x_2}{\cos x_2}-\dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}=\dfrac{\sin x_2\cos x_1-\cos x_2\sin x_1}{\cos x_1\cos x_2}=\dfrac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cdot\cos x_2}$,

当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos x_1>0$, $\cos x_2>0$ 及 $\sin(x_2-x_1)>0$,从而可知

$$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

所以,$f(x)=\tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

【217】 $f(x)=2x+\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

提示 注意不等式 $|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|$,即易获证.

证 $f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1$,

因为

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|,$$

所以,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$-(x_2-x_1)\leqslant\sin x_2-\sin x_1\leqslant x_2-x_1.$$

从而,

$$2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1>2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=x_2-x_1>0,$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，于是，$f(x)=2x+\sin x$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内是单调增函数.

证明：下列各函数在所给区间内是单调减函数.

【218】 $f(x)=x^2 \quad (-\infty<x\leqslant 0)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0\ (x_1<x_2<0)$，于是，$f(x)=x^2$ 在 $-\infty<x\leqslant 0$ 内是单调减函数.

【219】 $f(x)=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}$，

当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时，

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \quad 及 \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

于是，$\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$，$\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，从而，

$$f(x_2)-f(x_1)<0,$$

即 $f(x)=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 内是单调减函数.

【220】 $f(x)=\cot x\ (0<x<\pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{\cos x_2}{\sin x_2}-\dfrac{\cos x_1}{\sin x_1}=\dfrac{\cos x_2\sin x_1-\cos x_1\sin x_2}{\sin x_1\sin x_2}=\dfrac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_1\cdot\sin x_2}<0$

（当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时），

于是，$f(x)=\cot x$ 在 $0<x<\pi$ 内是单调减函数.

【221】 研究下列函数的单调性：

(1) $f(x)=ax+b$； (2) $f(x)=ax^2+bx+c$； (3) $f(x)=x^3$；

(4) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$； (5) $f(x)=a^x \quad (a>0)$.

解题思路 (1) 应就 $a>0$ 及 $a<0$ 分别加以讨论.

(2) 注意 $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，并就 $a>0$ 及 $a<0$ 分别加以讨论.

(4) 若 $c=0$，仿(1). 若 $c\neq 0$，不妨设 $c>0$，注意 $f(x)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\dfrac{d}{c}a}{cx+d}$，并就 $ad-bc>0$ 及 $ad-bc<0$ 分别加以讨论.

(5) 就 $0<a<1$ 及 $a>1$ 分别加以讨论.

解 (1) 对于 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$. 当 $a>0$ 时，它大于零；当 $a<0$ 时，它小于零. 所以，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 是增函数；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 是减函数.

(2) $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(ⅰ) 当 $a>0$ 时，图像呈凹形，顶点在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$. 于是，在 $-\infty<x<-\dfrac{b}{2a}$ 内，函数单调下降，在 $-\dfrac{b}{2a}<x<+\infty$，函数单调上升.

(ⅱ) 当 $a<0$ 时，图像呈凸状. 于是，在 $-\infty<x<-\dfrac{b}{2a}$ 内函数单调增加，而在 $-\dfrac{b}{2a}<x<+\infty$ 内函数单调减小.

(3) $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)>0\ (x_2>x_1)$. 于是，$f(x)=x^3$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内单调增加.

(4) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-a\frac{d}{c}}{cx+d}$,其中 $c\neq0$,若 $c=0$,则同(1)一样讨论.下面不妨就 $c>0$ 讨论其增减性.

(i)当 $b>a\frac{d}{c}$ 时,若 x 值单调增加,则 $f(x)$ 值减小.所以,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ 内减小.

(ii)当 $b<\frac{ad}{c}$ 时,若 x 值单调增加,则 $f(x)$ 值也增加.所以,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ 内增加.

(5) $f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}$,若 $x_2>x_1$,则

当 $0<a<1$ 时,$f(x_2)-f(x_1)<0$,此时 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内减小.

当 $a>1$ 时,$f(x_2)-f(x_1)>0$,此时,$f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内增加.

【222】 不等式能否逐项取对数?

提示 应对底大于1及底介于0与1之间分别讨论.

解 不一定可以,当底大于1时才可以.因为对于对数函数当底大于1时为单调增函数.若底介于0与1之间,则为单调减函数,所以,此时就不能逐项取对数.

【223】 设 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数.证明:若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x), \tag{1}$$

则

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]. \tag{2}$$

提示 利用函数单调性的定义.

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点,则

$$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0).$$

由(1)以及函数 $f(x)$ 的单调增加性知

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)],\quad \varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)];$$

从而,$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$.同理,可证 $f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$,由 x_0 的任意性,于是,(2)式得证.

求反函数 $x=\varphi(y)$ 和它的存在域,若:

【224】 $y=2x+3$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 $x=\frac{y-3}{2}$, $-\infty<y<+\infty$.

【225】 $y=x^2$.

(1)$(-\infty<x\leqslant0)$; (2)$(0\leqslant x<+\infty)$.

解 (1)$x=-\sqrt{y}$, $0\leqslant y<+\infty$; (2)$x=\sqrt{y}$, $0\leqslant y<+\infty$.

【226】 $y=\frac{1-x}{1+x}$ $(x\neq-1)$.

解 由于 $y+xy=1-x$,解出 x 得反函数 $x=\frac{1-y}{1+y}$, $y\neq-1$.

【227】 $y=\sqrt{1-x^2}$.

(1)$(-1\leqslant x\leqslant0)$; (2)$(0\leqslant x\leqslant1)$.

解 (1)$x=-\sqrt{1-y^2}$, $0\leqslant y\leqslant1$; (2)$x=\sqrt{1-y^2}$, $0\leqslant y\leqslant1$.

【228】 $y=\mathrm{sh}x$,式中 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $2y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$,即

$$(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x-1=0,$$

解出 e^x 后两端再取对数,即得

$$x=\mathrm{arsh}y=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),\quad(-\infty<y<+\infty).$$

【229】 $y=\text{th}x$,式中 $\text{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$,即 $e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$,两端再取对数,并注意到$\dfrac{1+y}{1-y}>0$ 即$-1<y<1$,于是,

$$x=\text{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad -1<y<1.$$

【230】 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty.\end{cases}$

解 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$

【231】 设函数 $f(x)$定义于对称区间$(-l,l)$中,若 $f(-x)\equiv f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**,若 $f(-x)\equiv -f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

确定下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数:

(1) $f(x)=3x-x^3$; (2) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; (3) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$;

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; (5) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $f(-x)=-3x+x^3\equiv -f(x)$,故为奇函数.

(2) $f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\equiv f(x)$,故为偶函数.

(3) $f(-x)=a^{-x}+a^x\equiv f(x)$,故为偶函数.

(4) $f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}\equiv -f(x)$,故为奇函数.

(5) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})\equiv -f(x)$,故为奇函数.

【232】 证明:定义于对称区间$(-l,l)$内的任何函数 $f(x)$可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证明思路 注意,当$-l<x<l$ 时,有 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,命题即易获证.

证 因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

而 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数,于是,本题得证.

【233】 若存在数 $T>0$(函数的周期——在广义的意义上)使定义于集合 E 的函数 $f(x)$满足等式

$$f(x\pm T)=f(x)\quad (x\in E),$$

则函数 $f(x)$称为**周期函数**.

说明下列函数中哪些是周期函数,并求它们的最小周期:

(1) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$; (2) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$;

(3) $f(x)=2\tan\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{3}$; (4) $f(x)=\sin^2 x$;

(5) $f(x)=\sin x^2$; (6) $f(x)=\sqrt{\tan x}$;

(7) $f(x)=\tan\sqrt{x}$; (8) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

提示 (5)用反证法.设 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$.

解 对于(1),由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故为周期函数，最小周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}$ ($\lambda>0$). 同理可证：(2)、(3)、(4)和(6)也是周期函数，最小周期分别为 2π、6π、π 和 π. 对于(5)，若周期为 a，即 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$. 令 $x=0$ 即得 $a=\pm\sqrt{m\pi}$ (m 为某正整数)，代入，又令 $x=\sqrt{2m\pi}$，易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi)=0$. 但 $2\sqrt{2}m$ 显然不是整数，得到矛盾. 于是，$\sin x^2$ 不是周期函数，同理，(7)和(8)也不是周期函数.

【234】 证明：对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设 l 为任一有理数，则当 x 为有理数时，$x+l$ 也为有理数. 若 x 为无理数，则 $x+l$ 也为无理数，所以，

$$\chi(x+l)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

即 $\chi(x+l)=\chi(x)$，l 为周期.

【235】 证明：定义于共同的集合且周期是可公度的两个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证明思路 *设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数，T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数，即 $T_1=k_1T$，$T_2=k_2T$，其中 k_1，k_2 为正整数. 于是，*

$$f_1(x+k_2T_1)=f_1(x),\quad f_2(x+k_1T_2)=f_2(x).$$

易证 k_1k_2T 为 $f_1(x)+f_2(x)$ 及 $f_1(x)\,f_2(x)$ 的周期.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数，T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数，即 $T_1=Tk_1$，$T_2=Tk_2$，其中 k_1，k_2 为正整数. 于是，

$$f_1(x+k_2T_1)=f_1(x),\quad f_2(x+k_1T_2)=f_2(x).$$

设

$$F_1(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad F_2(x)=f_1(x)f_2(x),$$

可以证明：k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上，我们有

$$F_1(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)+f_2(x+k_1k_2T)=f_1(x)+f_2(x)=F_1(x).$$

$$F_2(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)f_2(x+k_1k_2T)=f_1(x)f_2(x)=F_2(x).$$

从而，本题得证.

【236】 证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 满足等式 $f(x+T)=kf(x)$，式中 k 和 T 为正的常数，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 a 为常数，而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数.

提示 *利用周期函数的定义.*

证 由假定 $k>0$，$T>0$，令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$，则 $a^T=k$. 于是有 $f(x+T)=a^Tf(x)$.

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下：$\varphi(x)=a^{-x}f(x)$. 易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上，

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)=a^{-x}f(x)=\varphi(x).$$

于是，$f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§4. 函数的图像表示法

1° 要作函数 $y=f(x)$ 的图像可按以下方式进行：(1)确定函数的存在域 $X=\{x\}$；(2)从 X 中选出充分密集的自变量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与相应函数值组成对应数值表

$$y_i=f(x_i)\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

(3)在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 并用线把它们连接起来，连线时应考虑中间各点的位置对曲线形状的影响.

2° 为了得到函数的正确图像，应当研究这个函数的一般性质.

首先必须:(1)解方程 $f(x)=0$,求出函数图像与 Ox 轴的交点(函数的零点);(2)确定函数为正或为负时自变量的变化域;(3)若有可能,说明函数单调(增或减)区间;(4)研究当自变量无限趋于函数存在域边界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质,如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质,不用作大量的计算工作,立即可以画出许多函数的草图,其他的图像有时就是这些最简单图像的组合(和或乘积等等).

【237】 作出线性齐次函数 $y=ax$ 当 $a=0,\frac{1}{2},1,2,-1$ 时的图像.

解 如图 1.13 所示.

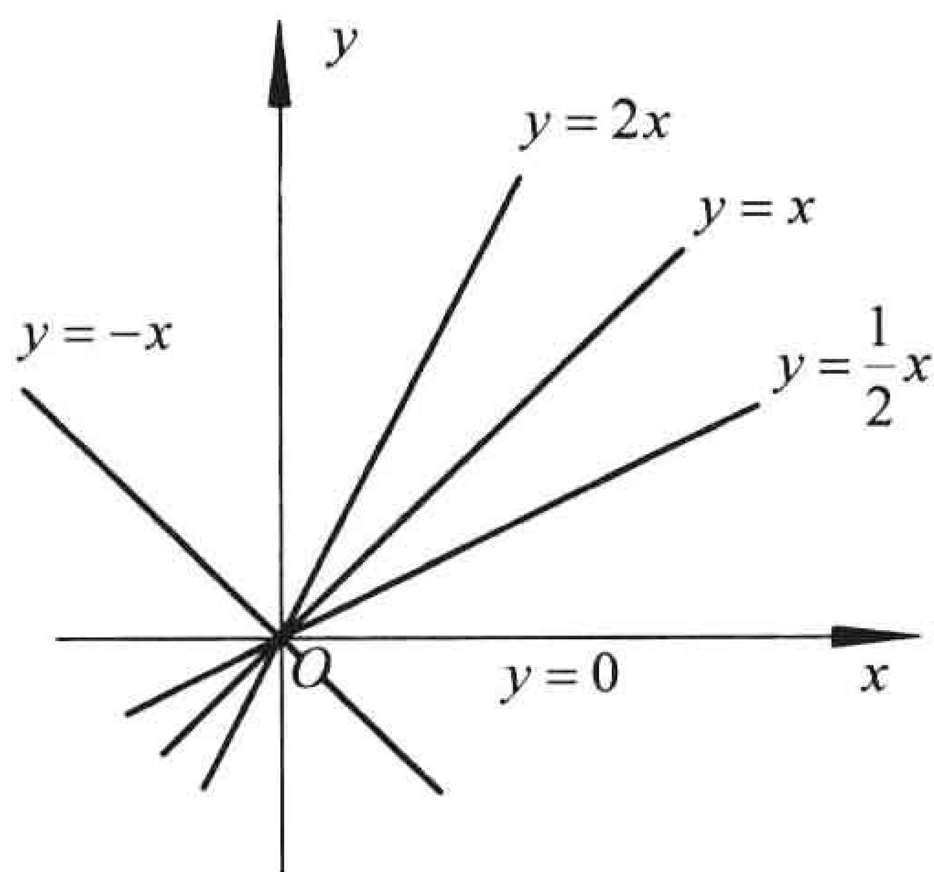


图 1.13

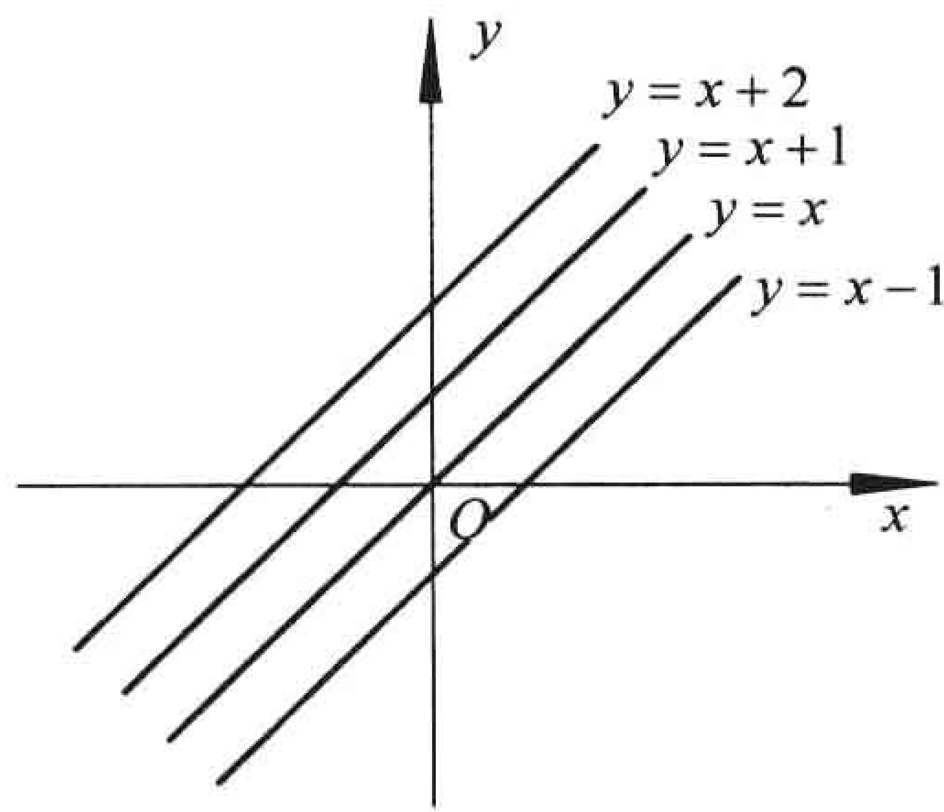


图 1.14

【238】 作出线性函数 $y=x+b$ 当 $b=0,1,2,-1$ 时的图像.

解 如图 1.14 所示.

【239】 作出线性函数的图像:

(1)$y=2x+3$; (2)$y=2-0.1x$; (3)$y=-\frac{x}{2}-1$.

解 如图 1.15 所示.

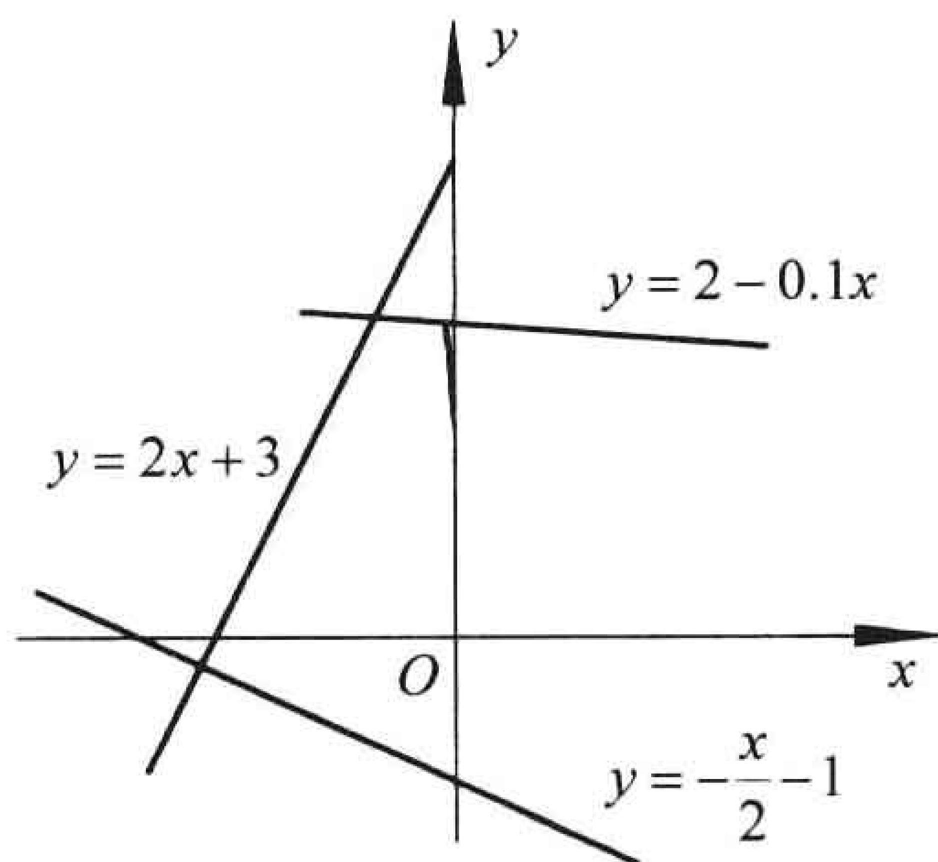


图 1.15

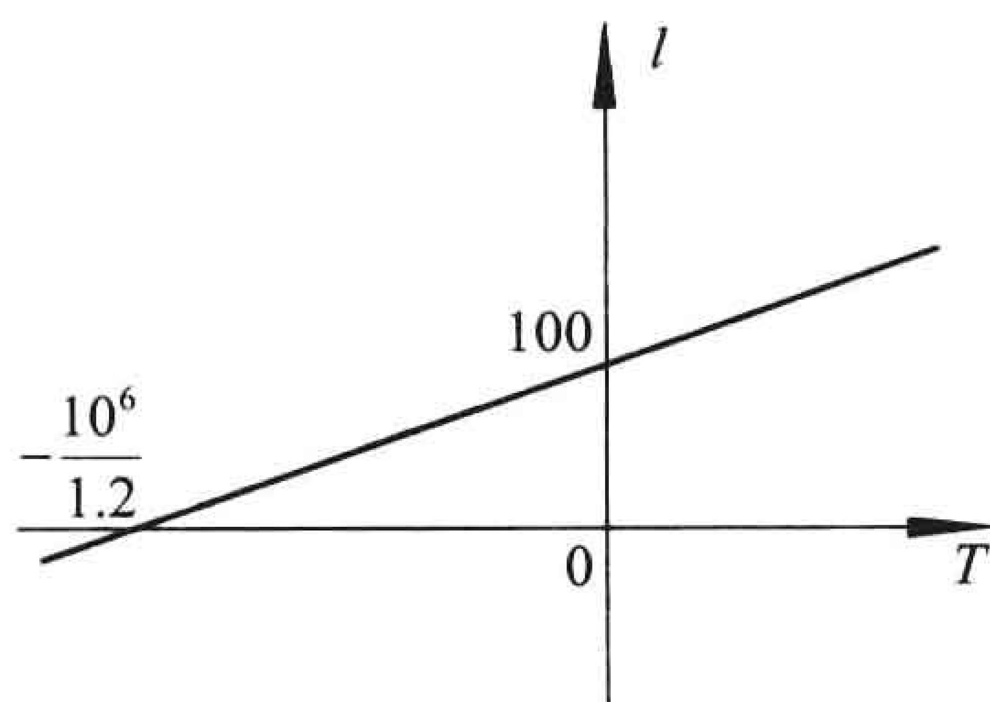


图 1.16

【240】 铁的线性膨胀系数 $\alpha=1.2\times10^{-6}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l=f(T) \quad (-40°\leqslant T\leqslant100°)$$

的图像,其中 T 表温度(以度计),l 表当温度为 T 时铁棒的长.已知当 $T=0°$时,$l=100\text{cm}$.

解 铁棒的长与温度的关系为 $l=l_0(1+\alpha T)$.

当 $T=0$ 时,$l=100$,代入上式得 $l_0=100$.于是,$l=100(1+1.2\times10^{-6}T)$,如图 1.16所示(两轴单位不同).

【241】 二质点沿数轴运动,第一质点在初始时刻 $t=0$ 时位于原点左方 20m 处,其速度为 $v_1=10\text{m/s}$;第二质点在 $t=0$ 时位于原点 O 右方 30m 处,其速度为 $v_2=-20\text{m/s}$. 作出此二点运动方程的图像并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动方程的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s=10t-20, \quad s=-20t+30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程，得

$$t=1\,\frac{2}{3}\,\mathrm{s},\quad s=-3\,\frac{1}{3}\,\mathrm{m},$$

即在运动开始后 $1\,\frac{2}{3}$ s，在 Ot 轴之下方 $3\,\frac{1}{3}$ m 处相遇，如图中点 P 所示.

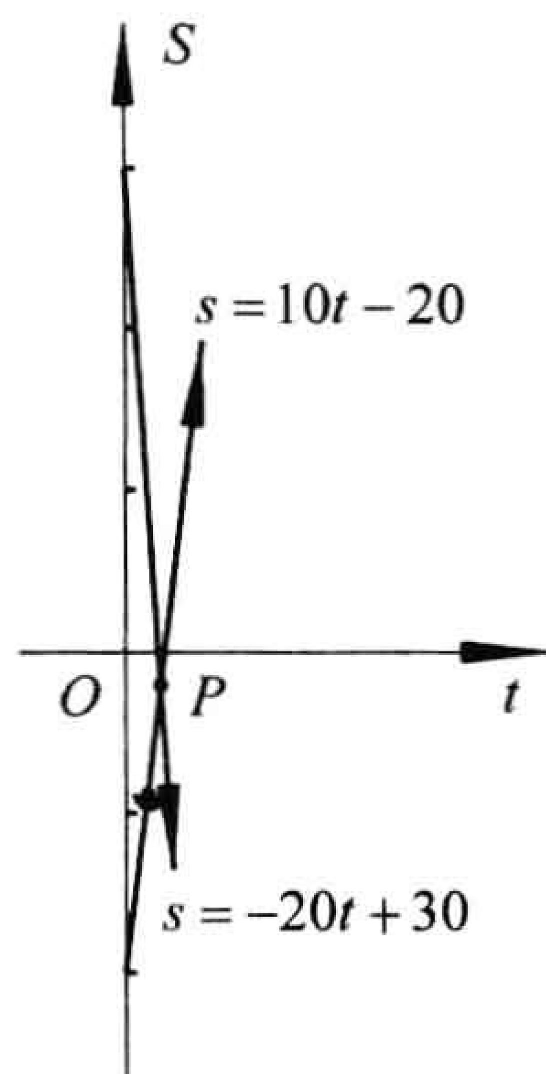


图 1.17

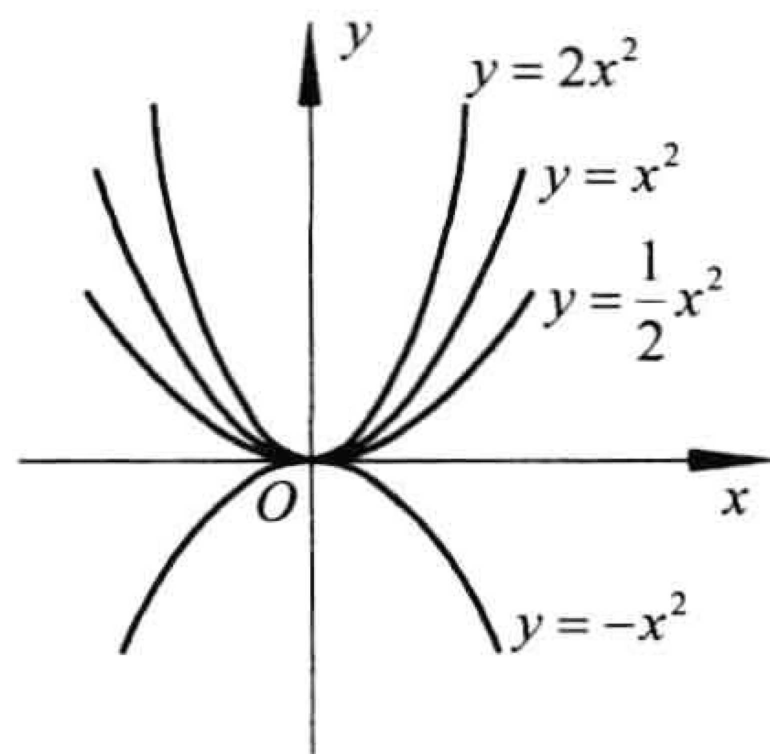


图 1.18

【242】 作出二次有理函数的图像(**抛物线**)：

(1) $y=ax^2$，当 $a=1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ -1$；　　(2) $y=(x-x_0)^2$，当 $x_0=0,\ 1,\ 2,\ -1$；

(3) $y=x^2+c$，当 $c=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

解　(1)如图 1.18 所示.　(2)如图 1.19 所示.　(3)如图 1.20 所示.

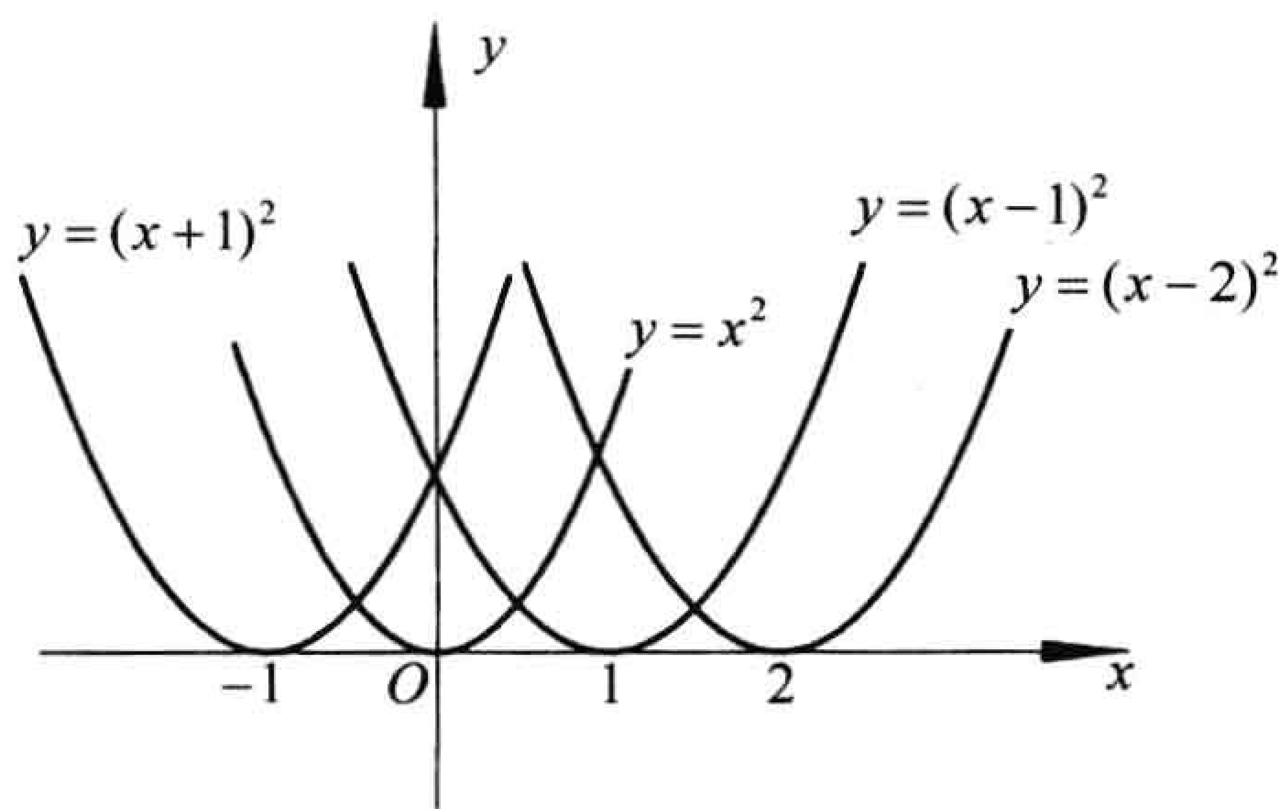


图 1.19

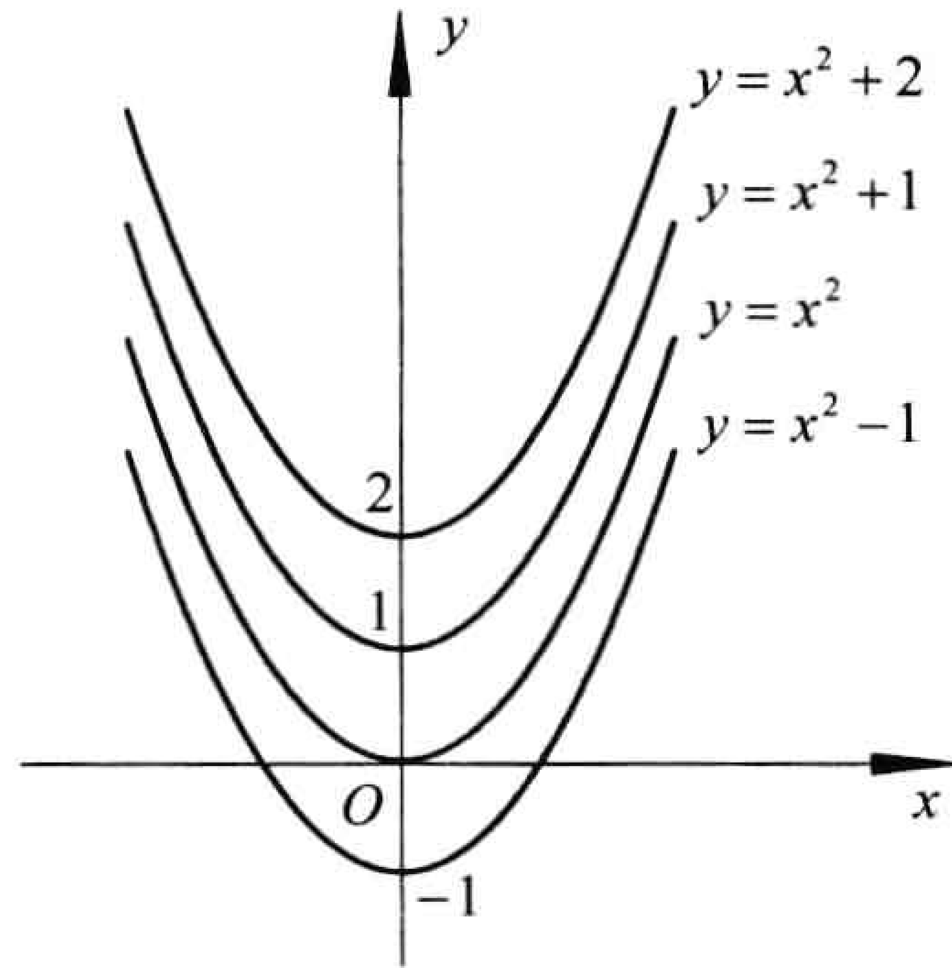


图 1.20

【243】 **把二次三项式** $y=ax^2+bx+c$ **化为下面的形状**

$$y=y_0+a(x-x_0)^2,$$

再作出它的图像，研究例子：

(1) $y=8x-2x^2$；　(2) $y=x^2+3x+2$；　(3) $y=-x^2+2x-1$；　(4) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$.

解　利用配方法得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=y_0+a(x-x_0)^2,$$

其中 $x_0=-\frac{b}{2a}$，$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$，如图 1.21 所示.

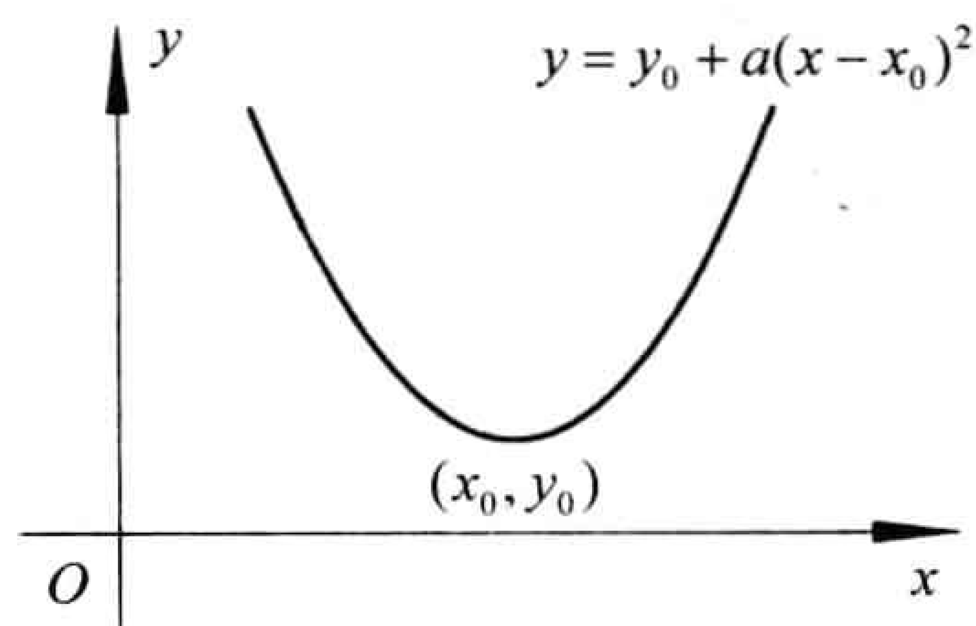


图 1.21

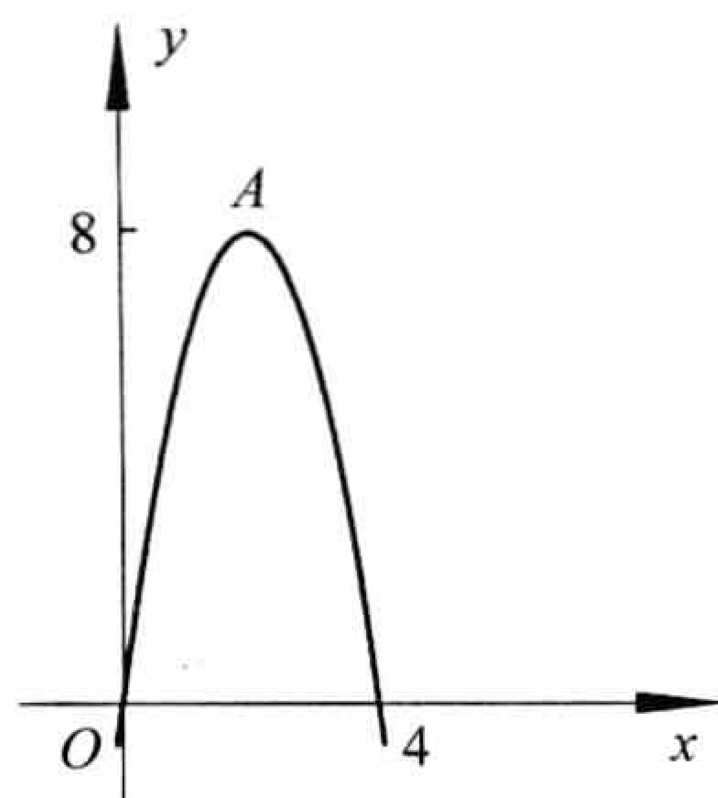


图 1.22

(1)$y=8x-2x^2=8-2(x-2)^2$, $x_0=2$, $y_0=8$, $a=-2$,如图 1.22 所示,顶点 $A(2,8)$.

(2)$y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,$x_0=\frac{3}{2}$,$y_0=-\frac{1}{4}$,$a=1$,如图 1.23 所示,顶点 $B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

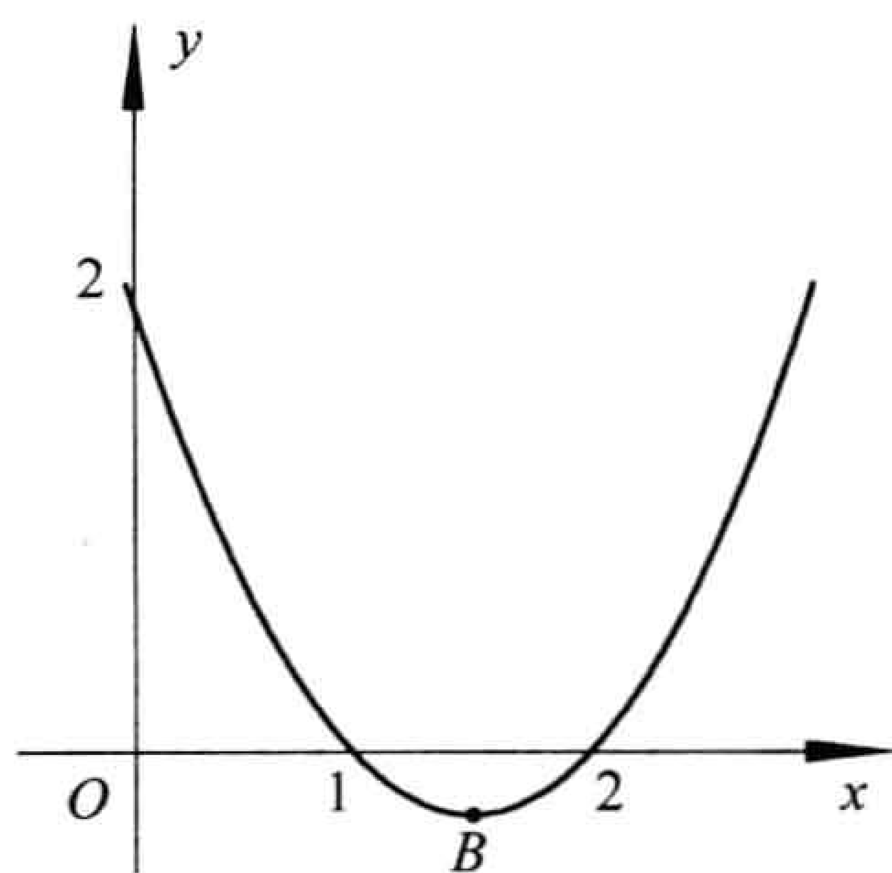


图 1.23

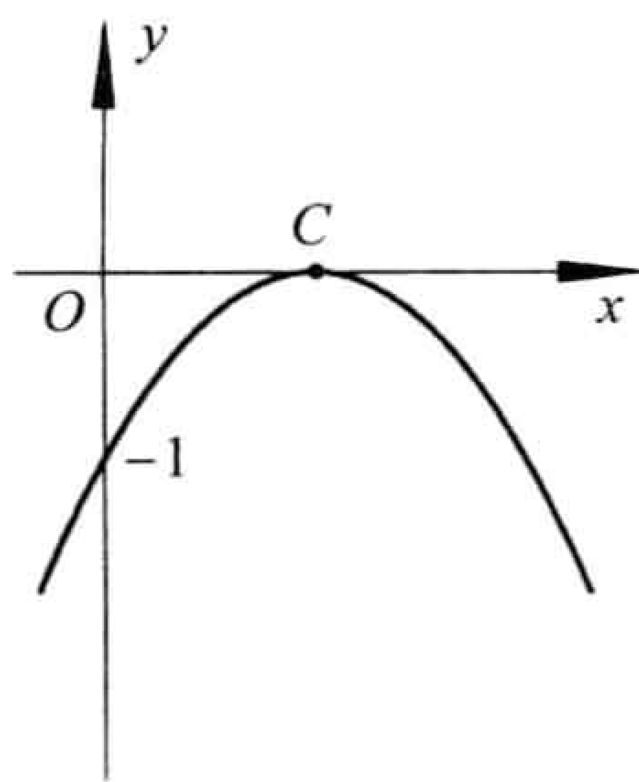


图 1.24

(3)$y=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$,$x_0=1$, $y_0=0$, $a=-1$,如图 1.24 所示,顶点 $C(1,0)$.

(4)$y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$,$x_0=-1$, $y_0=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$,

如图 1.25 所示,顶点 $D(-1,\frac{1}{2})$.

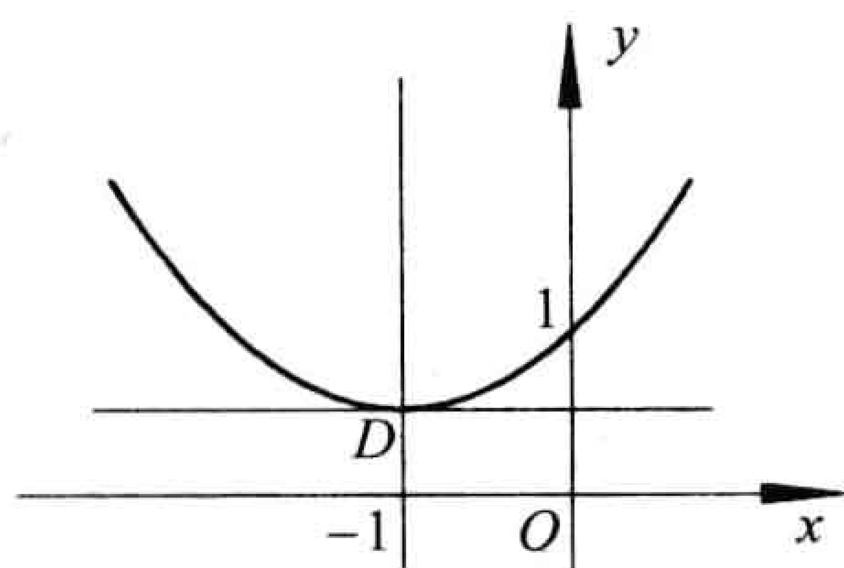


图 1.25

【244】 质点以初速度 $v_0=600\text{m/s}$ 沿与水平面成角 $\alpha=45°$ 的方向射出. 作出运动轨迹的图像,并求最大上升高度及射程(取 $g\approx10\text{m/s}^2$,不计空气阻力).

解 运动轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

以 $v_0=600$, $g=10$, $\alpha=45°$代入得 $y=x-\frac{x^2}{36000}$,即

$$y=-\frac{1}{36000}(x-18000)^2+9000.$$

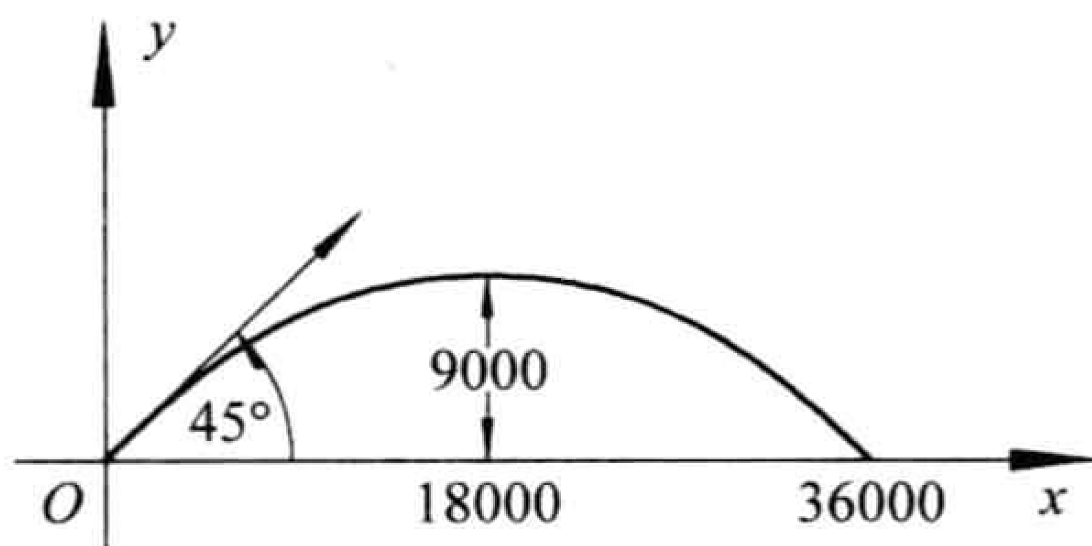


图 1.26

当 $x=18000$ 时,y 值最大,最大上升高度为 9000m;

当 $x=36000$ 时,$y=0$,即射程为 36000m. 如图 1.26 所示.

作出下列高于二次的有理函数的图像：

【245】 $y=x^3+1$

解 如图 1.27 所示.

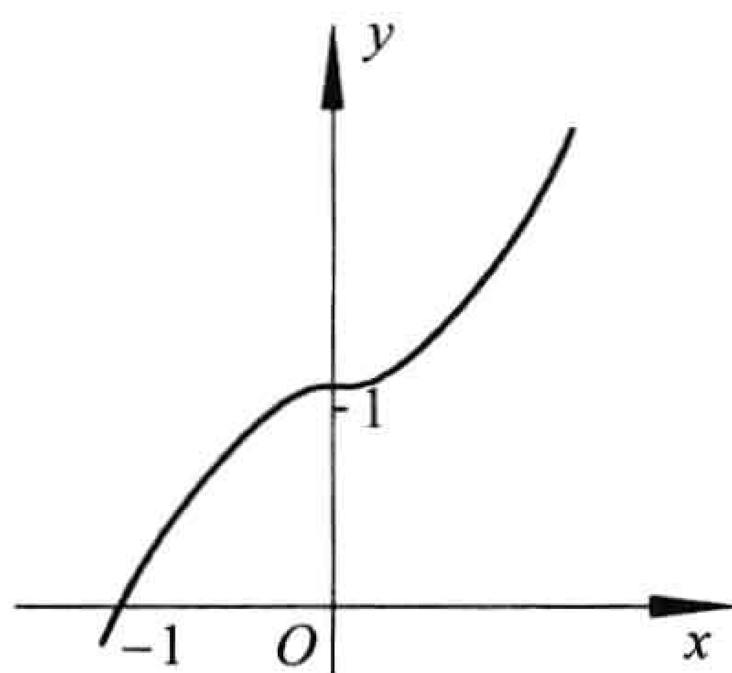


图 1.27

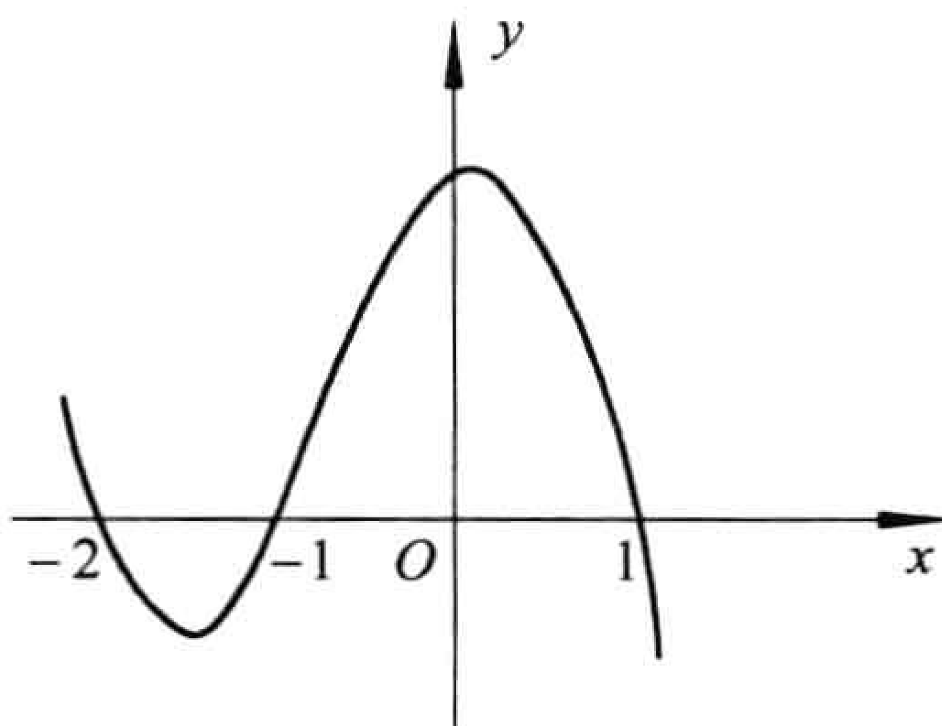


图 1.28

【246】 $y=(1-x^2)(2+x)$.

解 当 $x=\pm1,-2$ 时，$y=0$； 当 $x<-2$ 及 $-1<x<1$ 时，$y>0$；
当 $-2<x<-1$ 及 $x>1$ 时，$y<0$. 当 $x<-2$ 及 $x>1$ 时，曲线下降；
当 $-1<x<1$ 时，曲线由上升到下降； 当 $-2<x<-1$ 时，曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

【247】 $y=x^2-x^4$.

解 $y=x^2(1-x)(1+x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

图像关于 Oy 轴对称，与两坐标轴的交点为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,0)$，且在$(0,0)$点与 Ox 轴相切.

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$y=\frac{1}{4}$，此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$及 $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$均为图像上的最高点.

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，曲线上升；当$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$时，曲线下降. 如图 1.29 所示.

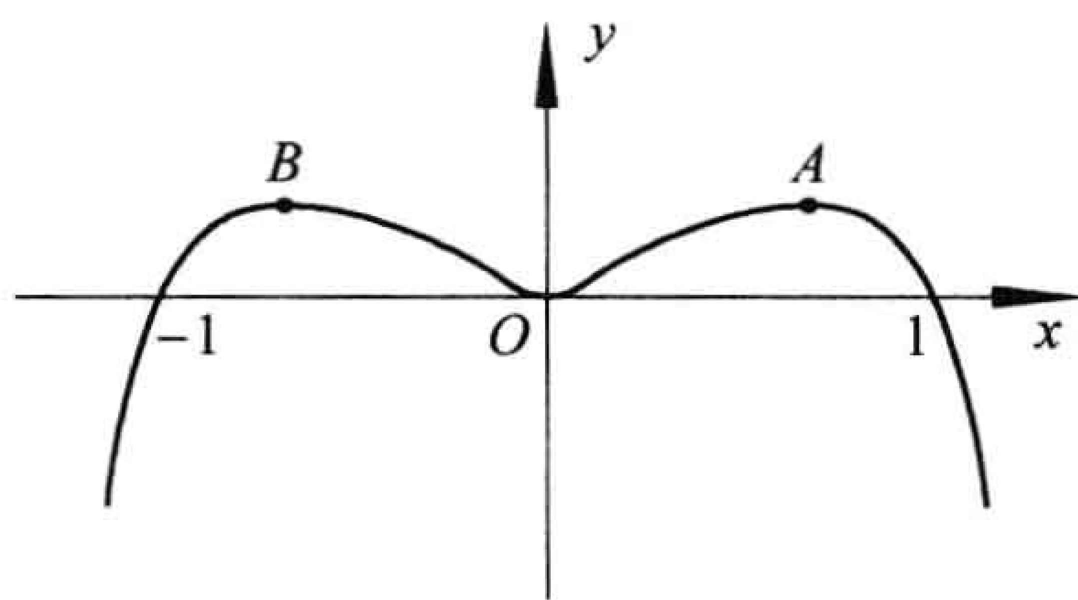


图 1.29

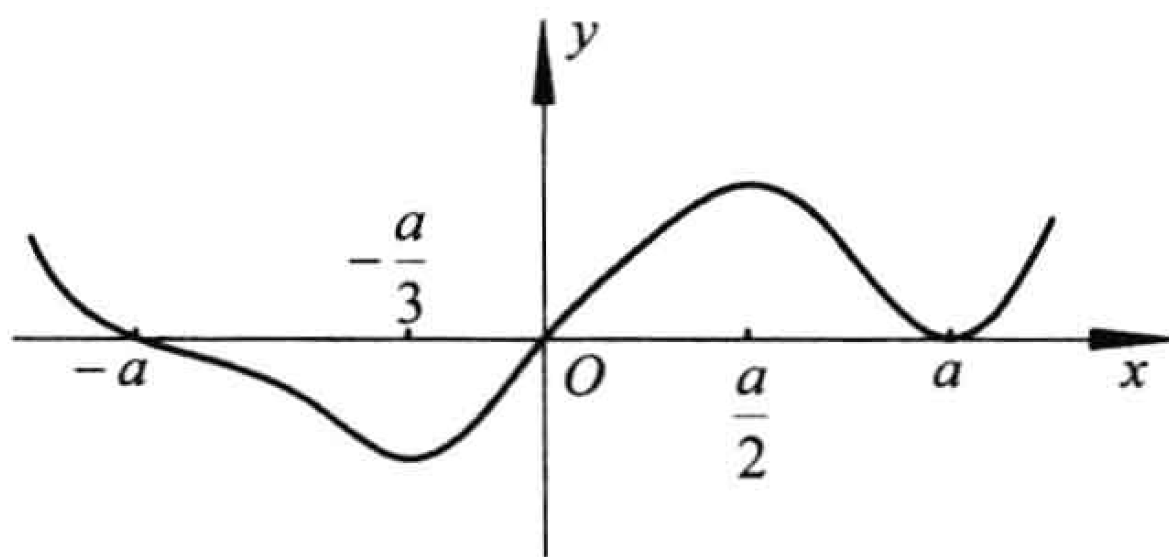


图 1.30

【248】 $y=x(a-x)^2(a+x)^3 \quad (a>0)$.

解 当 $x=0,a,-a$ 时，$y=0$. $(-a,0)$及$(a,0)$为切点.
当 $x>0$ 及 $x<-a$ 时，$y>0$；当 $-a<x<0$ 时，$y<0$.
如图 1.30 所示.

作出下列分式线性函数的图像(双曲线)：

【249】 $y=\frac{1}{x}$.

解 如图 1.31 所示.

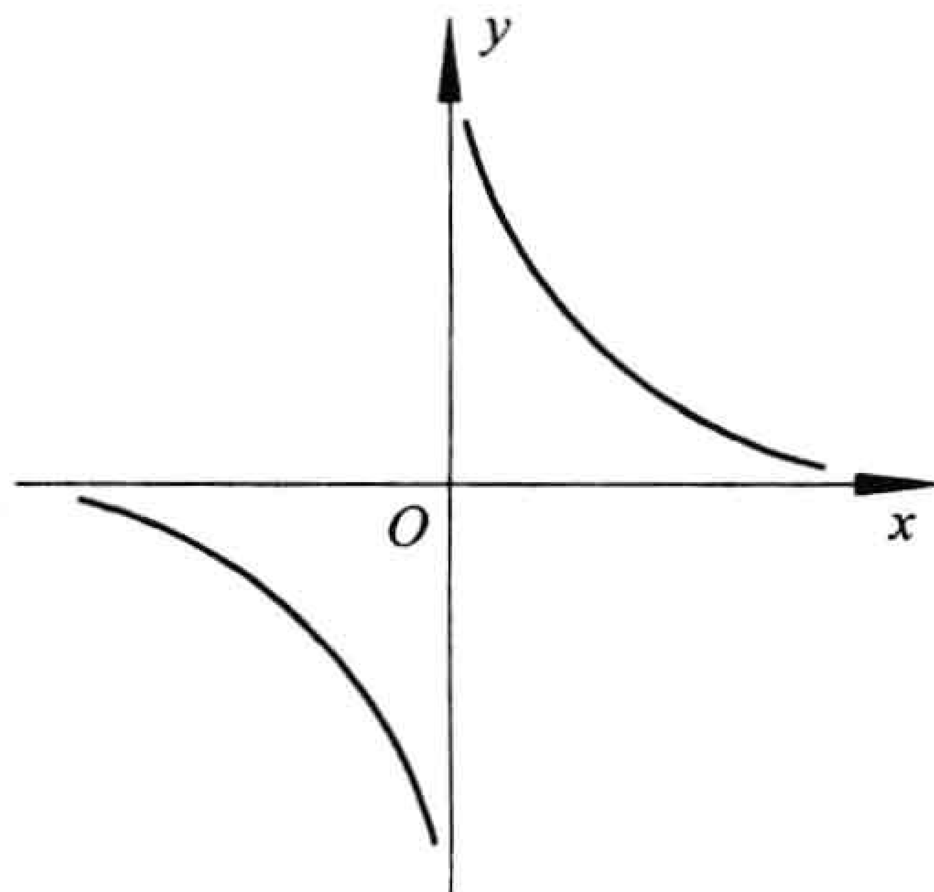


图 1.31

【250】 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

提示 对称中心为$(-1,-1)$.

解 $y=-1+\frac{2}{1+x}$,

图像的对称中心为$(-1,-1)$,如图 1.32 所示.

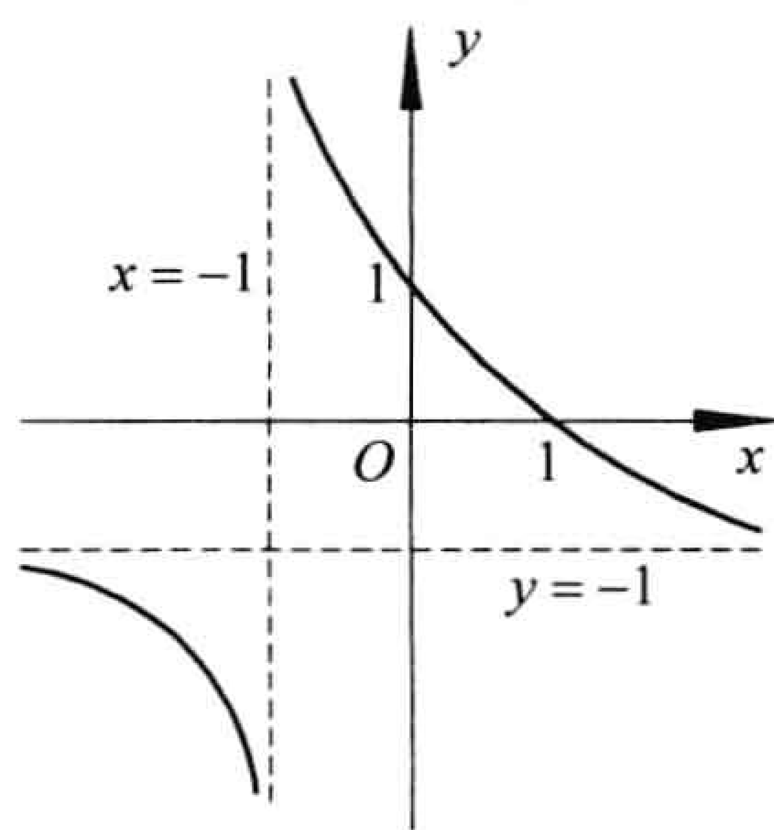


图 1.32

【251】 把分式线性函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0).$$

化为以下形式 $y=y_0+\frac{m}{x-x_0}$. 再作它的图像.

研究例子 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$.

解 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0}$,其中 $x_0=-\frac{d}{c}$,$y_0=\frac{a}{c}$,$m=\frac{bc-ad}{c^2}$,如图 1.33 所示.

对于 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$,有 $x_0=y_0=\frac{3}{2}$,如图 1.34 所示.

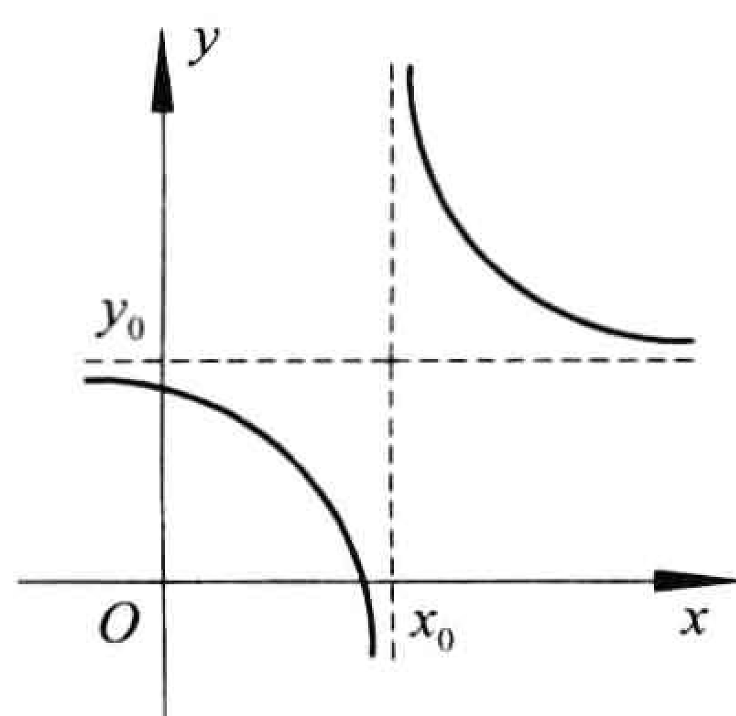


图 1.33

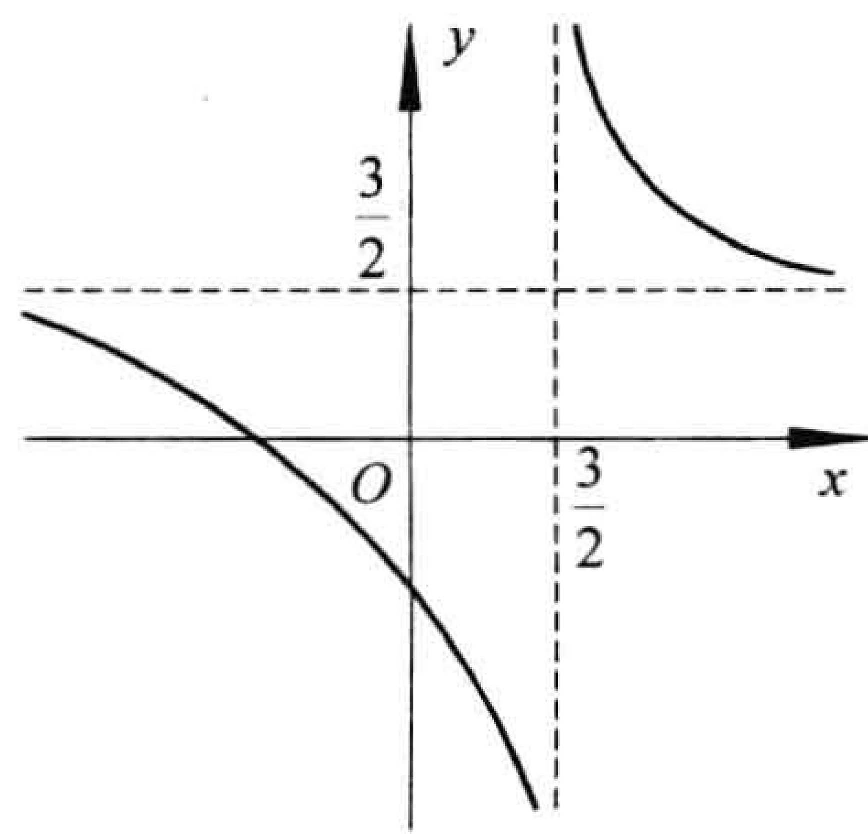


图 1.34

【252】 设气体当压强 $p_0=1\text{Pa}$ 时占有体积 $V_0=12\text{m}^3$. 若气体的温度保持不变,作出气体体积 V 对压强 p 的依赖关系的图像(玻意耳—马略特定律).

解 当温度 $T=k$(常数)时,气体体积 V 与压力 p 成反比,即

$$pV=C,$$

其中 C 为常数.

当 $p_0=1$ 时,$V_0=12$,故 $C=12$,从而 $pV=12$,如图 1.35 所示.

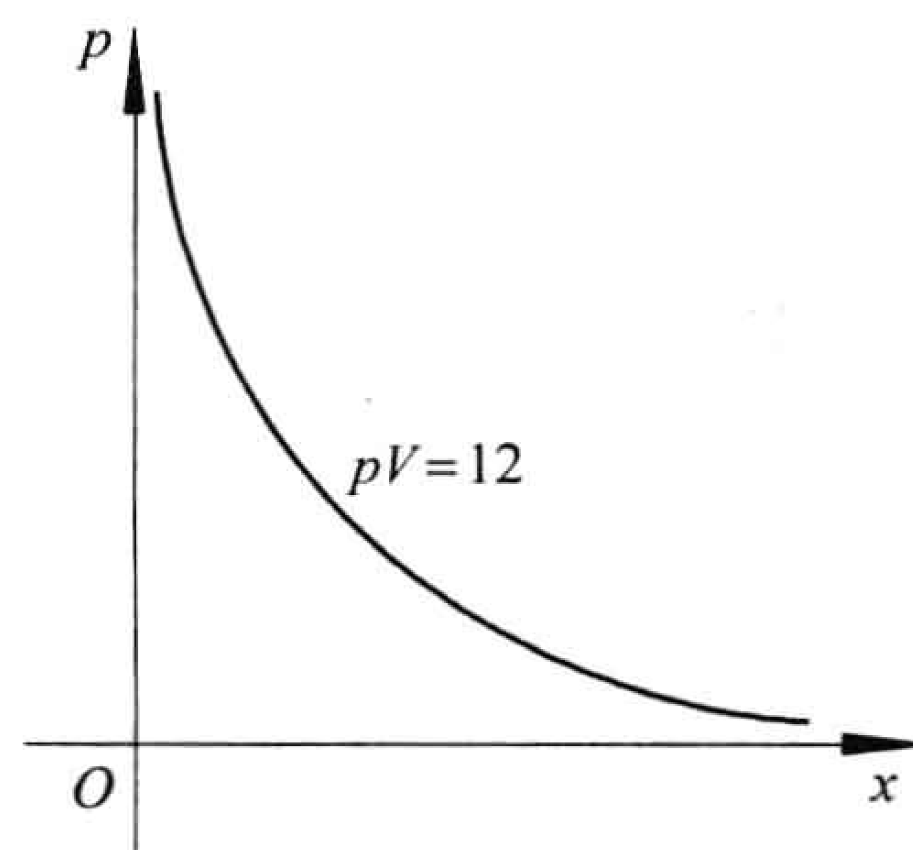


图 1.35

作出下列有理分式函数的图像:

【253】 $y=x+\frac{1}{x}$(双曲线).

提示 利用图像相加法,将 $y=x$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 的图像叠加即得 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像.

注意,254 题,255 题及 260 题均可仿本题的解法.

解 将 $y=x$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 的图像叠加即得,如图 1.36 中黑粗线所示.

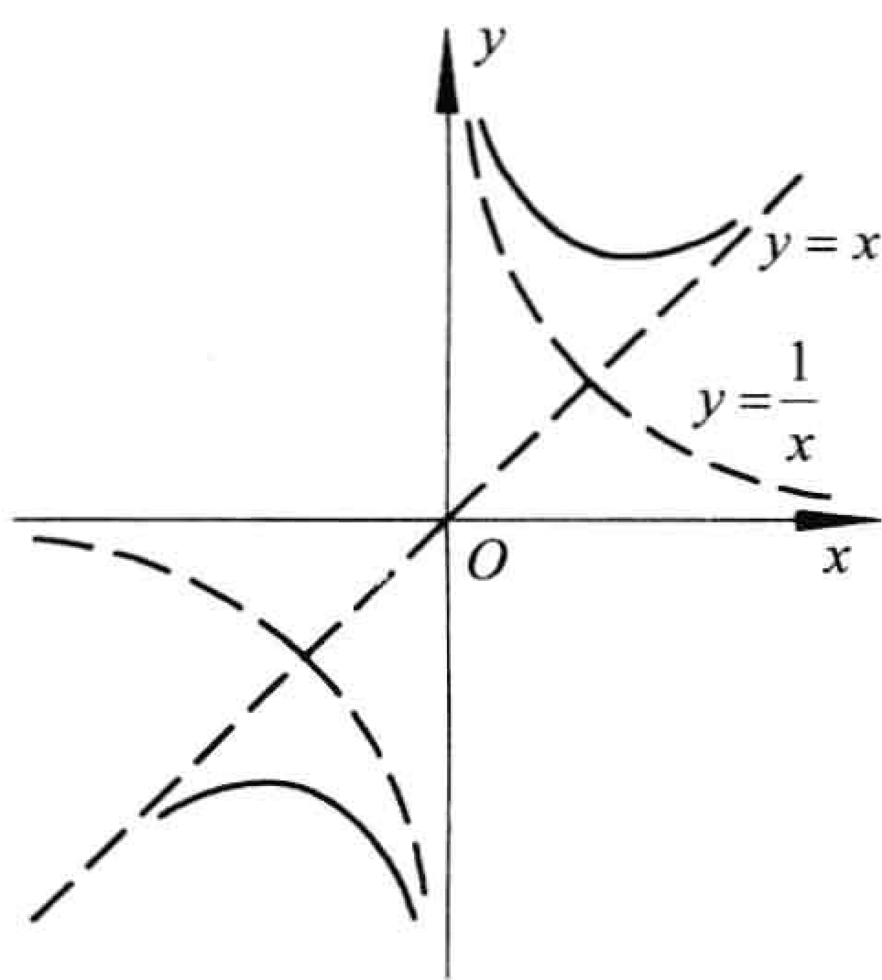


图 1.36

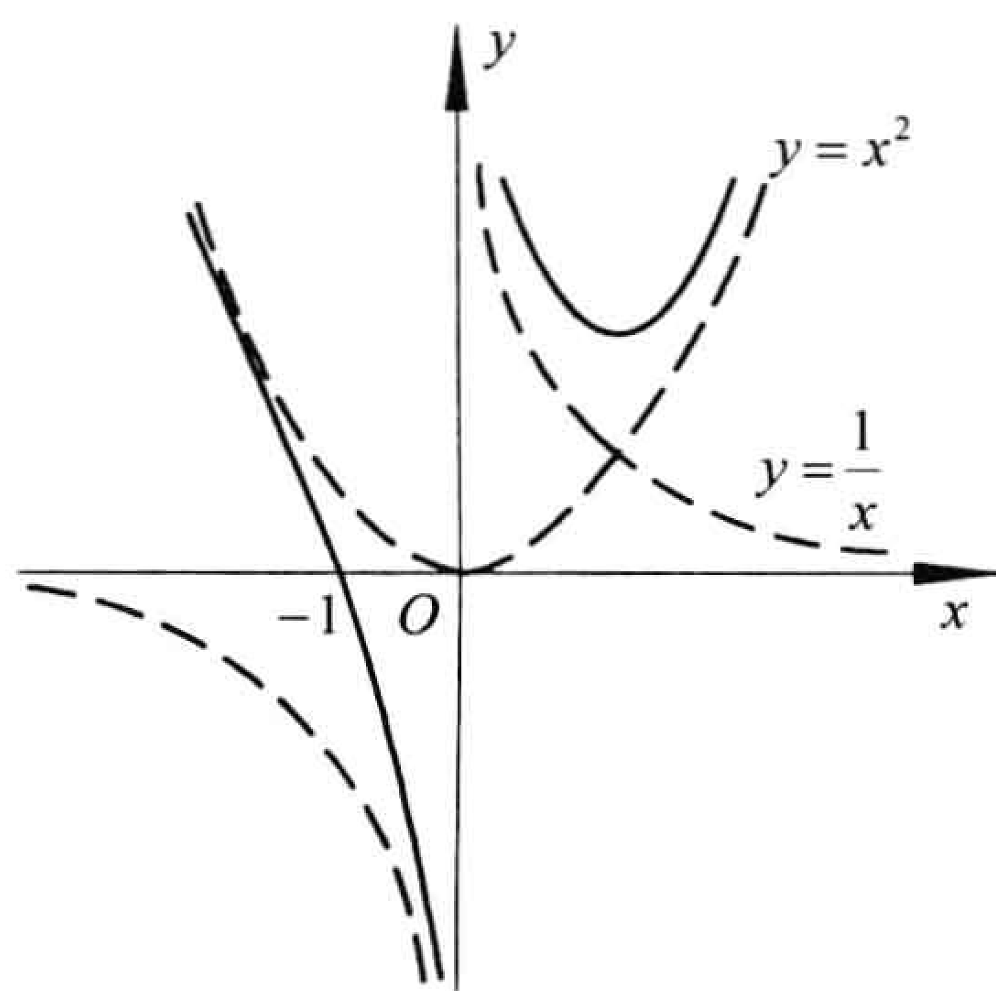


图 1.37

【254】 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ （牛顿三叉线）.

解 将 $y=x^2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像叠加即得，如图 1.37 中黑粗线所示.

【255】 $y=x+\dfrac{1}{x^2}$

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

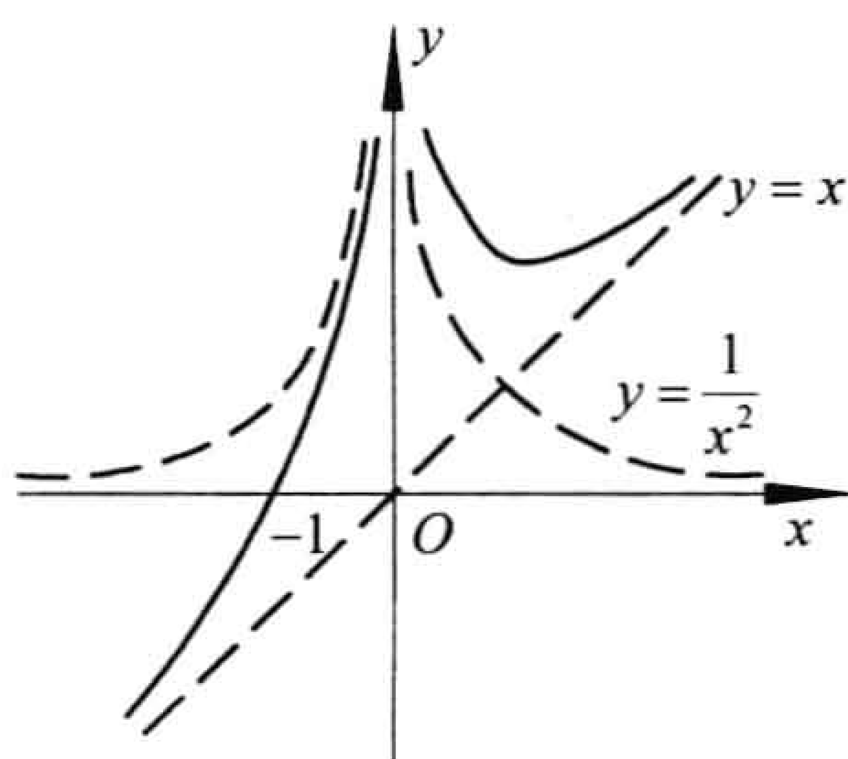


图 1.38

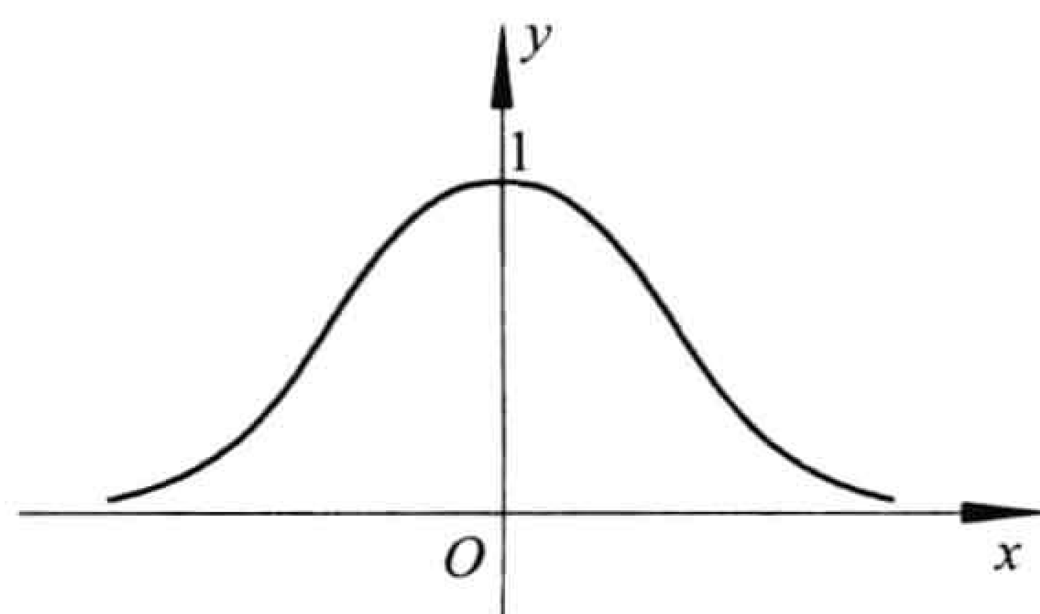


图 1.39

【256】 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ （箕舌线）.

解 图像对称于 Oy 轴，位于 Ox 轴上方，最高点为(0,1). 当 x 的绝对值无限增大时，y 值无限变小. 如图 1.39 所示.

【257】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ （牛顿蛇形线）.

解 以 $-x$ 换 x，y 值的绝对值不变但改变符号，故图像对称于原点.

又因 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$，故 $-1\leqslant y\leqslant 1$.

当 $0<x<1$ 时，$y>0$，曲线上升；当 $1<x<+\infty$ 时，$y>0$，曲线下降.

图像以 Ox 轴为渐近线，如图 1.40 所示.

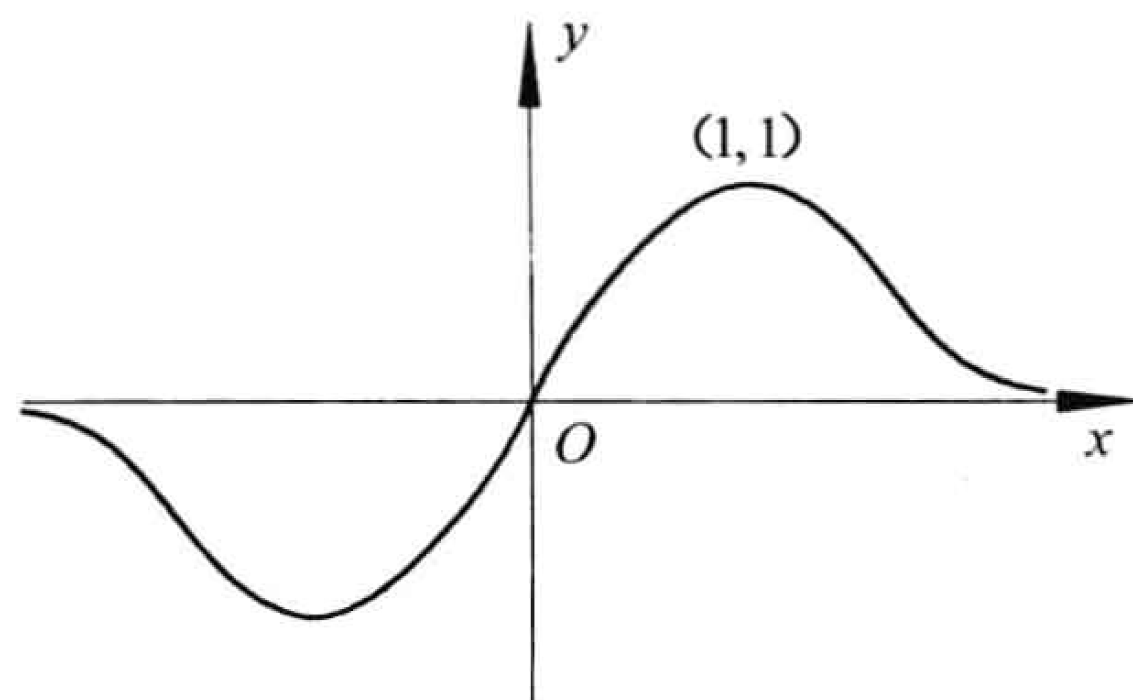


图 1.40

【258】 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

解 图像关于 Oy 轴对称，且经过点(0,1).

当 $0<x<1$ 及 $x>1$ 时，曲线上升，但当 $x=\pm 1$ 时，y 无意义. $x=\pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

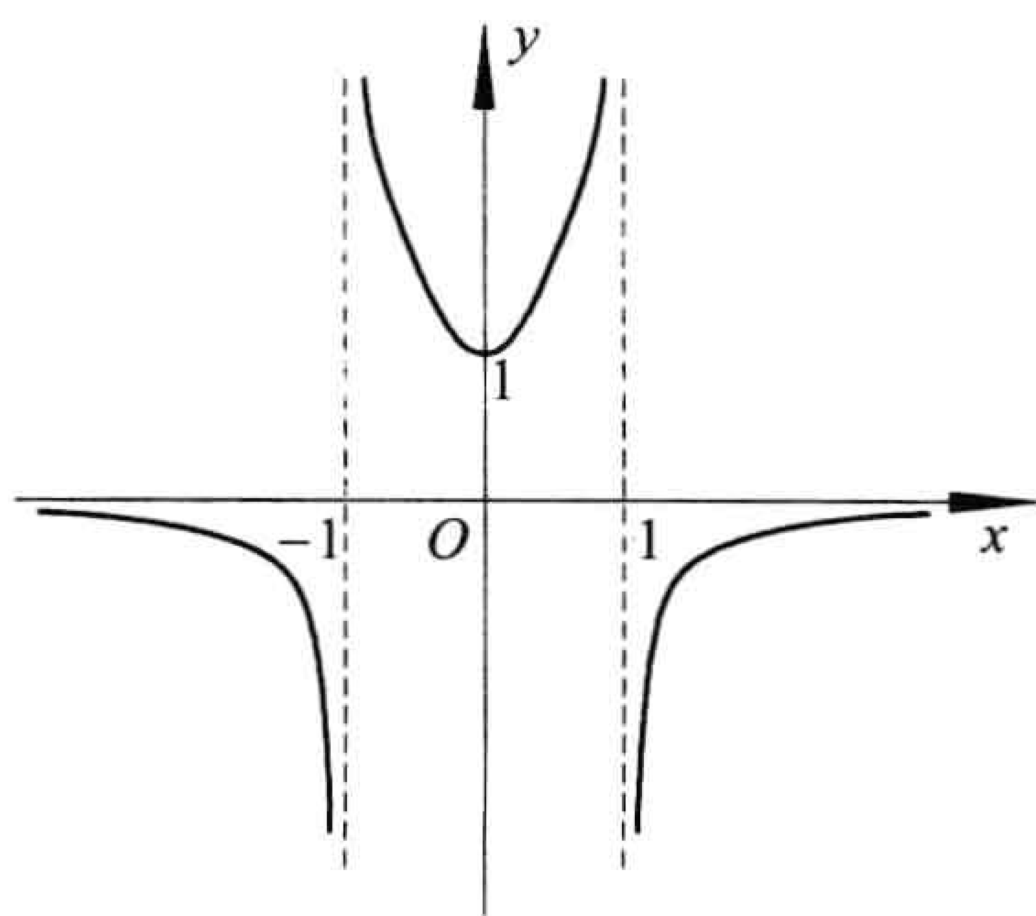


图 1.41

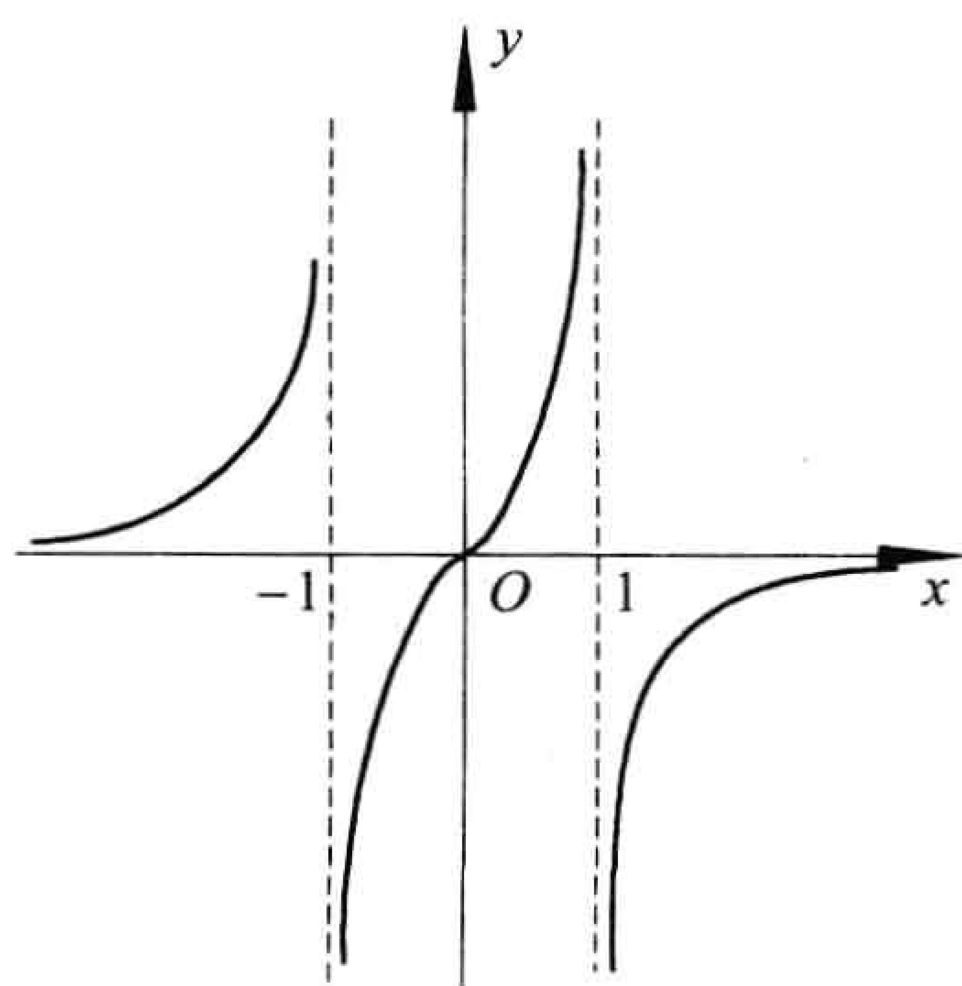


图 1.42

【259】 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

解 图像关于原点对称，且经过原点. $x=\pm1$ 为渐近线，在(0,1)及$(1,+\infty)$内曲线上升. 如图 1.42 所示.

【260】 $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 将 $y=\dfrac{1}{1+x}$，$y=-\dfrac{2}{x}$ 及 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图像叠加即得，渐近线：$x=-1$，$x=0$，$x=1$ 及 $y=0$，如图 1.43 所示.

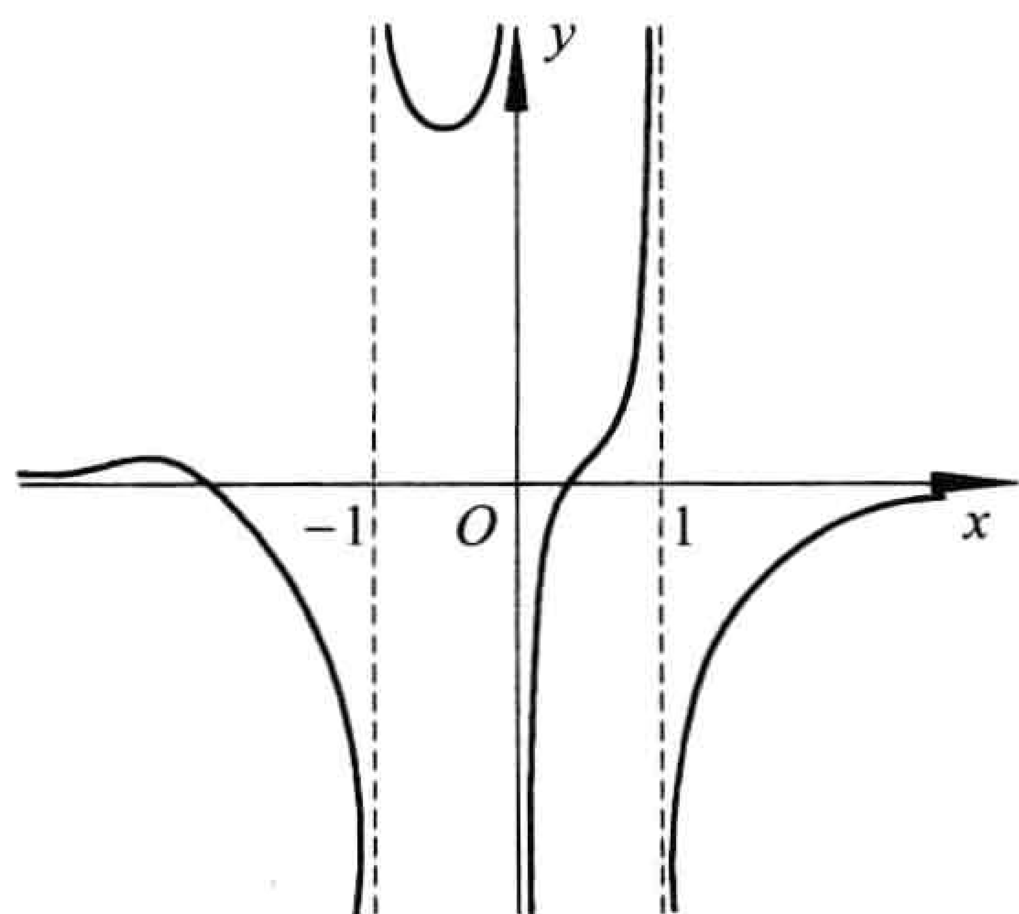


图 1.43

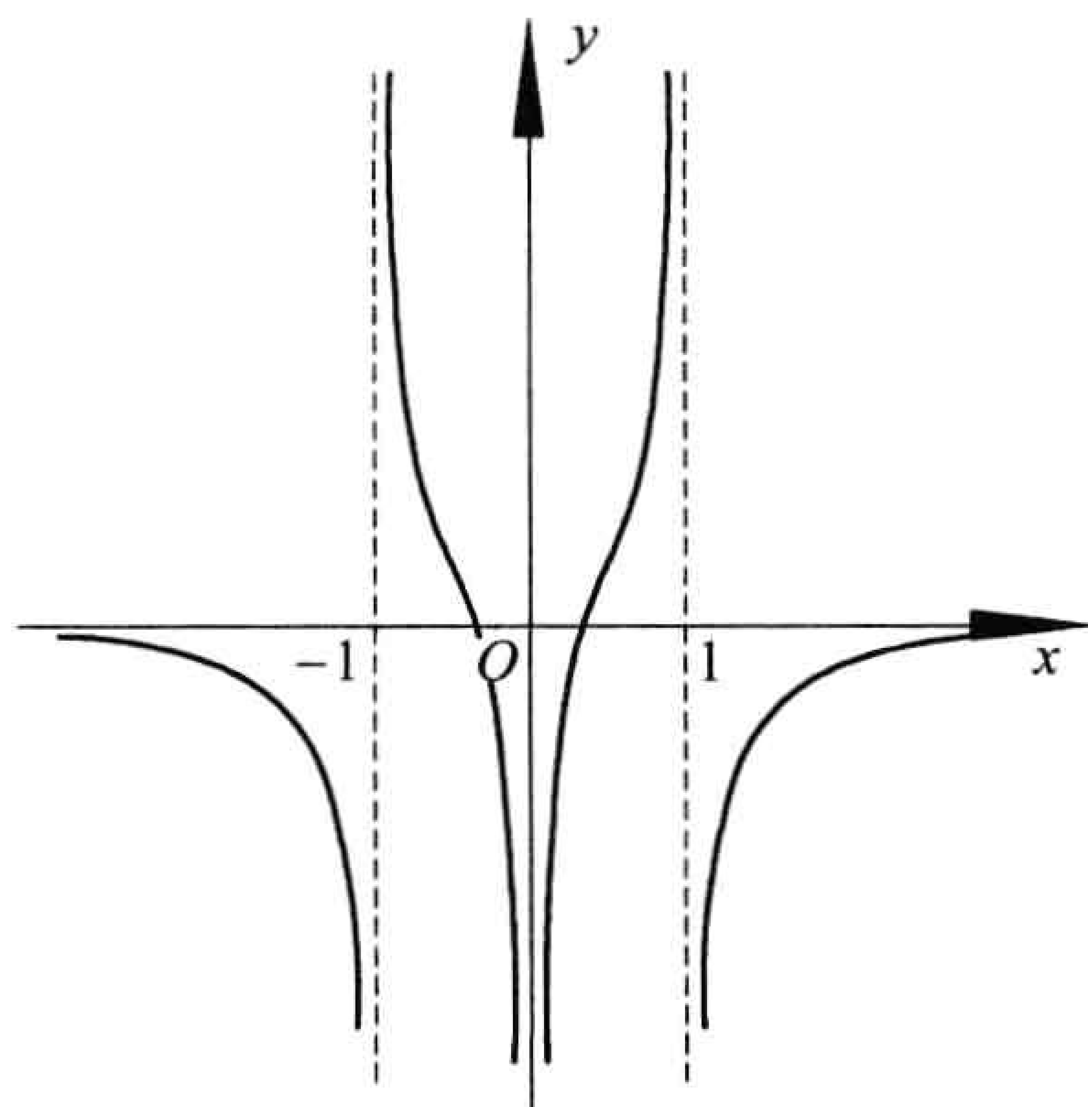


图 1.44

【261】 $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称，渐近线：$x=-1$，$x=1$，$x=0$ 及 $y=0$. 如图 1.44 所示.

【262】 $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

解 $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}=1-\dfrac{2x}{x^2+x-2}$.

将 $y=1$ 及 $y=-\dfrac{2x}{(x+2)(x-1)}$ 的图像叠加即得.

如图 1.45 所示.

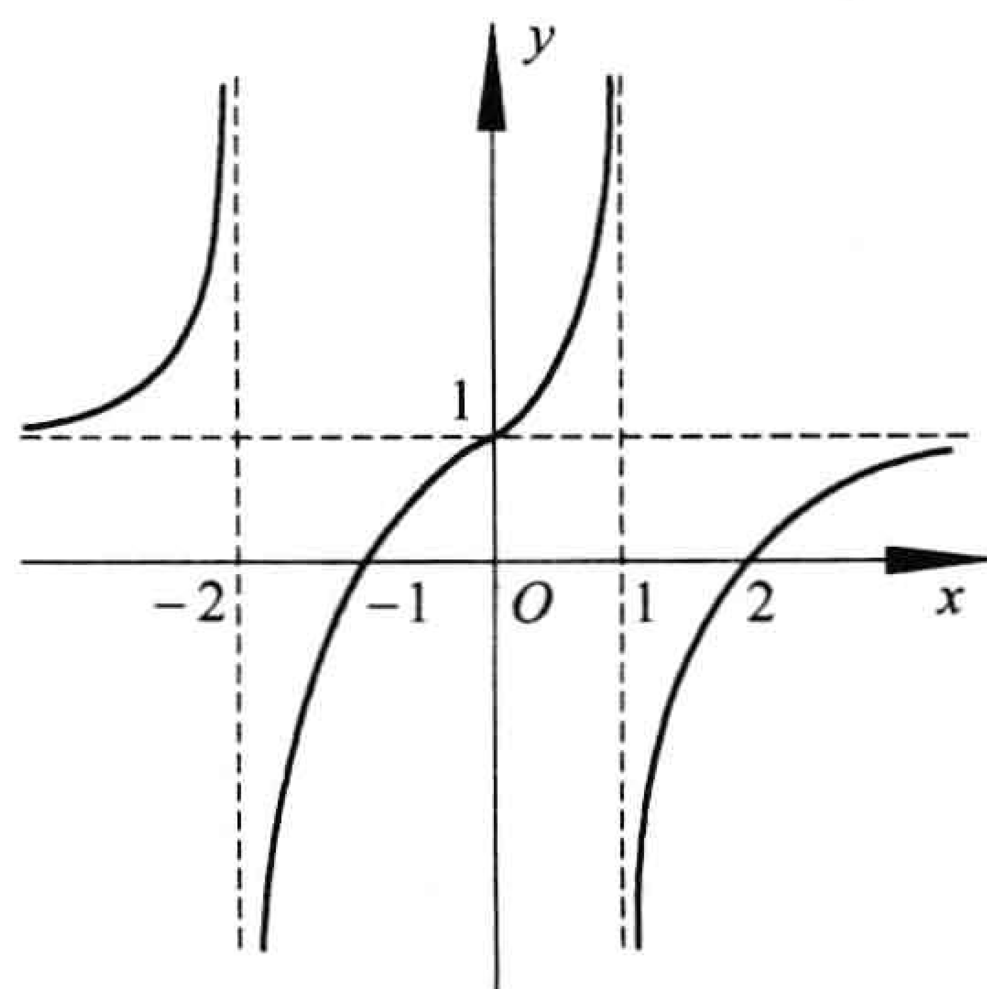


图 1.45

【263】 把函数 $\quad y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\quad (a_1\neq0)$

化为以下形式 $\quad y=kx+m+\dfrac{n}{x-x_0}$，

然后作出它的草图.研究例子 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$.

解 $y=\dfrac{a}{a_1}x+\dfrac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\dfrac{\dfrac{c}{a_1}-\dfrac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\dfrac{b_1}{a_1}\right)}$

$=kx+m+\dfrac{n}{x-x_0}$

其中 $k=\dfrac{a}{a_1}$, $m=\dfrac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$, $x_0=-\dfrac{b_1}{a_1}$, $n=\dfrac{c}{a_1}-\dfrac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$.

如图 1.46 中黑粗线所示.

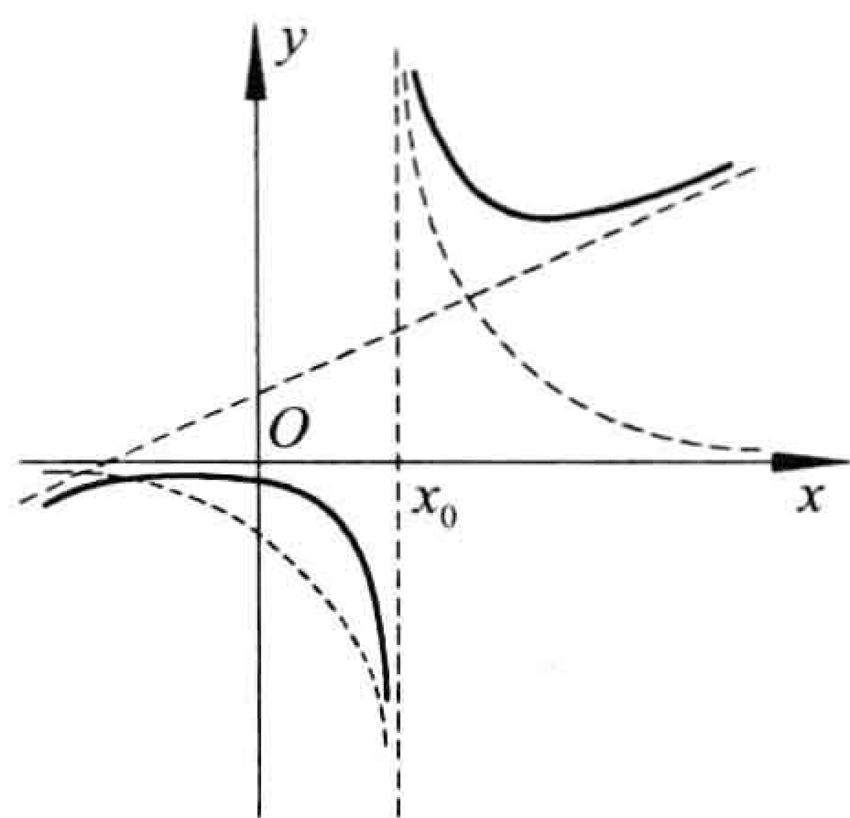


图 1.46

对于

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

$$=x-5+\frac{8}{x+1},$$

如图 1.47 中黑粗线所示.

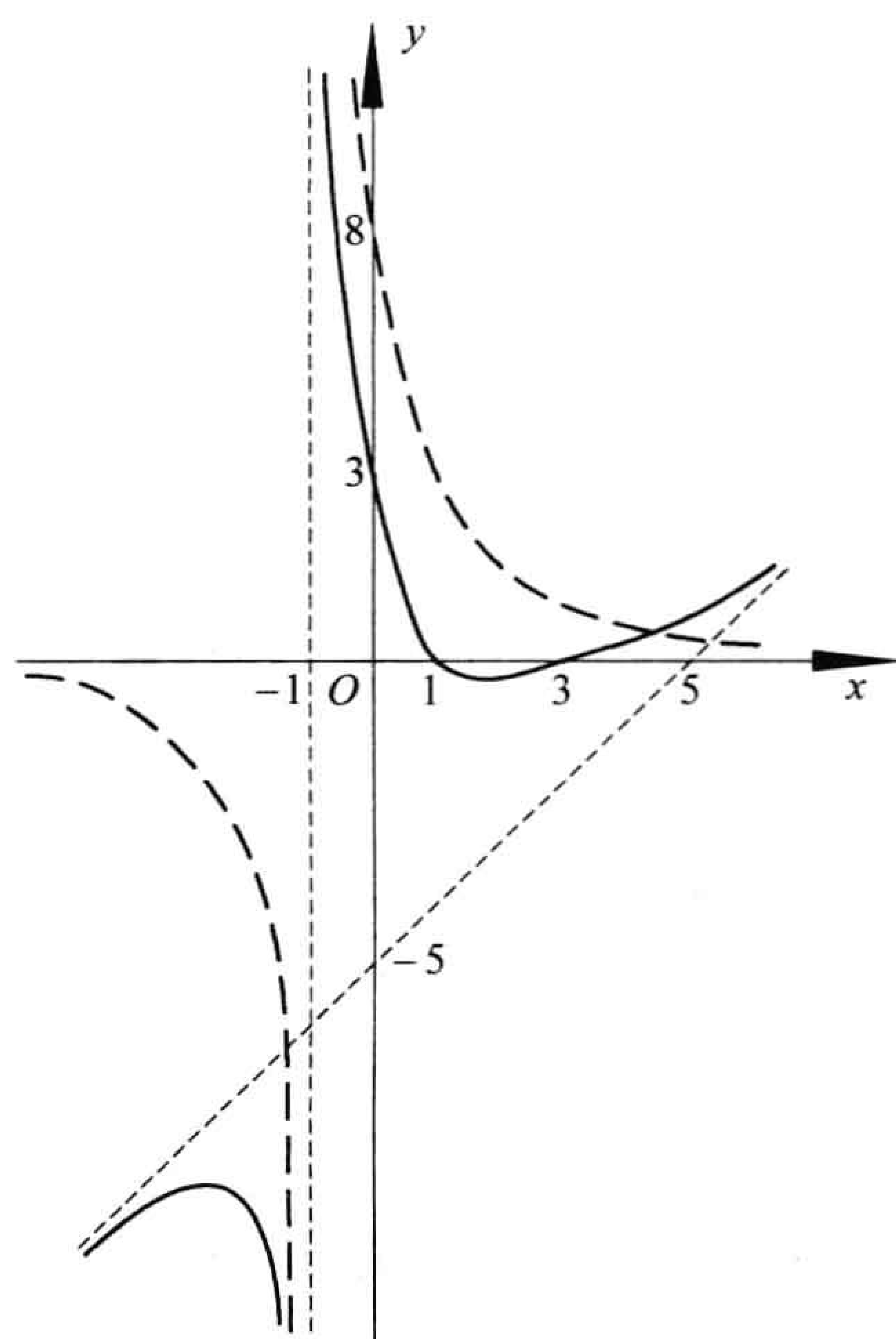


图 1.47

【264】 一质点与引力中心相距 x.质点所受引力的大小为 F,并且当 $x=1\text{m}$ 时 $F=10\text{N}$,作出引力 F 的图像(牛顿定律).

解 由万有引力定律知

$$F=\frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数.

当 $x=1$ 时,$F=10$,从而 $k=10$,于是,$F=\dfrac{10}{x^2}$,

如图 1.48 所示.

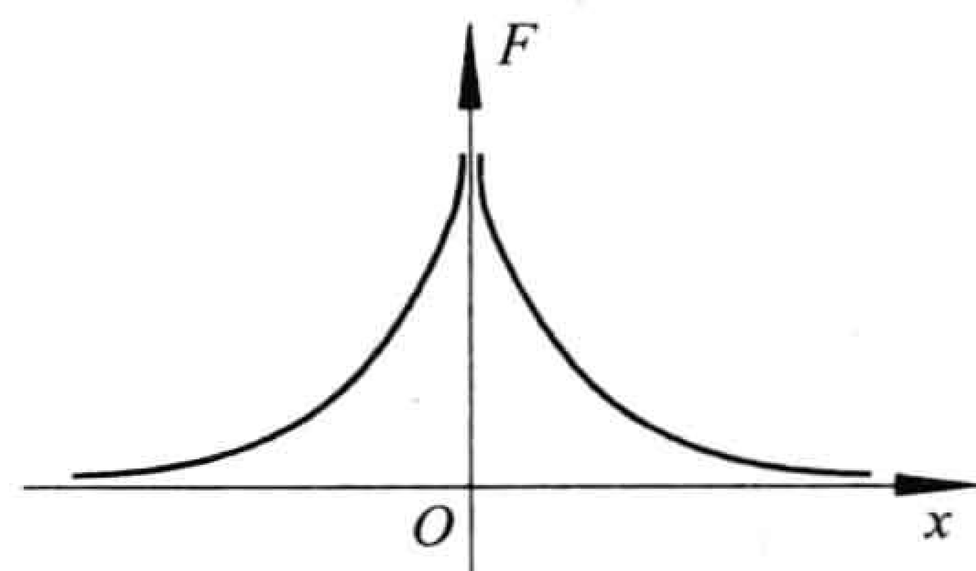


图 1.48

【265】 根据范德瓦耳斯定律,当温度不变时,真实气体的体积 V 和压强 p 以关系式

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=c$$

相联系.若 $a=2,b=0.1$ 及 $c=10$,作出函数 $p=p(V)$ 的图像.

解 由于

$$p=\frac{10}{V-0.1}-\frac{2}{V^2},$$

将 $p=\dfrac{10}{V-0.1}$ 及 $p=\dfrac{2}{V^2}$ 的图像叠加即得.

如图 1.49 所示.

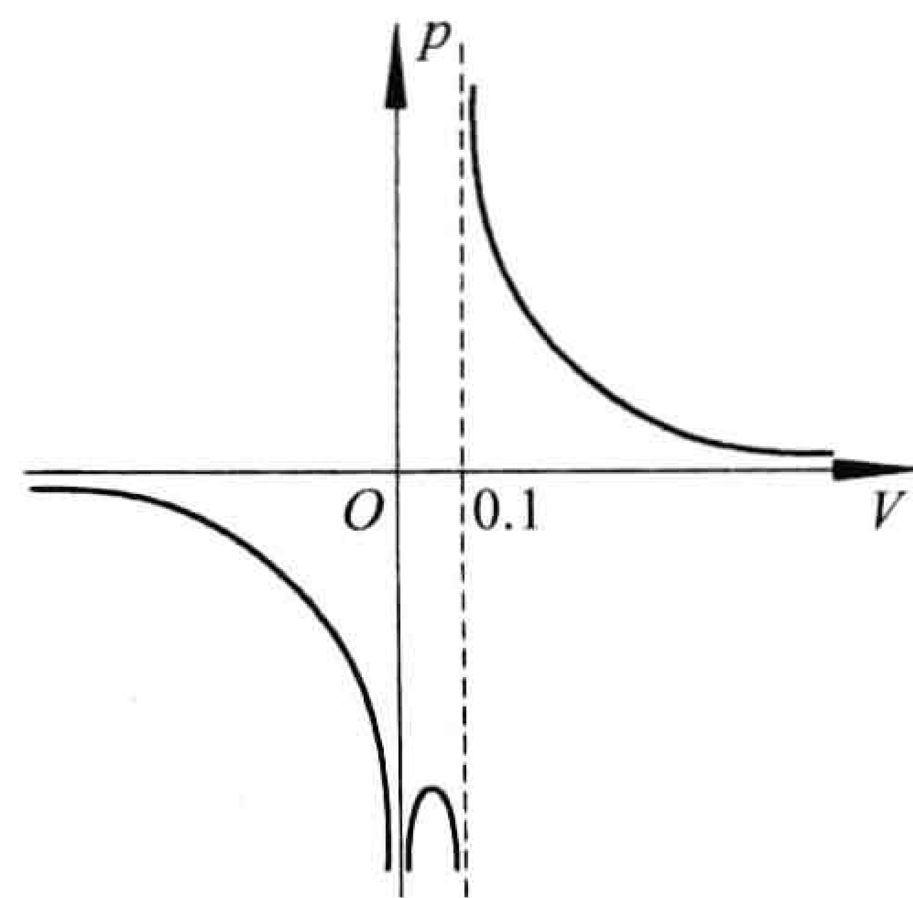


图 1.49

作出下列无理函数的图像:

【266】 $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (抛物线).

解 $y^2=-(x+2)$,如图 1.50 所示.

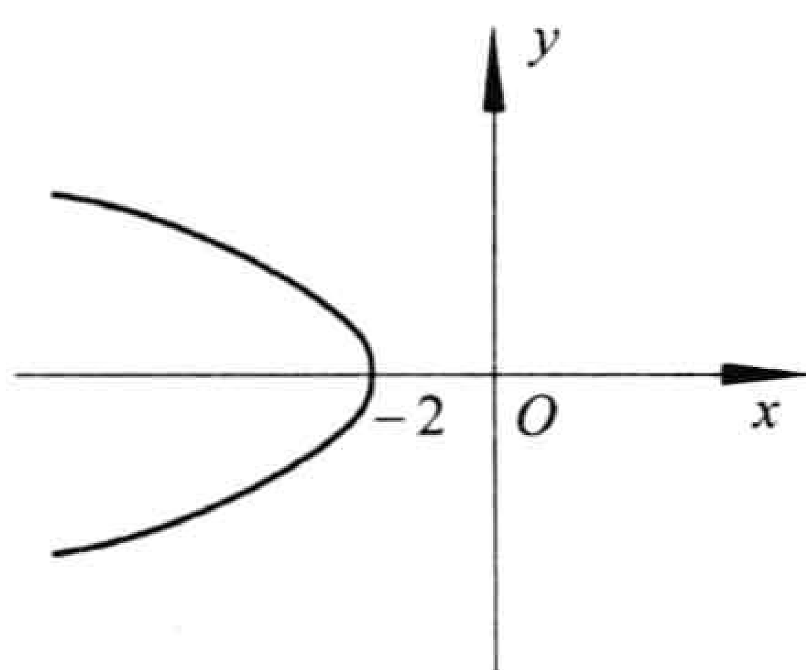


图 1.50

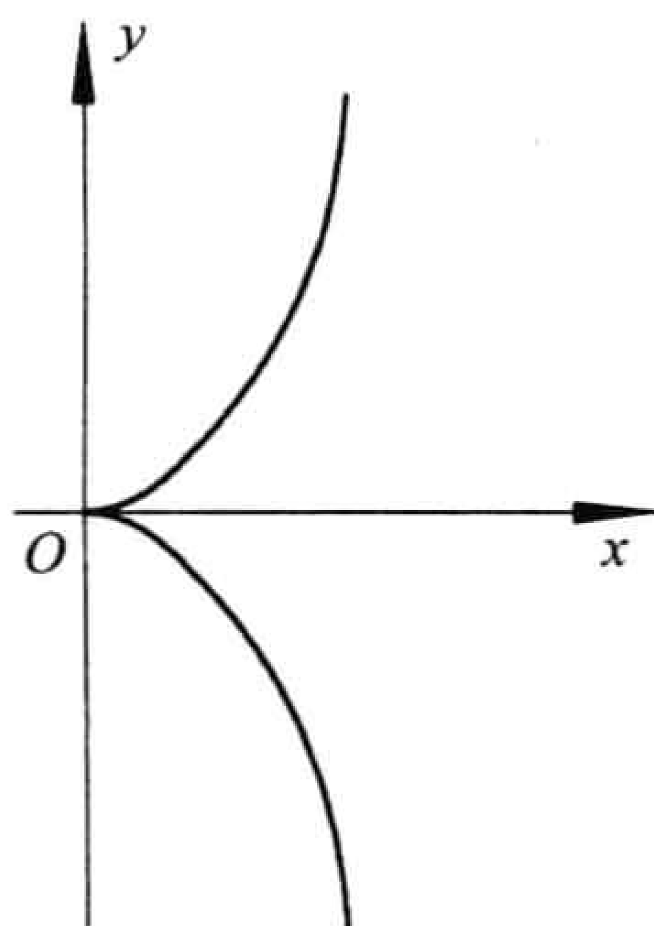


图 1.51

【267】 $y=\pm x\sqrt{x}$ （半三次抛物线）.

解 $y^2=x^3$，如图 1.51 所示.

【268】 $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$（椭圆）.

解 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$，如图 1.52 所示.

【269】 $y=\pm\sqrt{x^2-1}$（双曲线）.

解 $x^2-y^2=1$，

如图 1.53 所示.

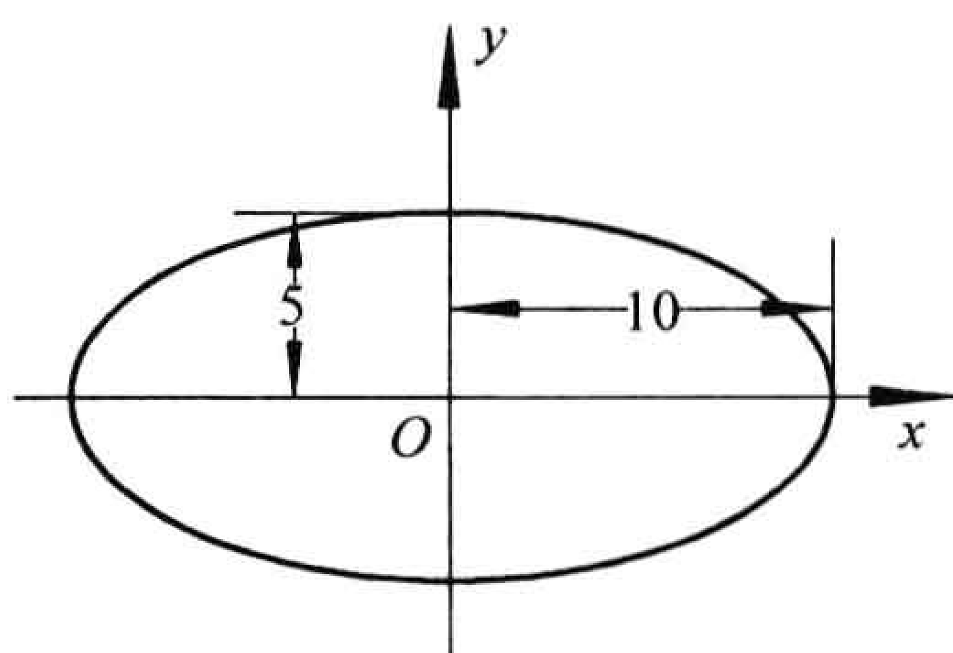


图 1.52

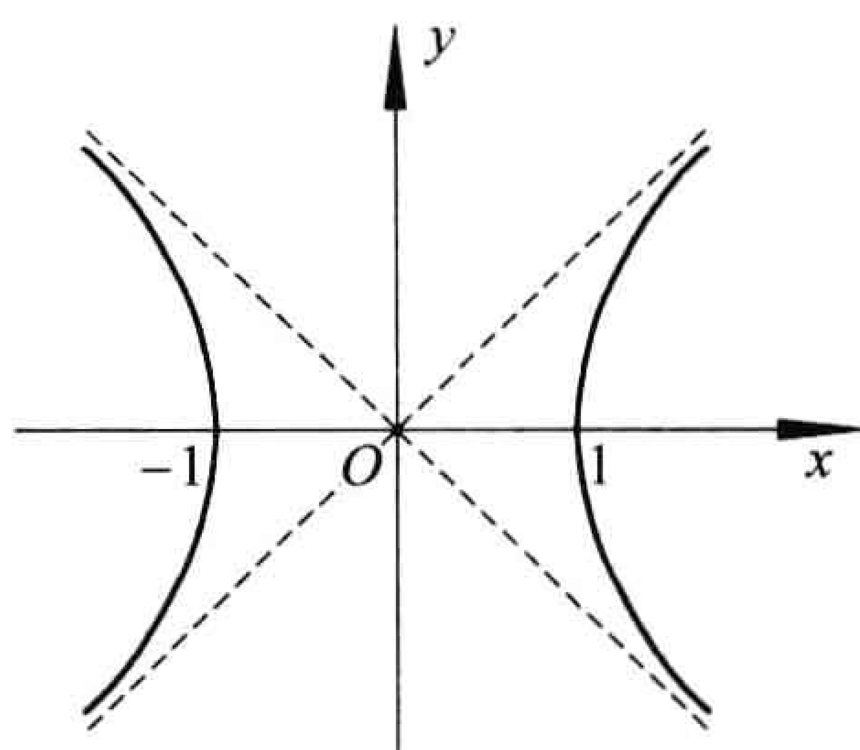


图 1.53

【270】 $y=\pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

提示 注意 $x=-1+\dfrac{2}{1+y^2}$，渐近线为 $x=-1$. 利用图像相加法即得所需图像（$-1<x\leqslant 1$）.

解 $y^2=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x=-1+\dfrac{2}{1+y^2}$，

将 $x=-1$ 及 $x=\dfrac{2}{1+y^2}$ 的图像叠加即得，如图 1.54 所示（$-1<x\leqslant 1$）.

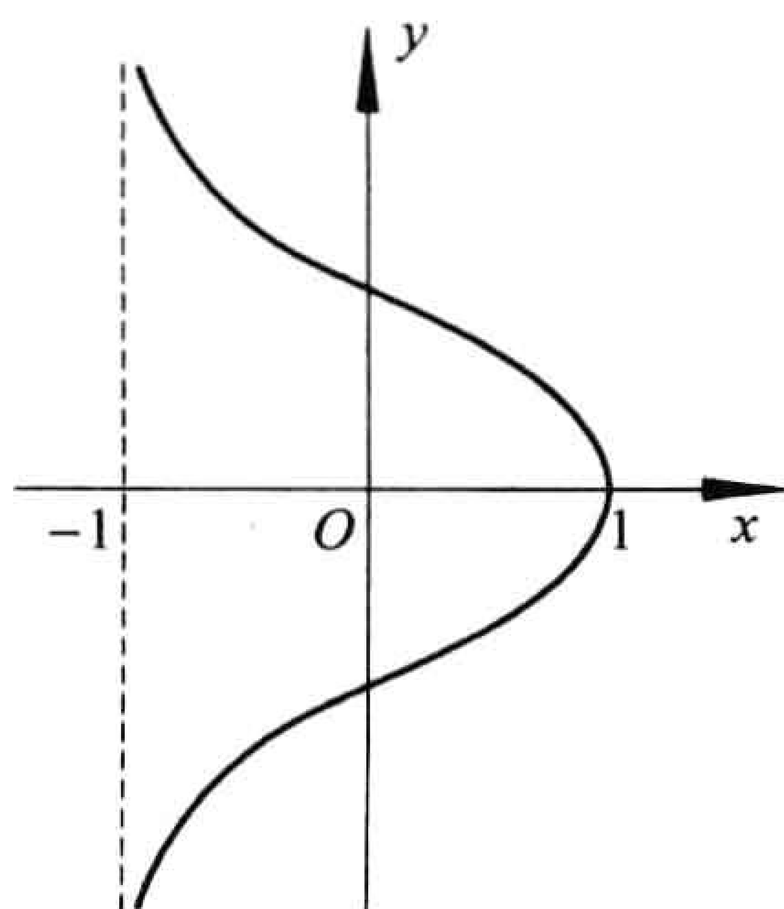


图 1.54

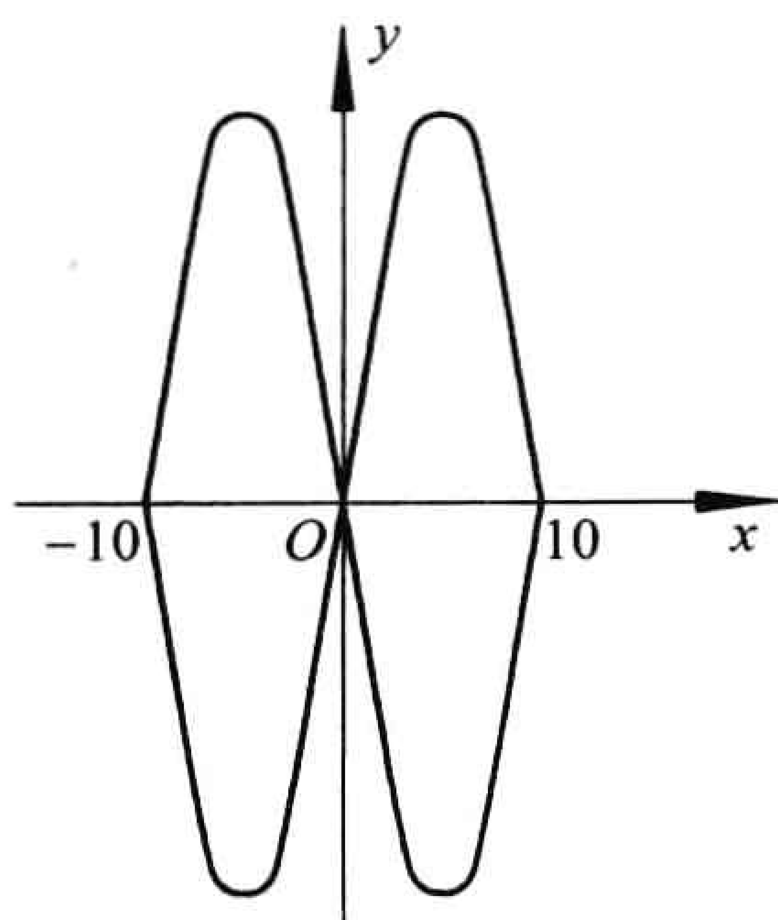


图 1.55

【271】 $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

解 当 $x=0,\pm 10$ 时，$y=0$.

将 $y=x$ 和 $y=\sqrt{100-x^2}$ 的图像上点的纵坐标相乘，即可描出图像. 如图 1.55 所示.

【272】 $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$ （蔓叶线）.

解 $y^2(10-x)=x^3$，如图 1.56 所示.

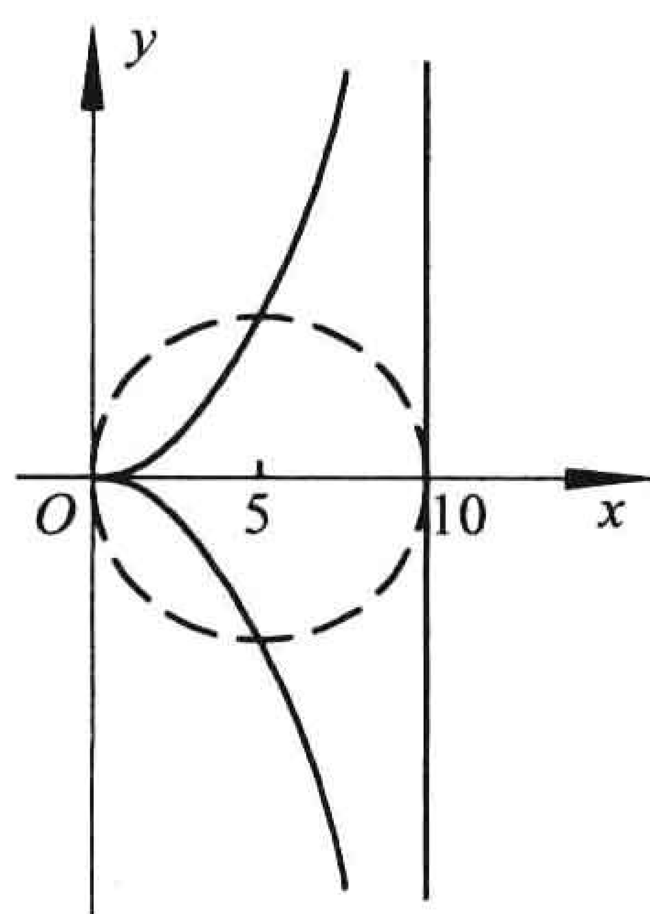


图 1.56

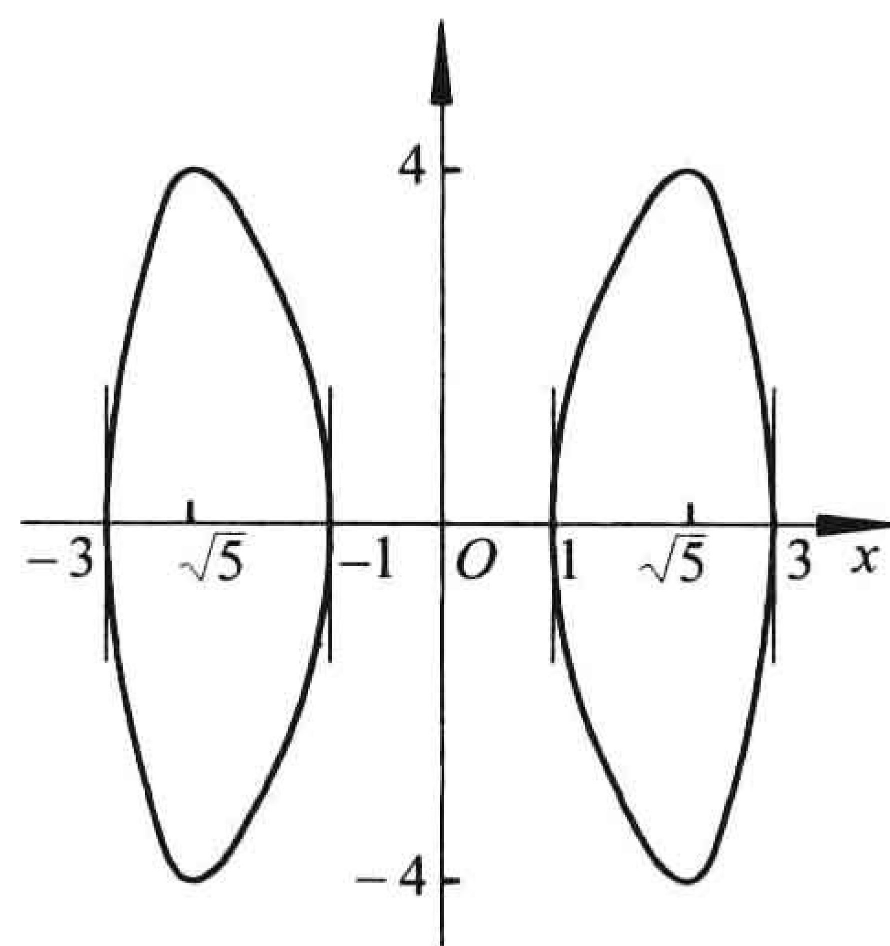


图 1.57

【273】 $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解 $y=\pm\sqrt{16-(x^2-5)^2}$. 如图 1.57 所示.

【274】 作幂函数 $y=x^n$ 当：(1) $n=1,3,5$； (2) $n=2,4,6$ 时的图像.

解 如图 1.58 所示.

【275】 作幂函数 $y=x^n$ 当：(1) $n=-1,-3$； (2) $n=-2,-4$ 时的图像.

解 如图 1.59 所示. 1. $y=\dfrac{1}{x}$， 2. $y=\dfrac{1}{x^2}$， 3. $y=\dfrac{1}{x^3}$， 4. $y=\dfrac{1}{x^4}$.

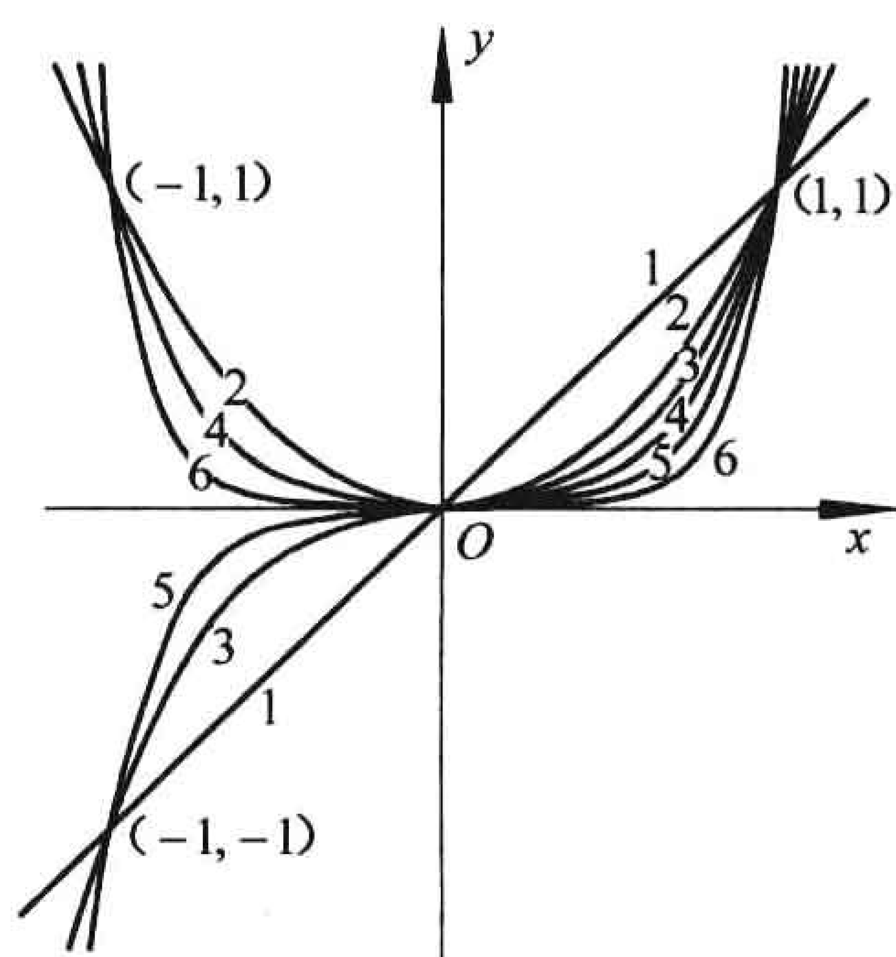


图 1.58

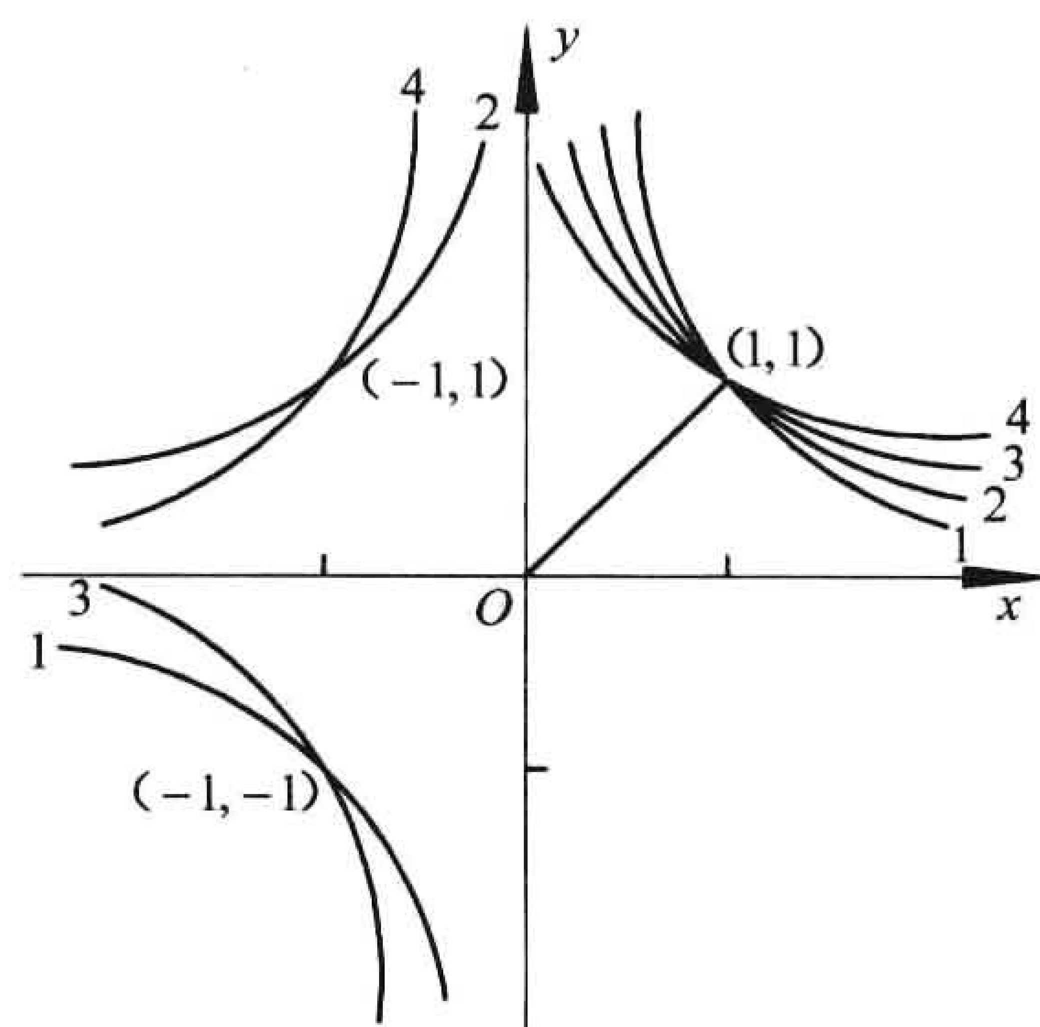


图 1.59

【276】 作根式 $y=\sqrt[m]{x}$ 当：(1) $m=2,4$； (2) $m=3,5$ 时的图像.

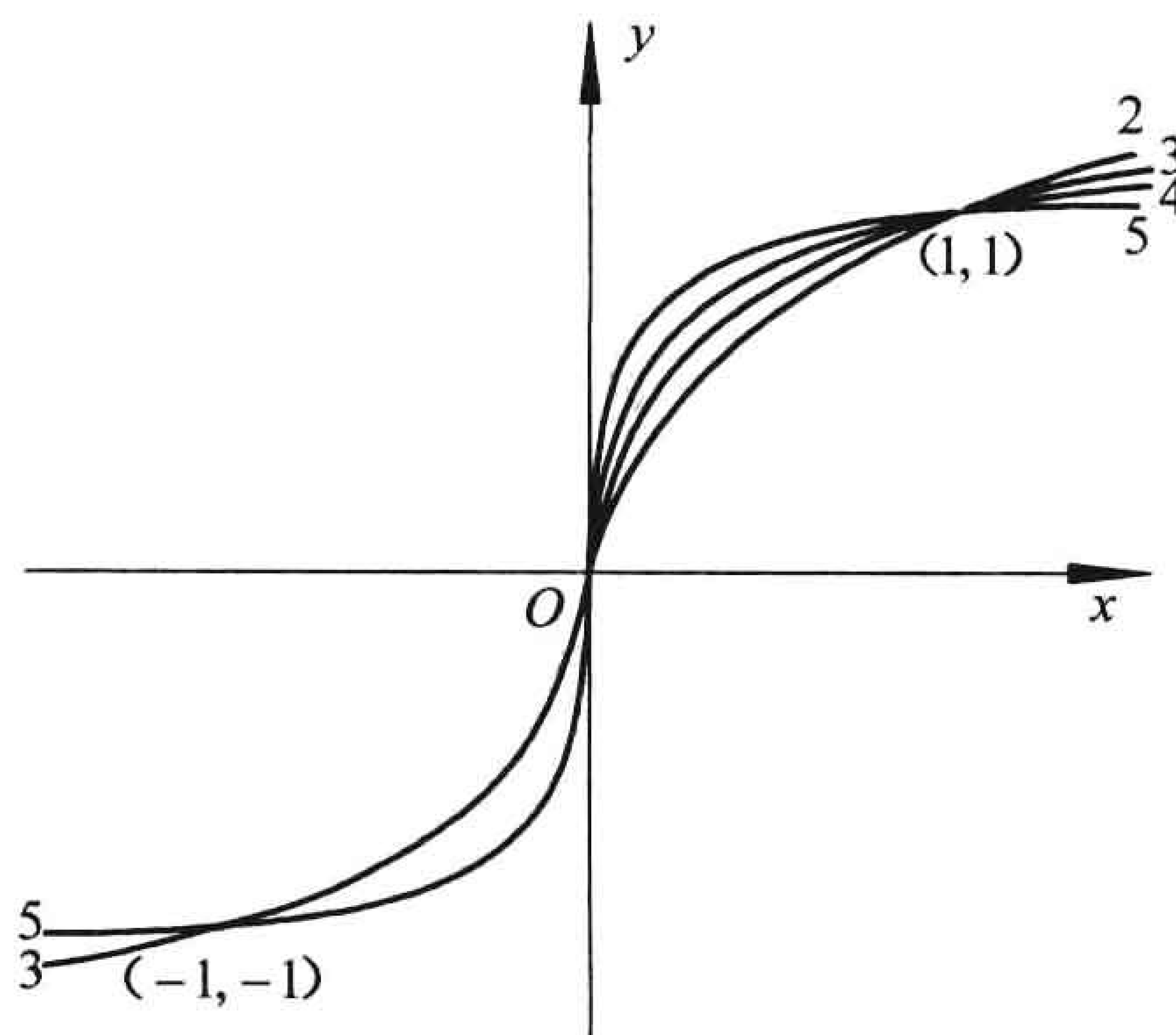


图 1.60

解 如图 1.60 所示.

【277】 设：(1)$m=2,k=1$；(2)$m=2,k=3$；(3)$m=3,k=1$；(4)$m=3,k=2$；(5)$m=3,k=4$；(6)$m=4,k=2$；(7)$m=4,k=3$.

作根式 $y=\sqrt[m]{x^k}$ 的图像.

解 将所给数据代入 $y=\sqrt[m]{x^k}$，可知：

(1)即 $y=\sqrt{x}$ 的图像，见图 1.60；

(2)$y=x\sqrt{x}$，如图 1.61 所示：1；

(3)即 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图像，见图 1.60；

(4)$y=\sqrt[3]{x^2}$，如图 1.61 所示：2；

(5)$y=x\sqrt[3]{x}$，如图 1.61 所示：3；

(6)即 $y=\sqrt{|x|}$ 的图像；

(7)$y=\sqrt[4]{x^3}$，如图 1.61 所示：4.

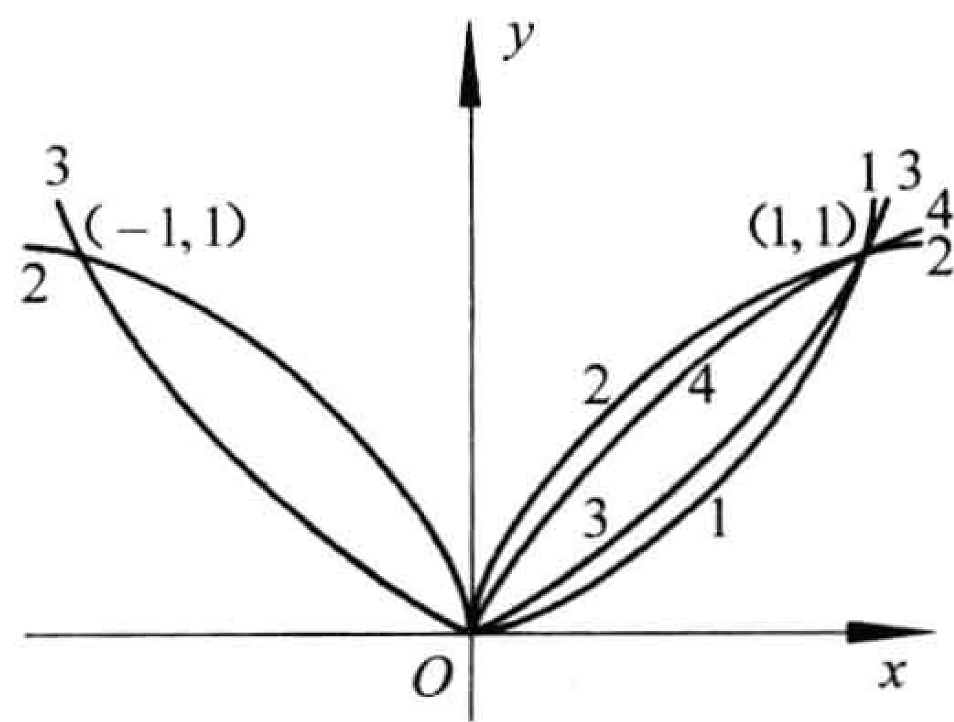


图 1.61

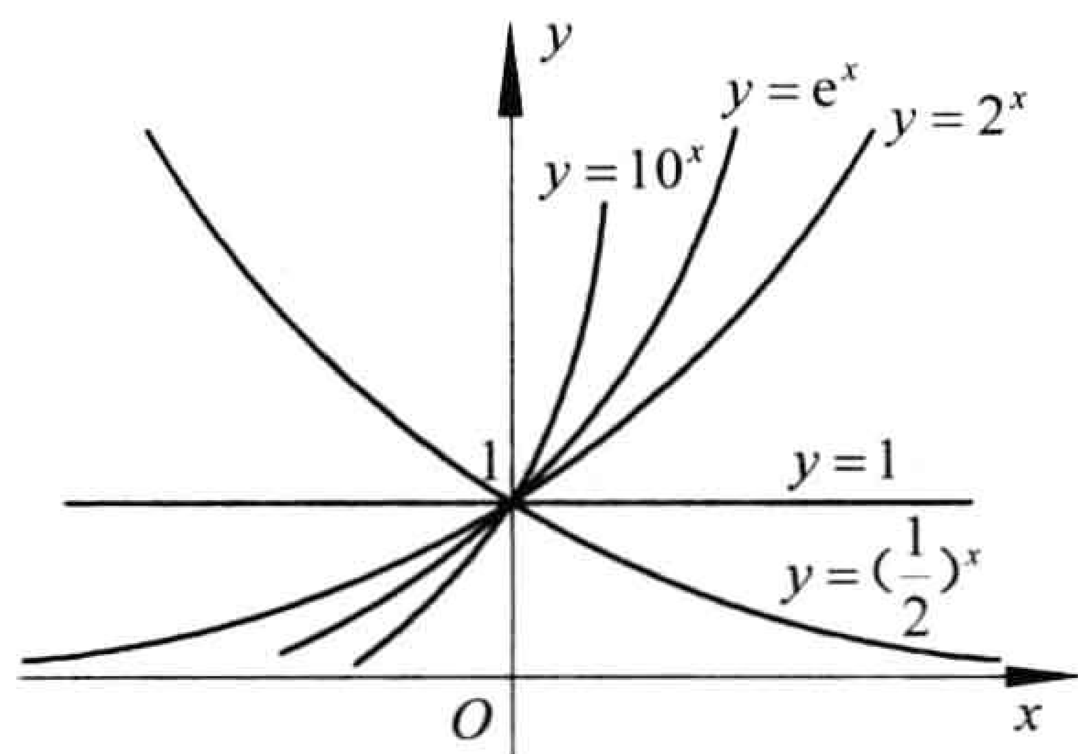


图 1.62

【278】 作指数函数 $y=a^x$ 当 $a=\frac{1}{2},1,2,\mathrm{e},10$ 时的图像.

解 如图 1.62 所示.

【279】 作复合指数函数 $y=\mathrm{e}^{y_1}$ 的图像，设：

(1) $y_1=x^2$； (2) $y_1=-x^2$； (3) $y_1=\frac{1}{x}$； (4) $y_1=\frac{1}{x^2}$； (5) $y_1=-\frac{1}{x^2}$； (6) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

解 (1) 如图 1.63 所示； (2) 如图 1.64 所示； (3) 如图 1.65 所示；
(4) 如图 1.66 所示； (5) 如图 1.67 所示； (6) 如图 1.68 所示.

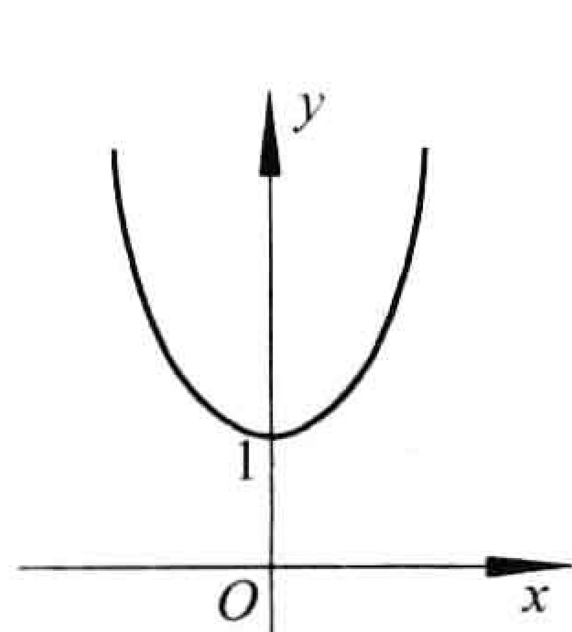


图 1.63

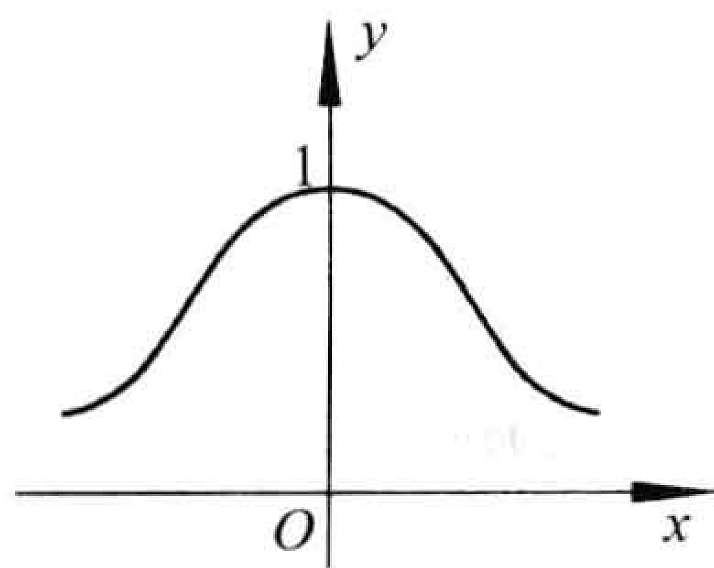


图 1.64

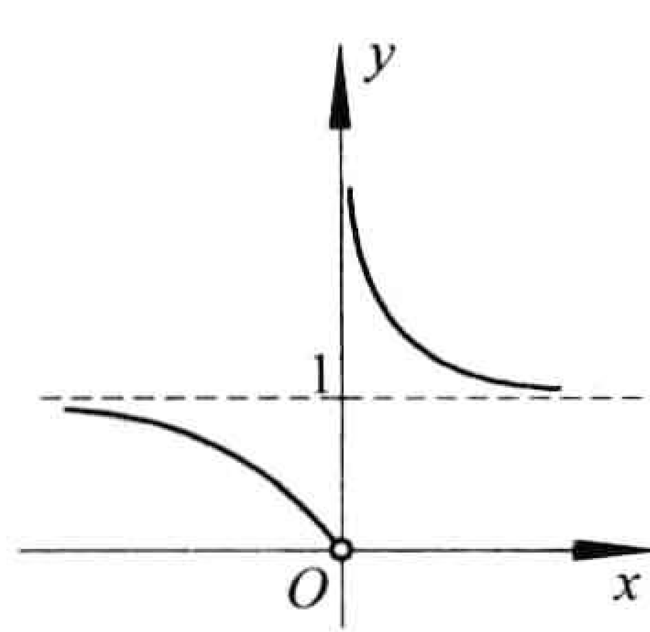


图 1.65

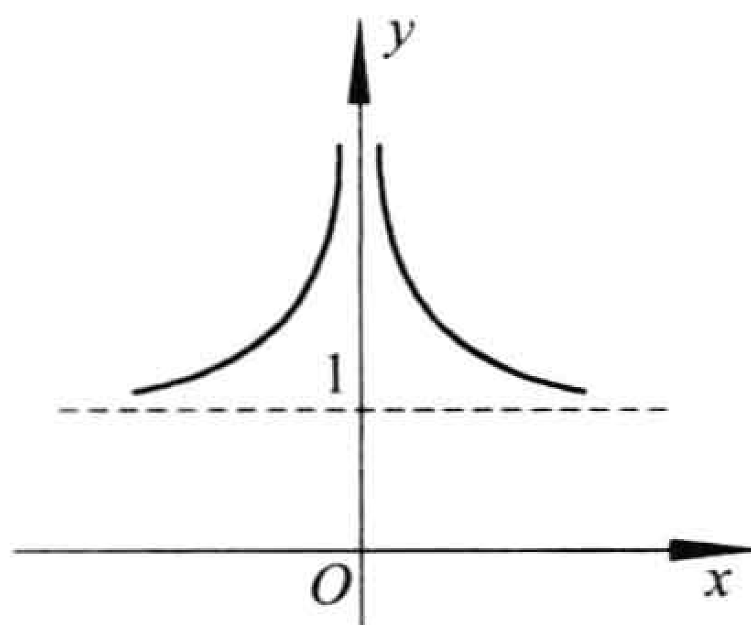


图 1.66

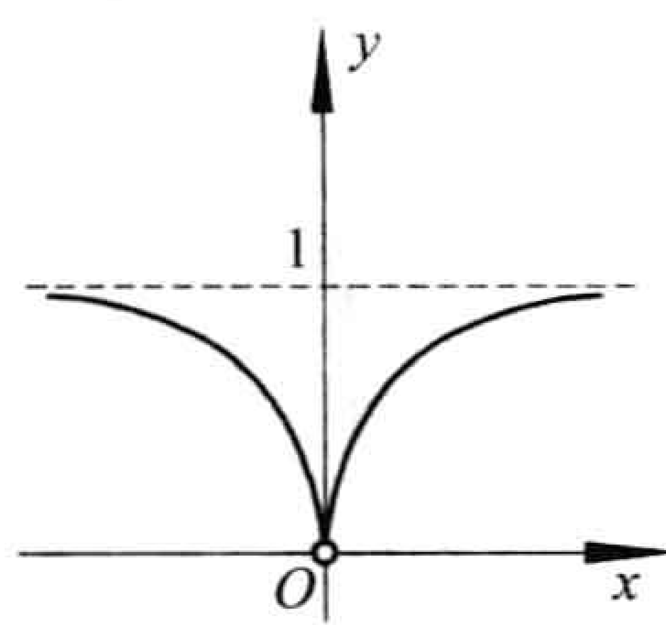


图 1.67

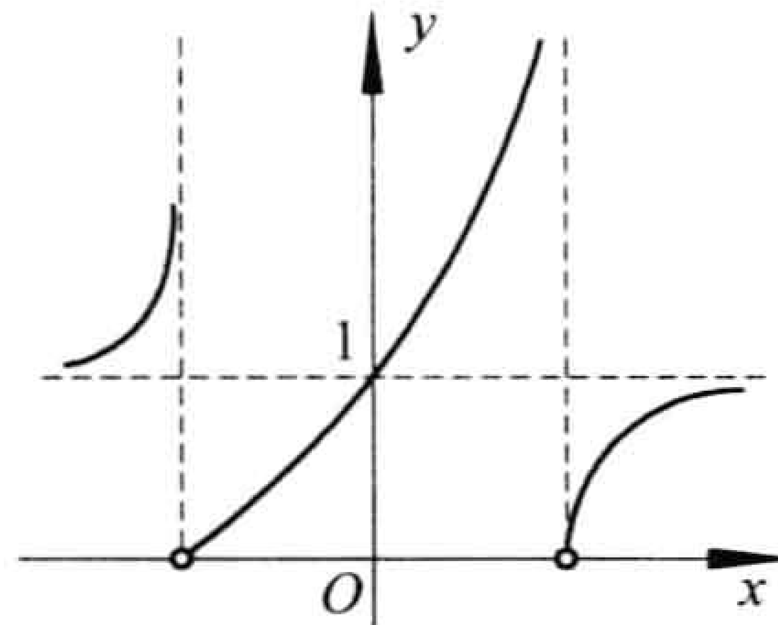


图 1.68

【280】 作对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a=\frac{1}{2},2,\mathrm{e},10$ 时的图像.

解 如图 1.69 所示.

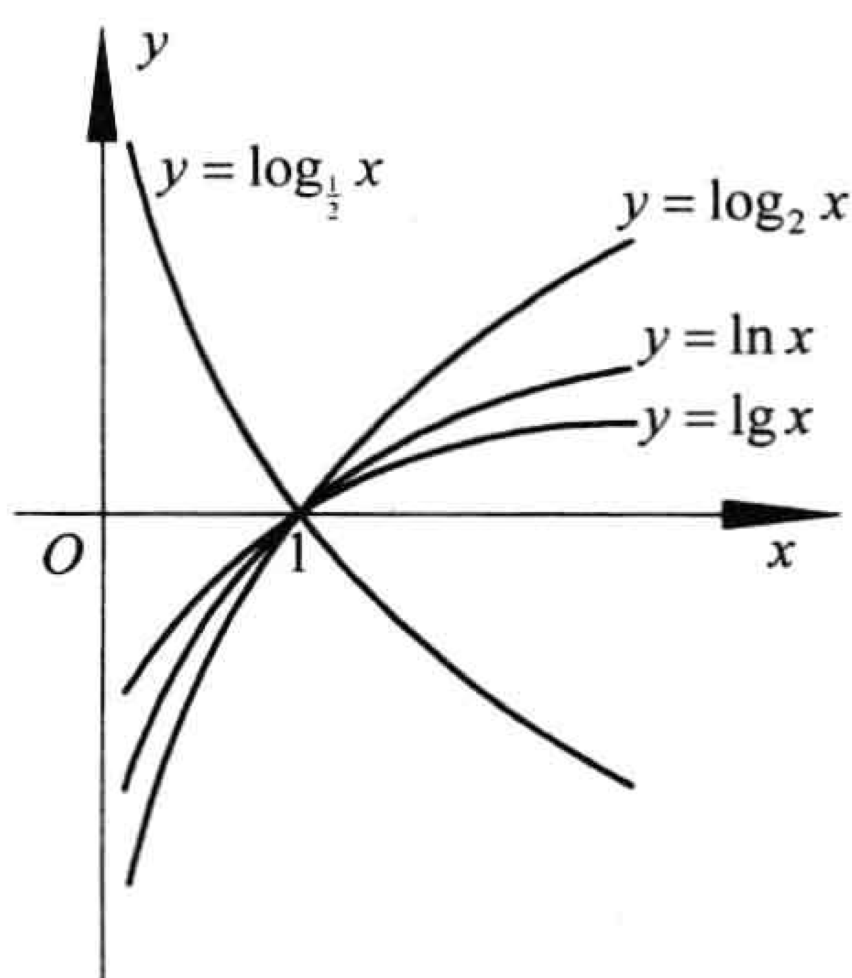


图 1.69

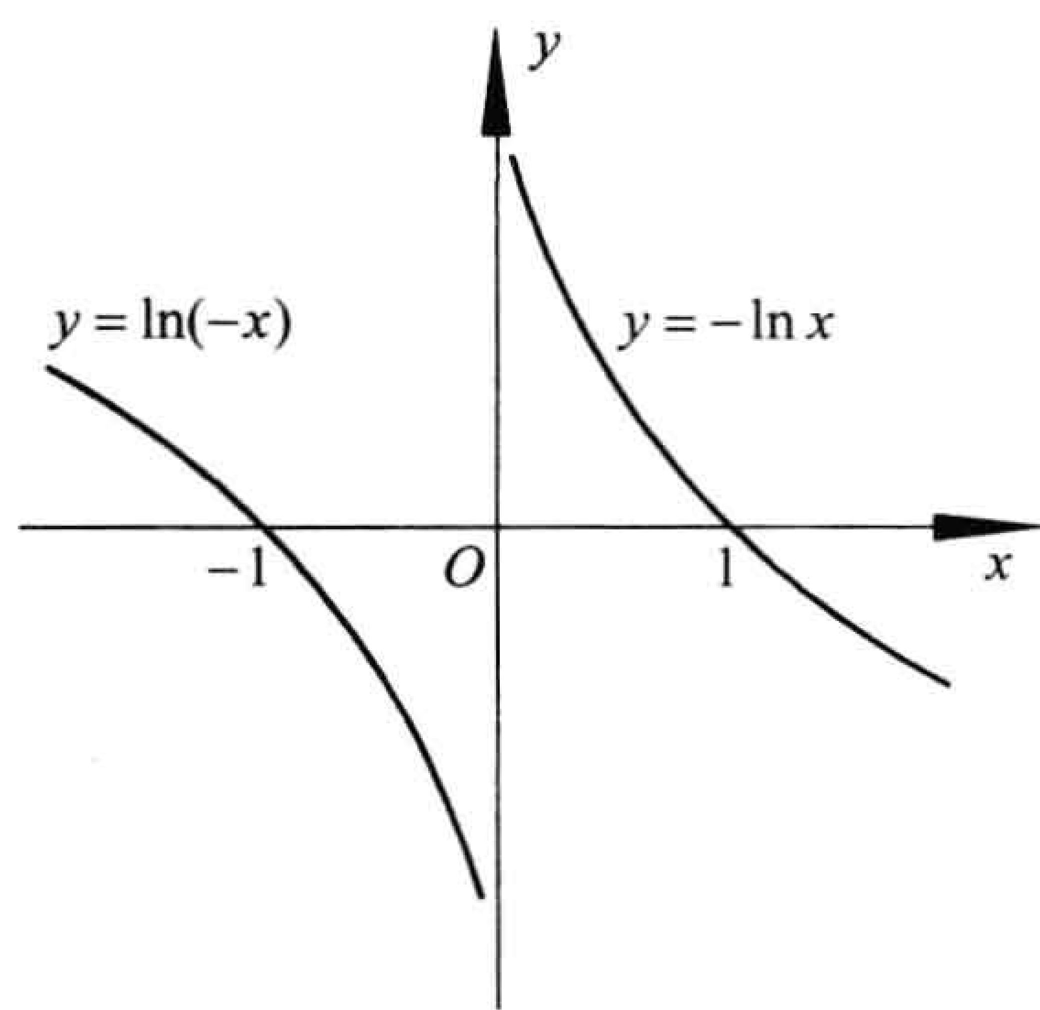


图 1.70

【281】 作下列函数的图像：(1) $y=\ln(-x)$； (2) $y=-\ln x$.

解 如图 1.70 所示.

【282】 设：

(1) $y_1=1+x^2$； (2) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$； (3) $y_1=\dfrac{1-x}{1+x}$； (4) $y_1=\dfrac{1}{x^2}$； (5) $y_1=1+e^x$.

作出对数复合函数 $y=\ln y_1$ 的图像.

解 (1)如图 1.71 所示；

(2)存在域：$x>3$ 或 $x<1$. $y=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|$，将此三个函数的图像叠加即得，如图 1.72 所示；

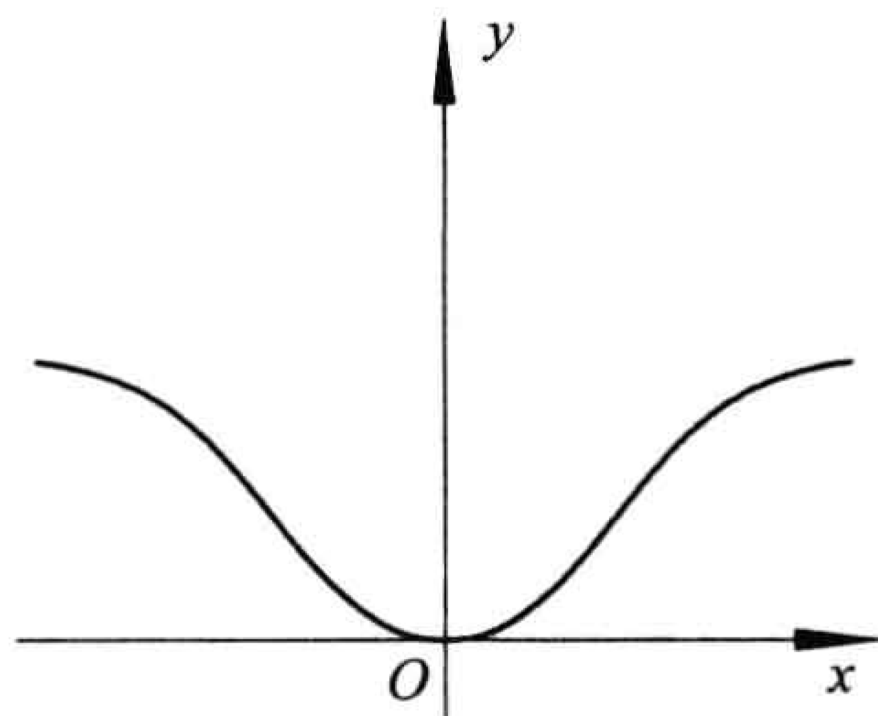


图 1.71

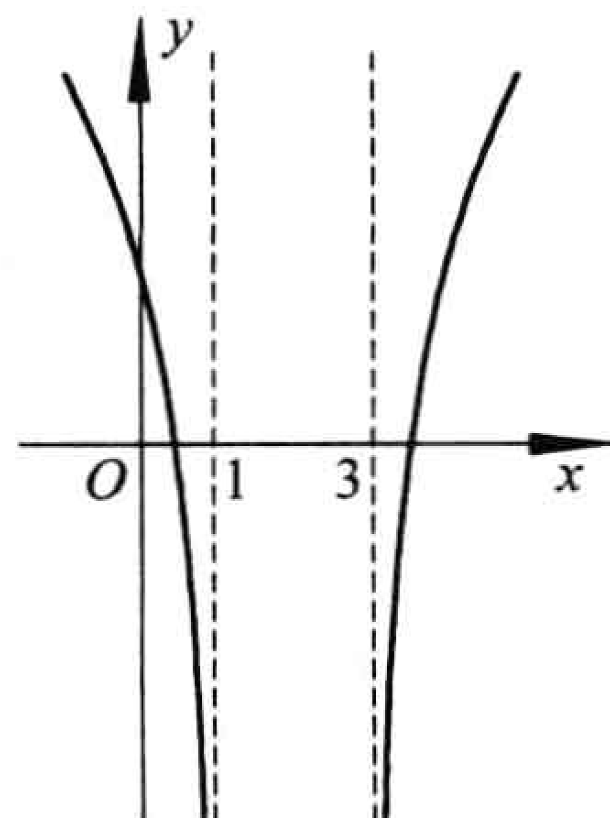


图 1.72

(3) $y=\ln(1-x)-\ln(1+x)$，将 $y=\ln(1-x)$ 及 $y=-\ln(1+x)$ 的图像叠加即得，如图 1.73 所示($-1<x<1$)；

(4) $y=\ln\dfrac{1}{x^2}$，如图 1.74 所示，图像关于 Oy 轴对称；

(5)如图 1.75 所示.

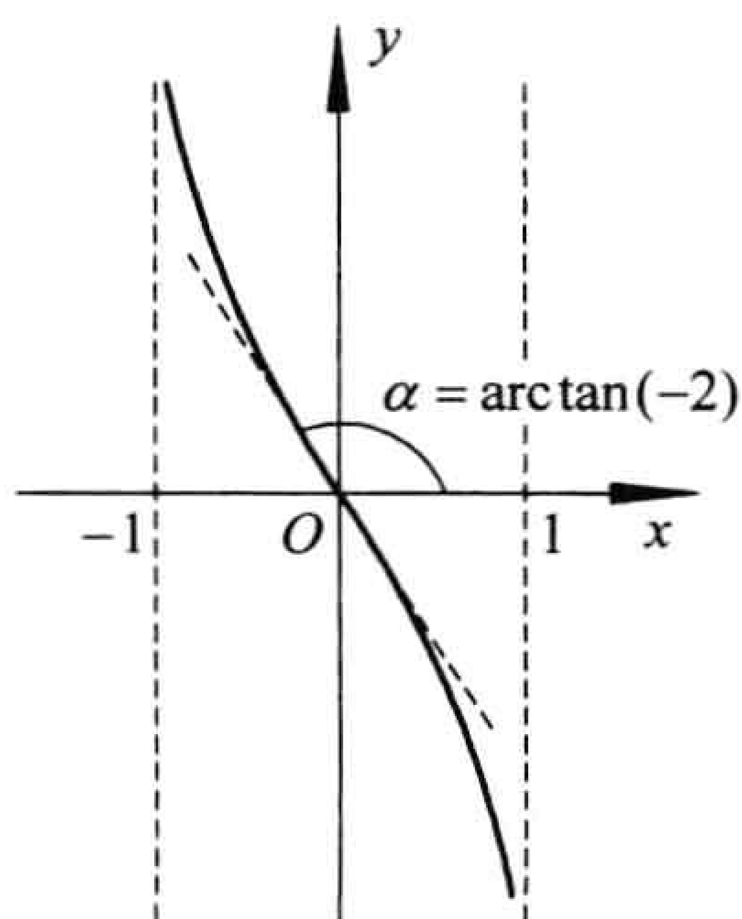


图 1.73

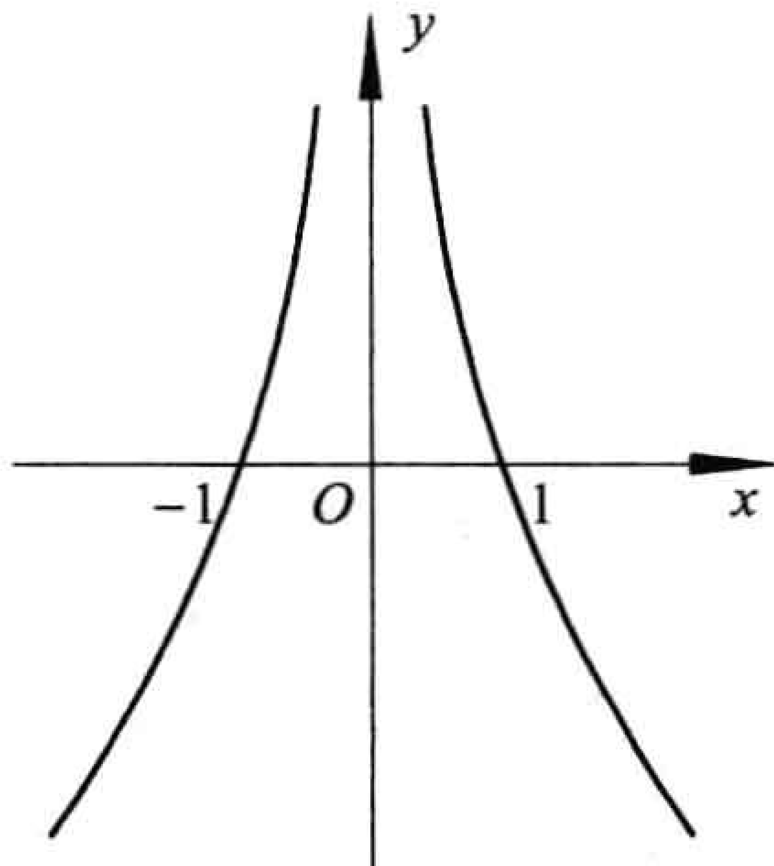


图 1.74

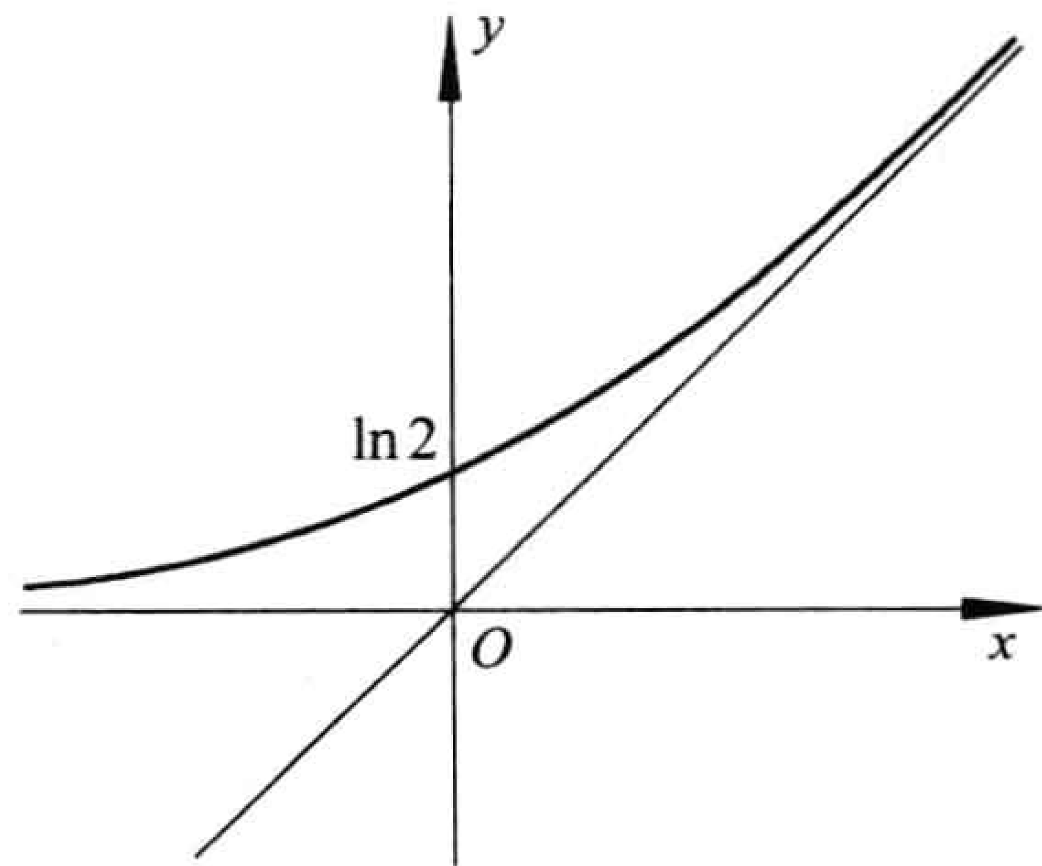


图 1.75

【283】 作函数 $y=\log_x 2$ 的图像.

解 如图 1.76 所示.

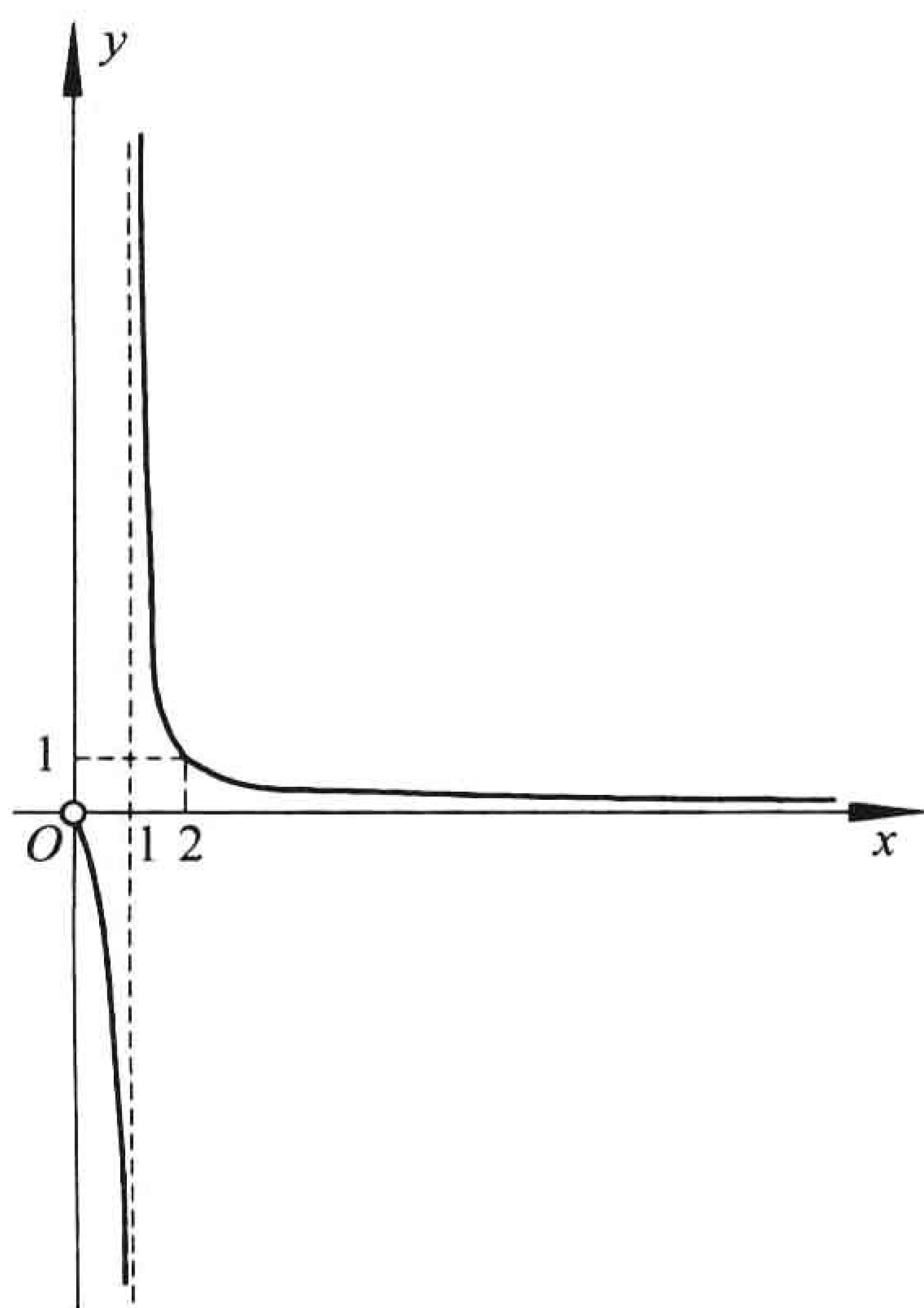


图 1.76

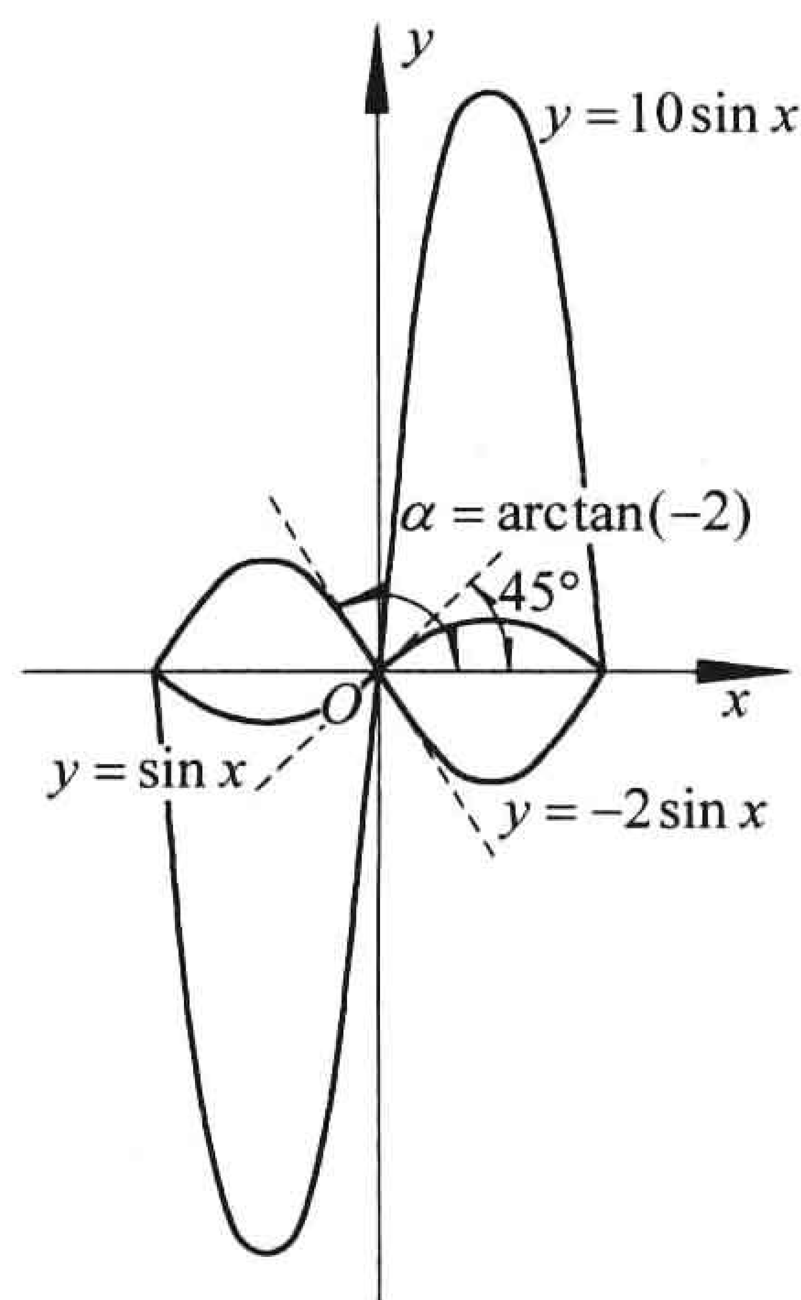


图 1.77

【284】 作函数 $y=A\sin x$ 当 $A=1,10,-2$ 时的图像.

解 如图 1.77 所示.

【285】 作函数 $y=\sin(x-x_0)$ 当 $x_0=0$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π 时的图像.

解 只要将 $y=\sin x$ 的图像向右平移距离 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π 即得，如图 1.78 所示.

1. $y=\sin x$； 2. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$； 3. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$； 4. $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$； 5. $y=\sin(x-\pi)$.

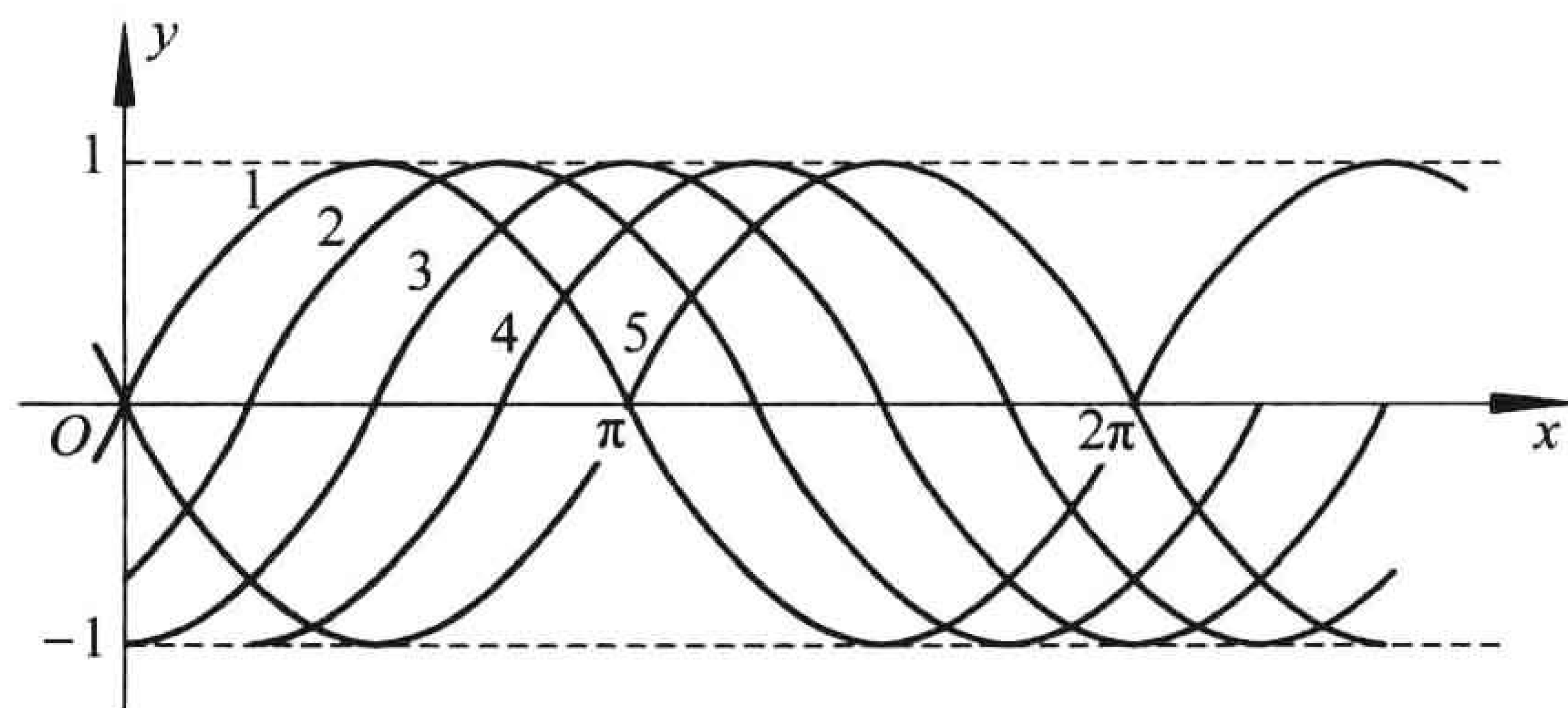


图 1.78

【286】 作函数 $y=\sin nx$ 的图像. 设 $n=1,2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

解 如图 1.79 所示. 1. $y=\sin x$； 2. $y=\sin 2x$； 3. $y=\sin 3x$； 4. $y=\sin\frac{1}{2}x$； 5. $y=\sin\frac{1}{3}x$.

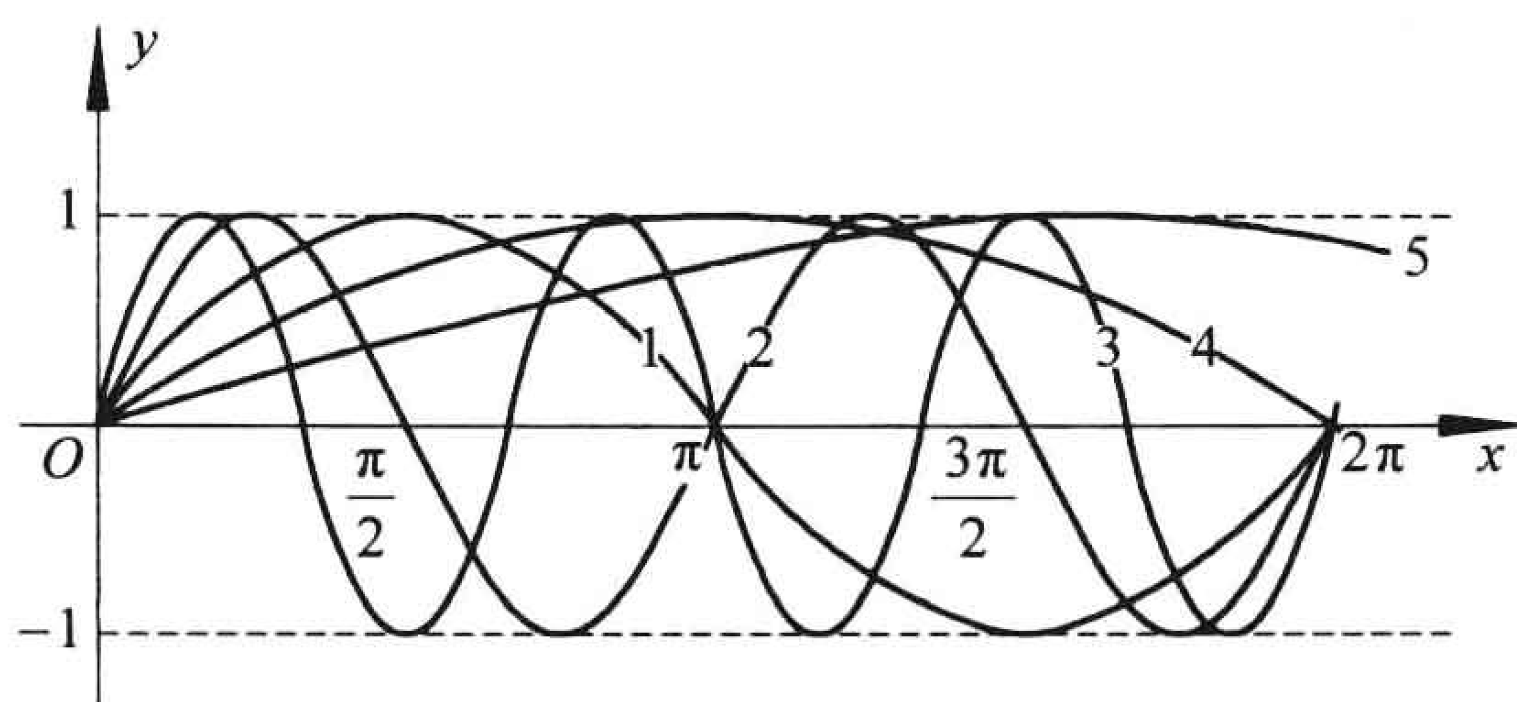


图 1.79

【287】 把函数 $y=a\cos x+b\sin x$ 化为以下形式：$y=A\sin(x-x_0)$，再作它的图像.

研究例子 $y=6\cos x+8\sin x$.

提示 注意，在式 $y=A\sin(x-x_0)$ 中

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\ (a^2+b^2\neq 0),\quad \sin x_0=-\frac{a}{A},\quad \cos x_0=\frac{b}{A}.$$

于是，$y=a\cos x+b\sin x$ 的图像可经下面两个步骤完成：先把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$，然后再从纵轴"伸长"A 倍.

注意 x_0 的正负及 $A<1$ 或 $A<1$.

解 $y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$，由于

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1,\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1 \text{ 及} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

故可令

$$\sin x_0=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos x_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1}$$

于是，

$$y=A\sin(x-x_0) \tag{2}$$

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2}\ (a^2+b^2\neq 0)$，$x_0$ 适合(1)式.

(2)式图像是这样作的：先把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$（若 $x_0>0$ 时，则向右移；若 $x_0<0$ 时向左移），然后再从纵轴"伸长"A 倍（当 $A<1$ 时为压缩 $\frac{1}{A}$ 倍）.

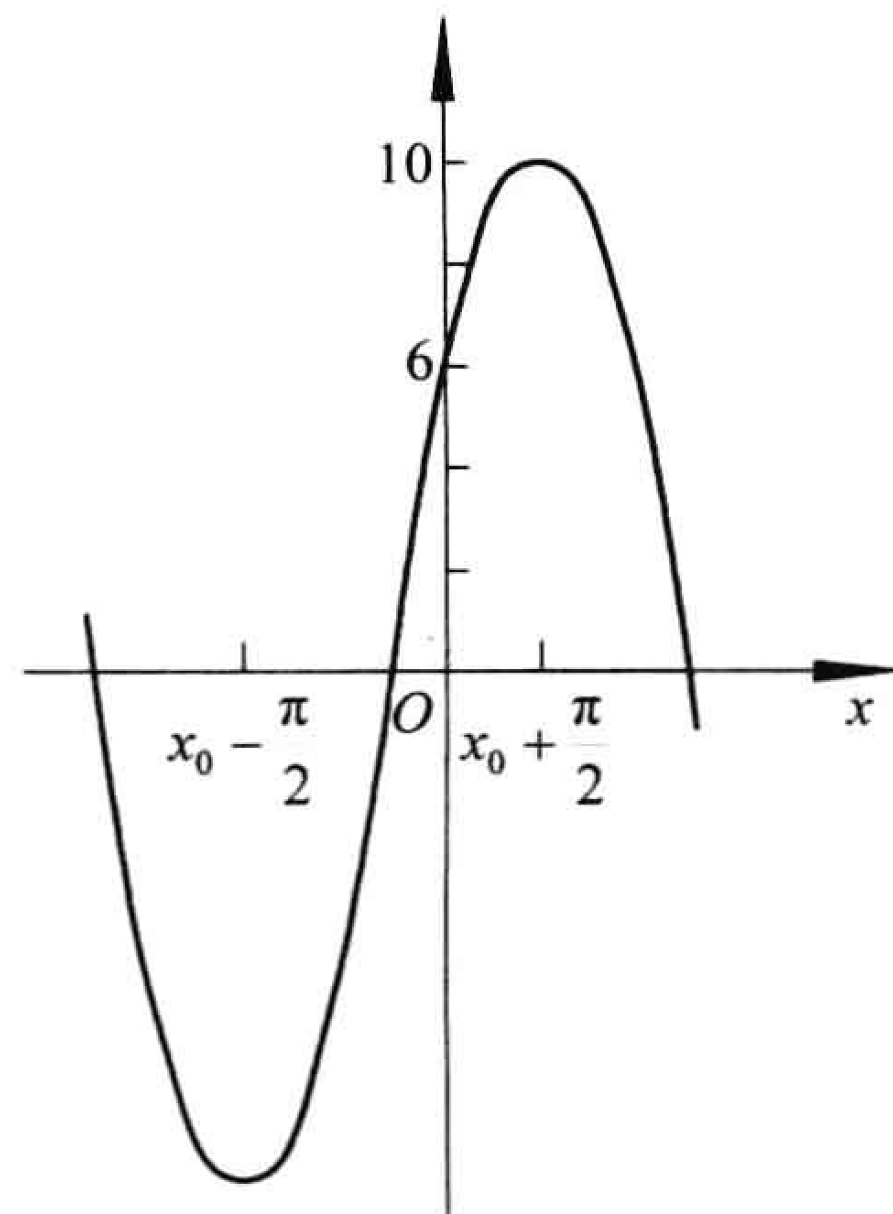


图 1.80

对于例子

$$y=6\cos x+8\sin x,\qquad A=\sqrt{6^2+8^2}=10,$$

$$\sin x_0=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5},\qquad \cos x_0=\frac{4}{5},\quad x_0=-\arctan\frac{3}{4},$$

如图 1.80 所示.

作下列三角函数的图像：

【288】 $y=\cos x$.

解 如图 1.81 所示.

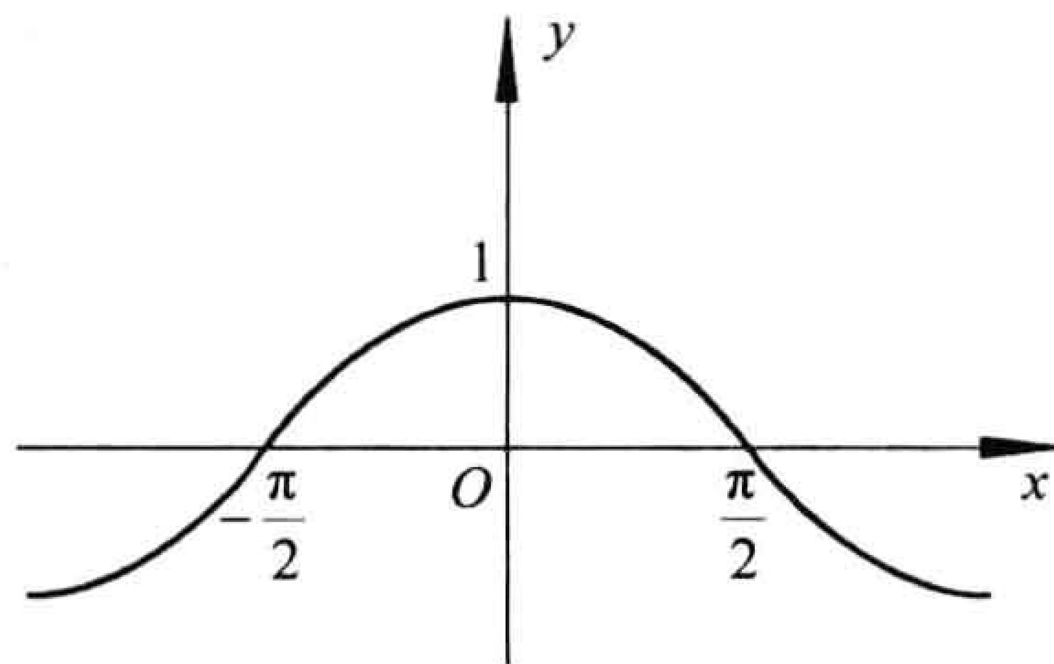


图 1.81

【289】 $y=\tan x$.

解 如图 1.82 所示.

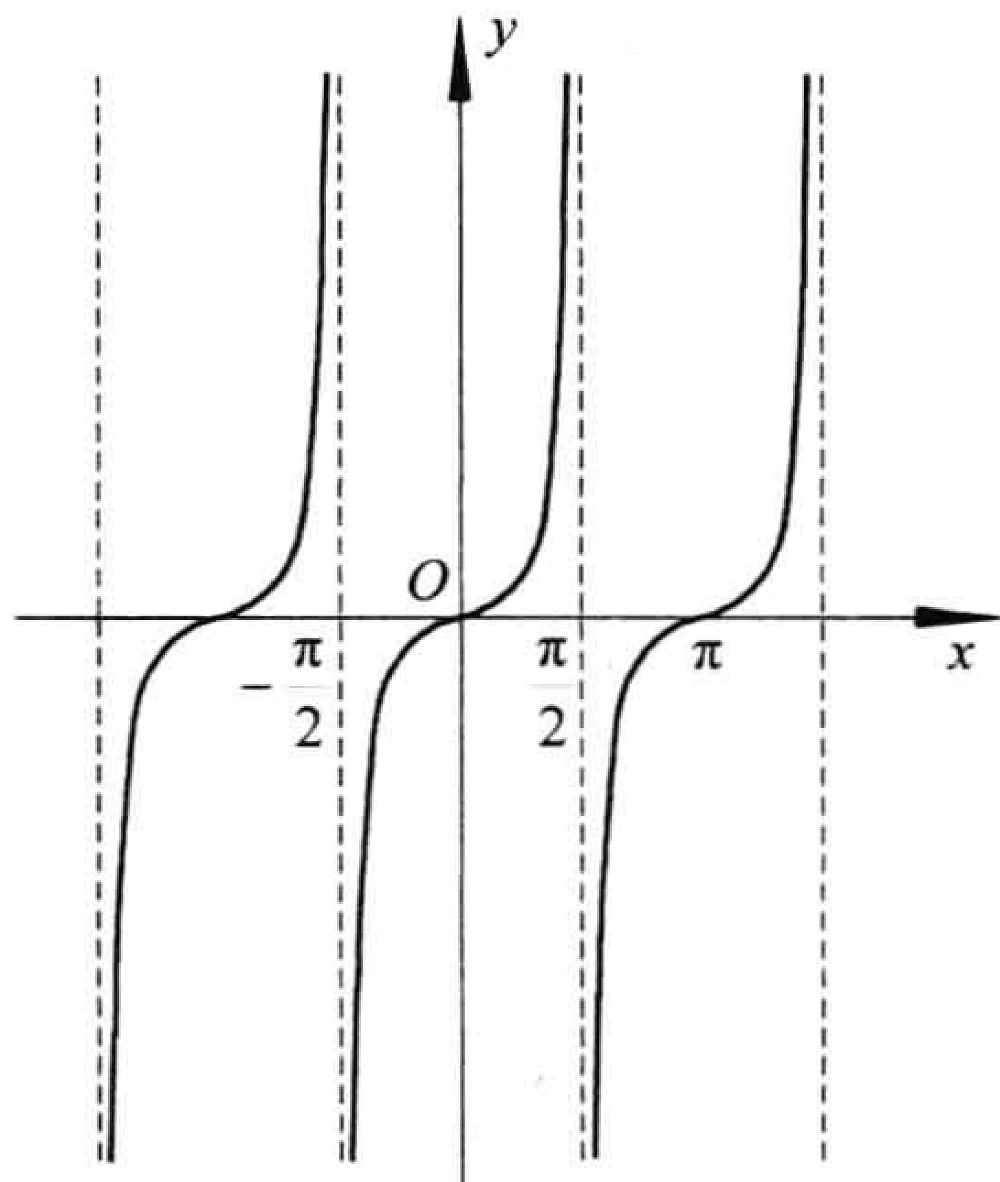


图 1.82

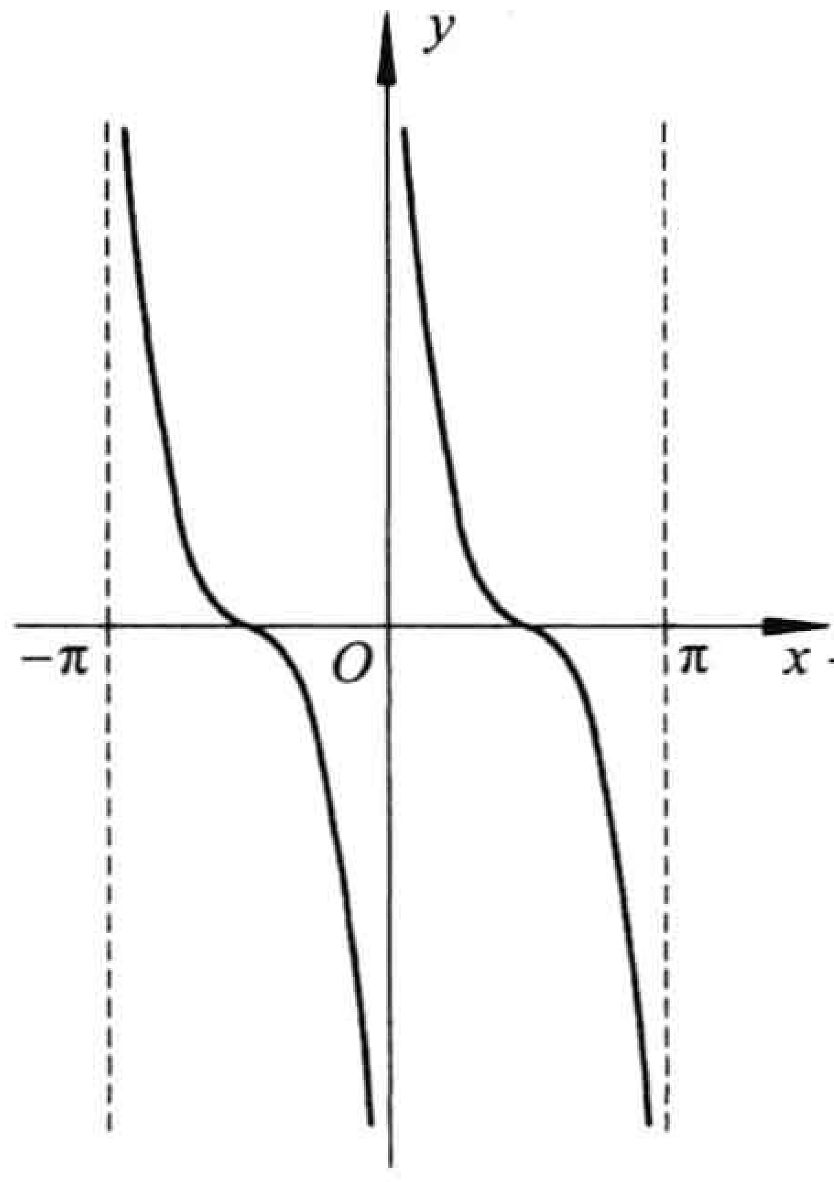


图 1.83

【290】 $y=\cot x$.

解 如图 1.83 所示.

【291】 $y=\sec x$.

解 如图 1.84 所示.

【292】 $y=\csc x$.

解 如图 1.85 所示.

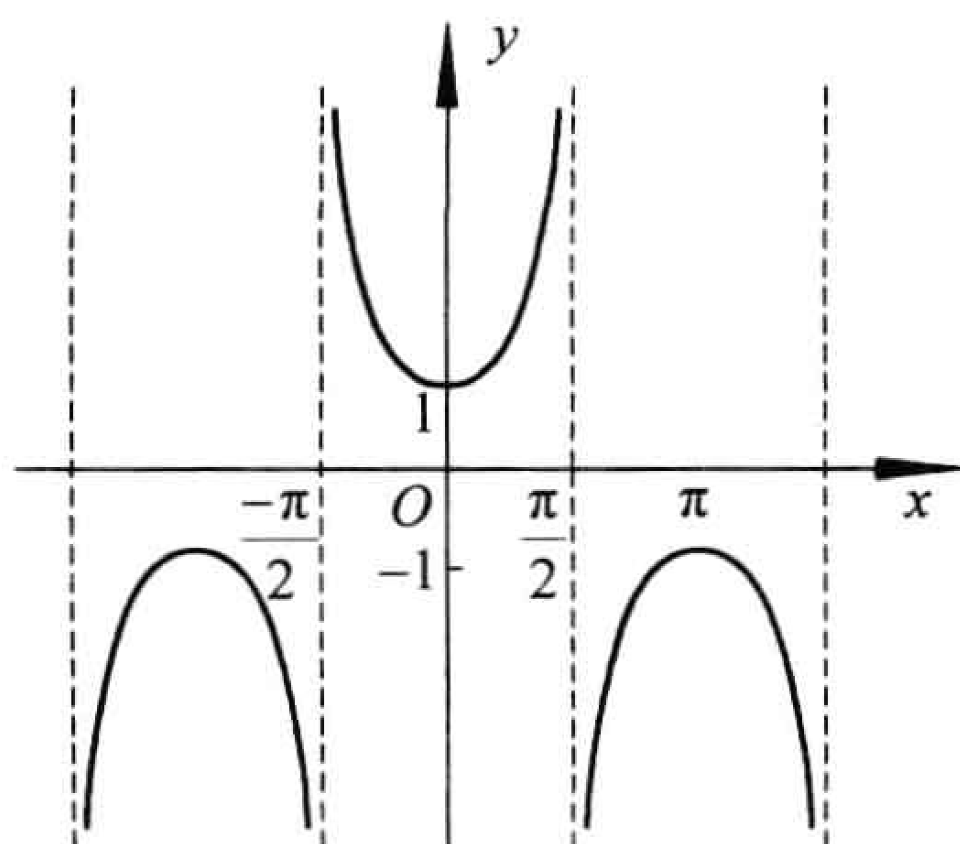


图 1.84

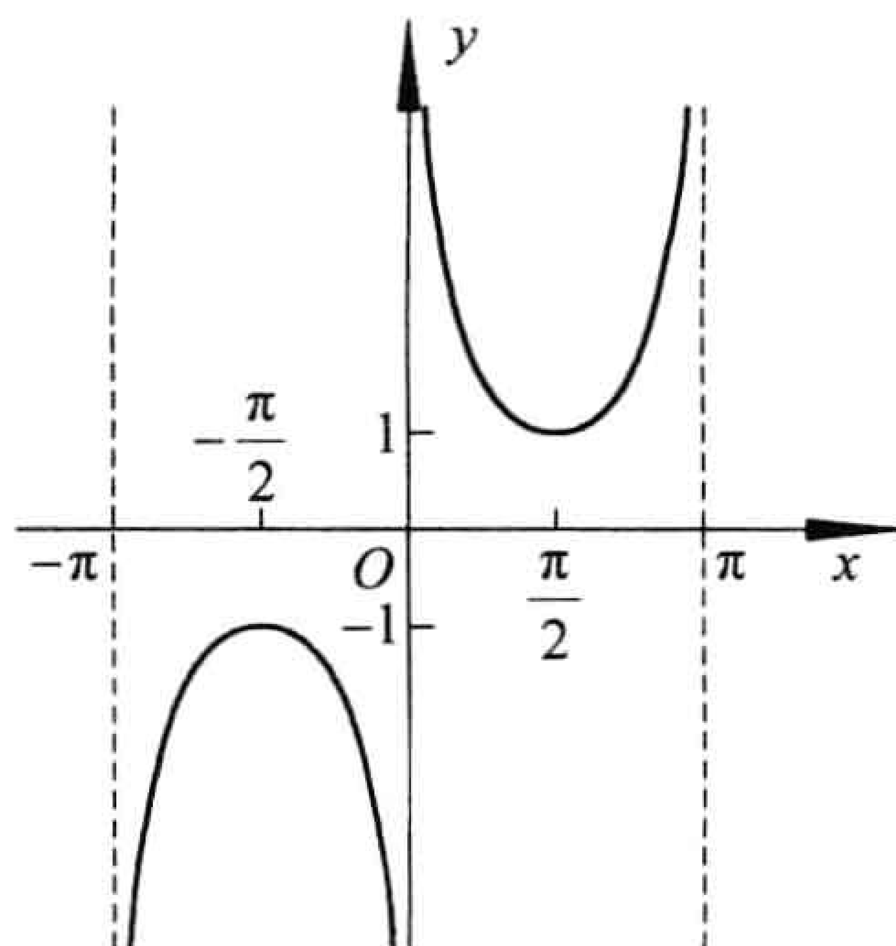


图 1.85

【293】 $y=\sin^2 x$

解 如图 1.86 所示.

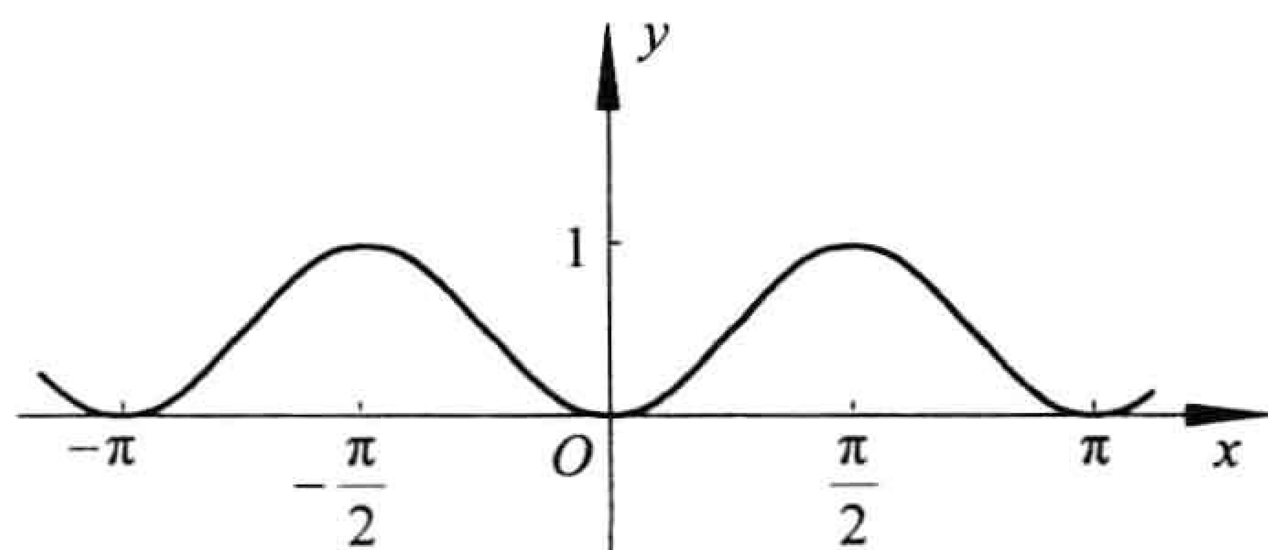


图 1.86

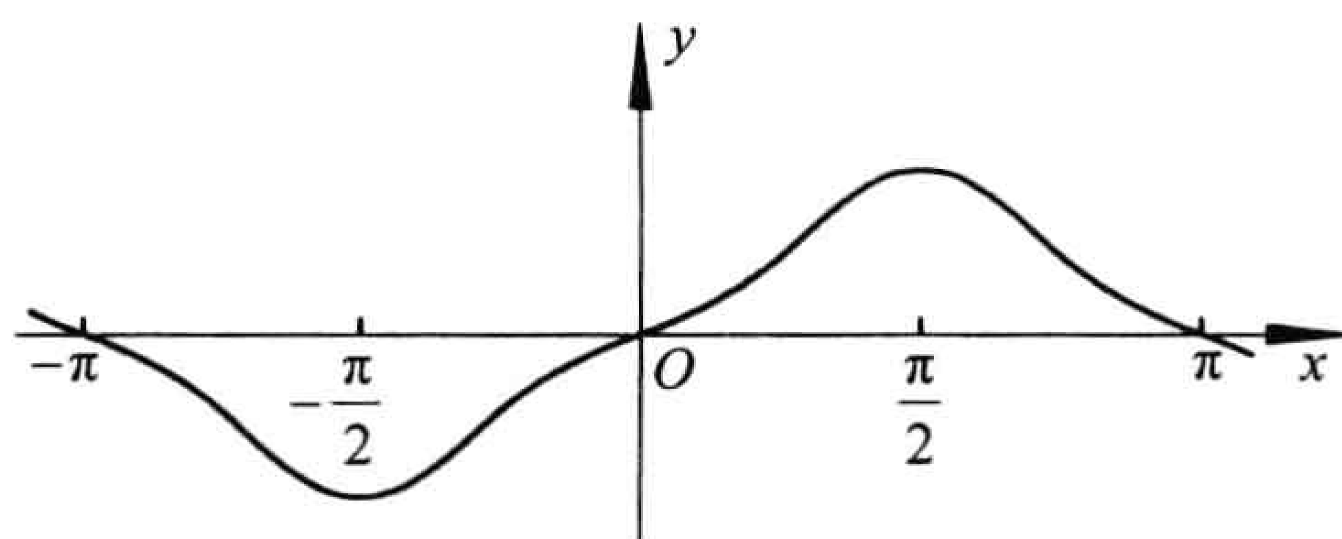


图 1.87

【294】 $y=\sin^3 x$.

解 如图 1.87 所示.

【295】 $y=\cot^2 x$.

解 如图 1.88 所示.

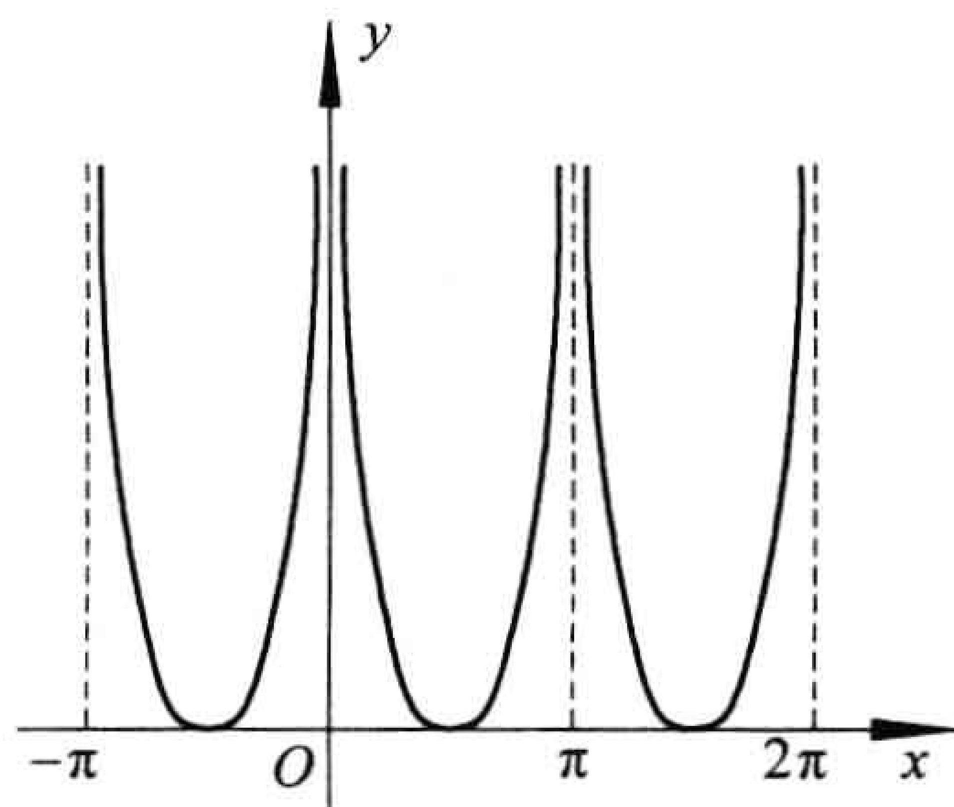


图 1.88

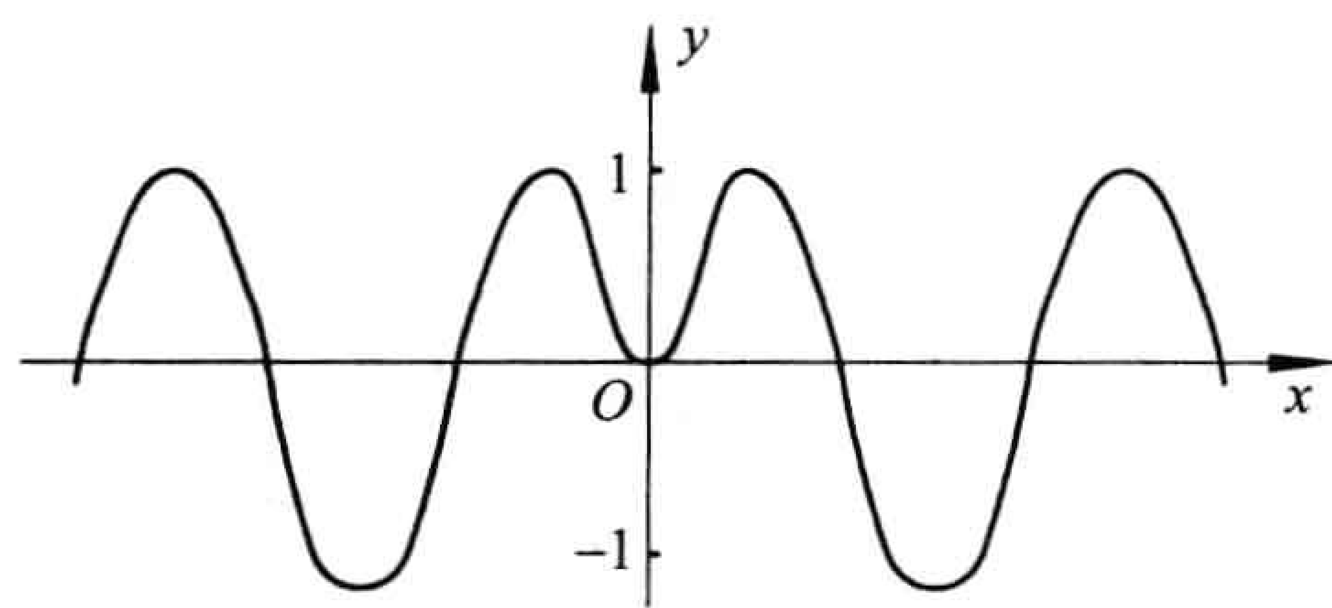


图 1.89

【296】 $y=\sin x\sin 3x$.

解 $y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$. 图像关于 Oy 轴对称. 周期为 π. 将 $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y=-\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图像叠加即得. 如图 1.89 所示.

【297】 $y=\pm\sqrt{\cos x}$.

解 图像关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称，是以 2π 为周期的周期函数，如图 1.90 所示.

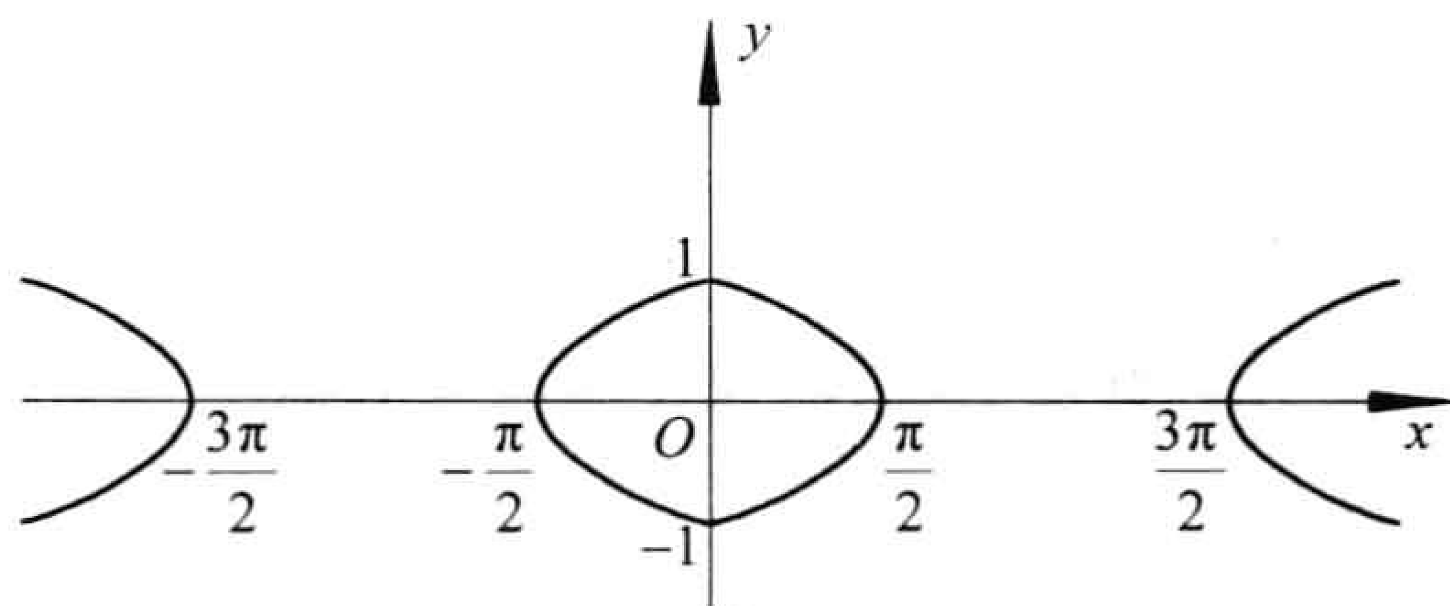


图 1.90

作下列函数的图像：

【298】 $y=\sin x^2$.

解题思路 图像关于 Oy 轴对称. $f(\sqrt{n\pi})=0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$. 由于 $\sin x^2<x^2$，故曲线位于抛物线 $y=x^2$ 的下方.

解 图像关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi})=f(\sqrt{2\pi})=\cdots=f(\sqrt{n\pi})=0.$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$，所以，曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的数列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2<x^2$，我们知道这条曲线位于抛物线 $y=x^2$ 的下方. 如图 1.91 所示.

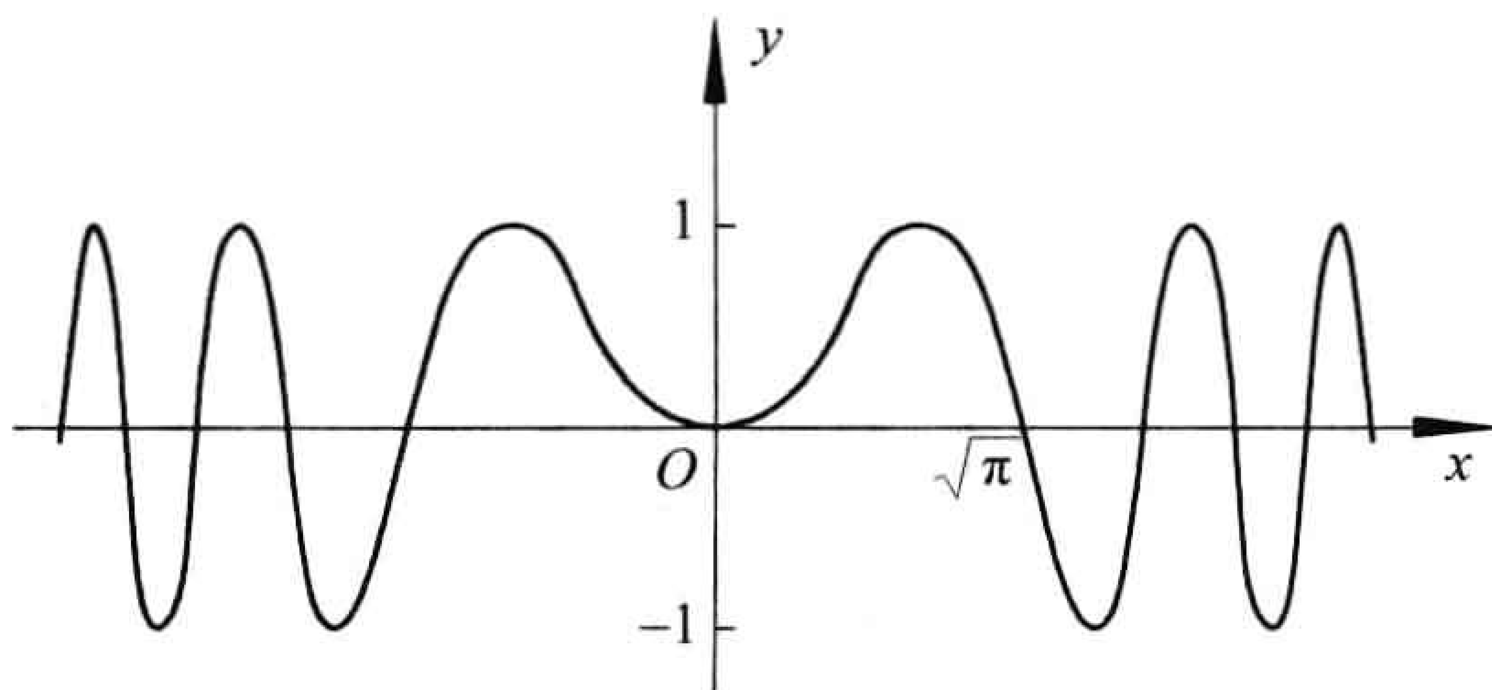


图 1.91

【299】 $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

解题思路 $-1\leqslant y\leqslant 1$. $y=0$ 为渐近线. 图像关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于原点 O.

解 $-1\leqslant y\leqslant 1$. $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，$y=0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\dfrac{2}{\pi}$ 时，则 $\dfrac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\dfrac{\pi}{2}$，而 y 由 0 增到 1；但当 x 由 $\dfrac{2}{\pi}$ 减小到 $\dfrac{2}{3\pi}$，则 $\dfrac{1}{x}$ 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 增大到 $\dfrac{3\pi}{2}$，而 y 由 1 减小到 -1. 当 $x=\dfrac{1}{\pi}$ 时，$y=0$ 等. 因为 y 是奇函数，故图像关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于 O 点，而在点 $x=0$ 处，函数 y 没有定义. 如图 1.92 所示.

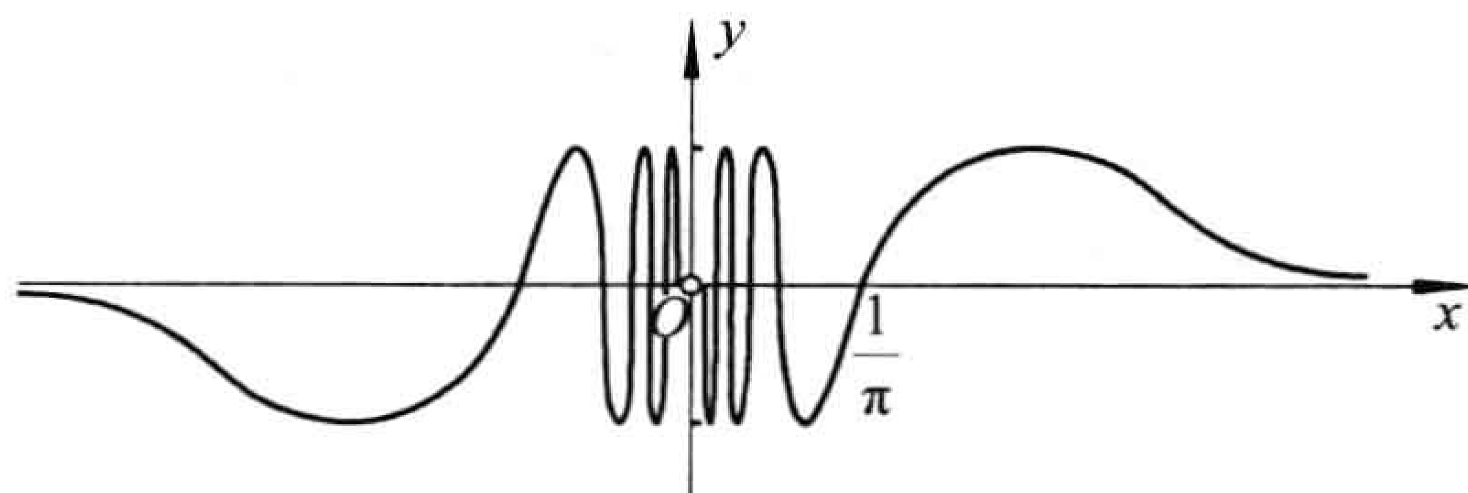


图 1.92

【300】 $y=x\cos\dfrac{\pi}{x}$.

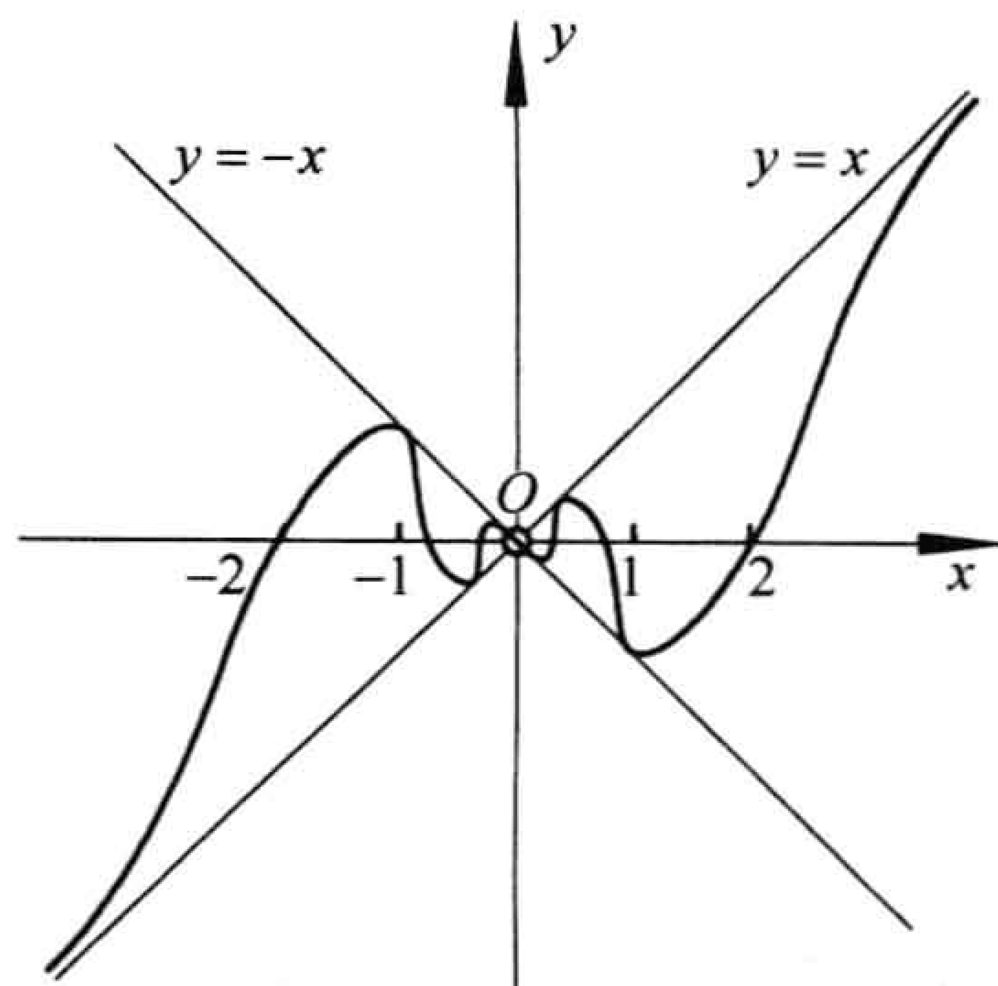


图 1.93

解 $-x\leqslant y\leqslant x$. $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$.

当 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $x>2$ 时，y 单调增加，因为 y 是奇函数，故图像关于原点对称．而在点 $x=0$ 处，函数 y 没有定义.

当 x 无限接近 0 时，函数作无限次衰减摆动，并凝聚于 O 点，如图 1.93 所示.

【301】 $y=\tan\dfrac{\pi}{x}$.

解 当 $x=\dfrac{1}{k}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $x\to\dfrac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y\to\infty$.

当 $x>2$ 时，$y>0$，且当 $x\to+\infty$时，$y\to0$. 因为 y 为奇函数，故图像关于原点对称.

当 $x\to0$ 时，图像凝聚于 O 点，而在点 $x=\dfrac{2}{2k+1}$及 0 处，函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

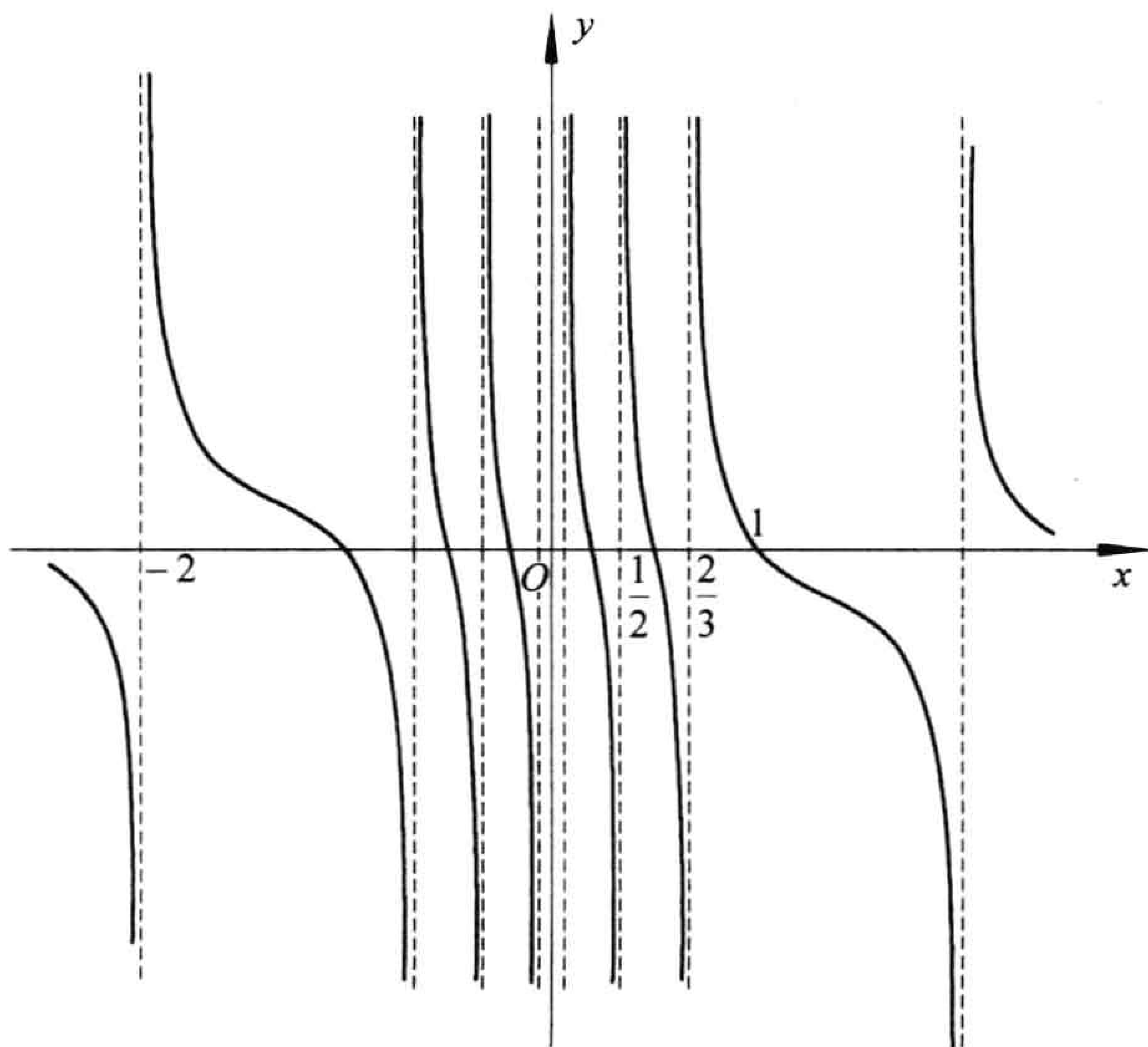


图 1.94

【302】 $y=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 先作 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$的图像. 因为 y 为偶函数，故图像关于 Oy 轴对称.

当 $x=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=\pm x$. 当 $x=\dfrac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $x>\dfrac{2}{\pi}$时，y 单调增加，且有

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1^{*)}.$$

如图 1.95 所示(在点 $x=0$ 处无定义).

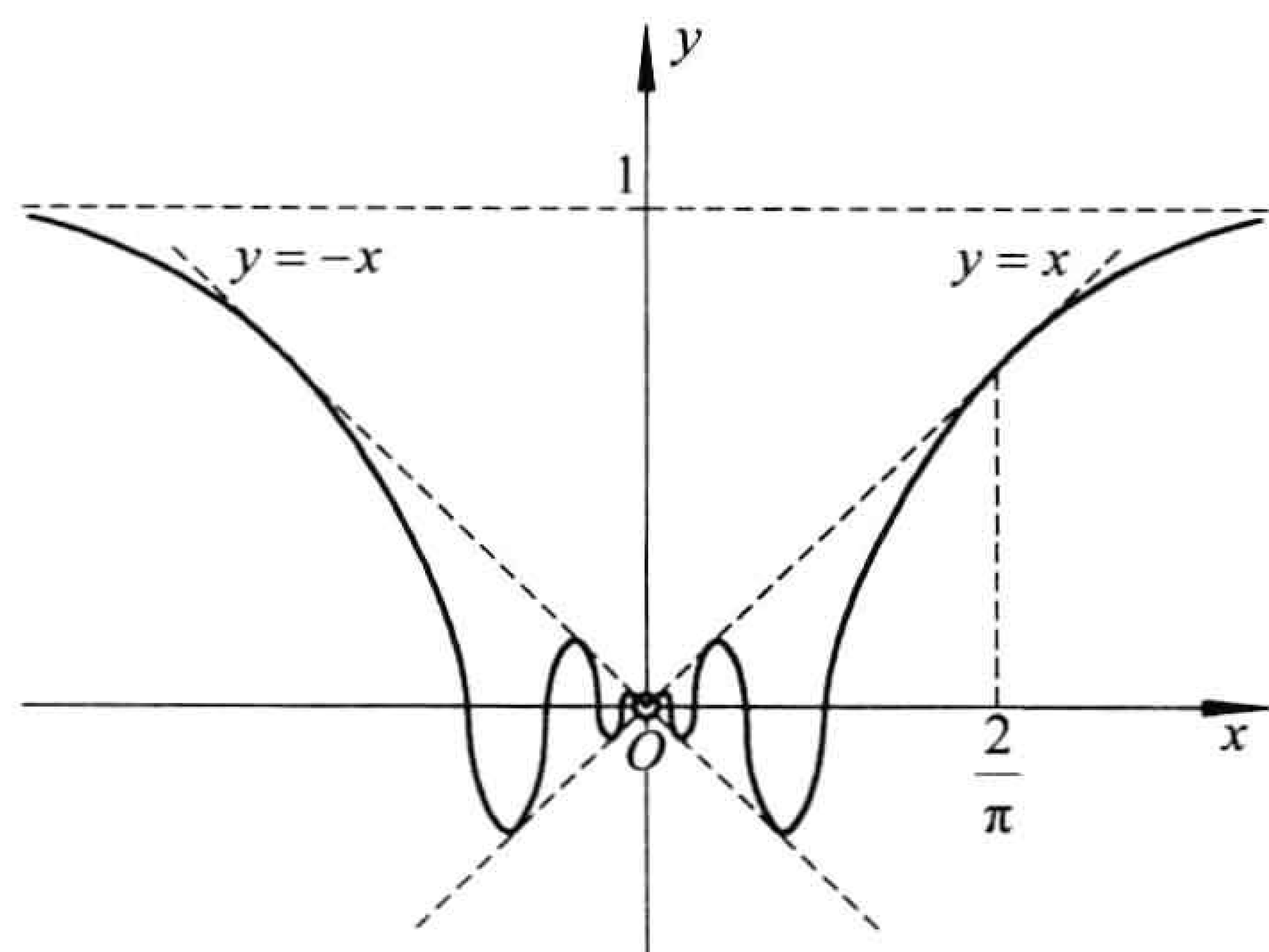


图 1.95

其次，再将函数 $y=2x$ 及 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像"叠加"，即得

$$y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

的图像，如图 1.96 所示.

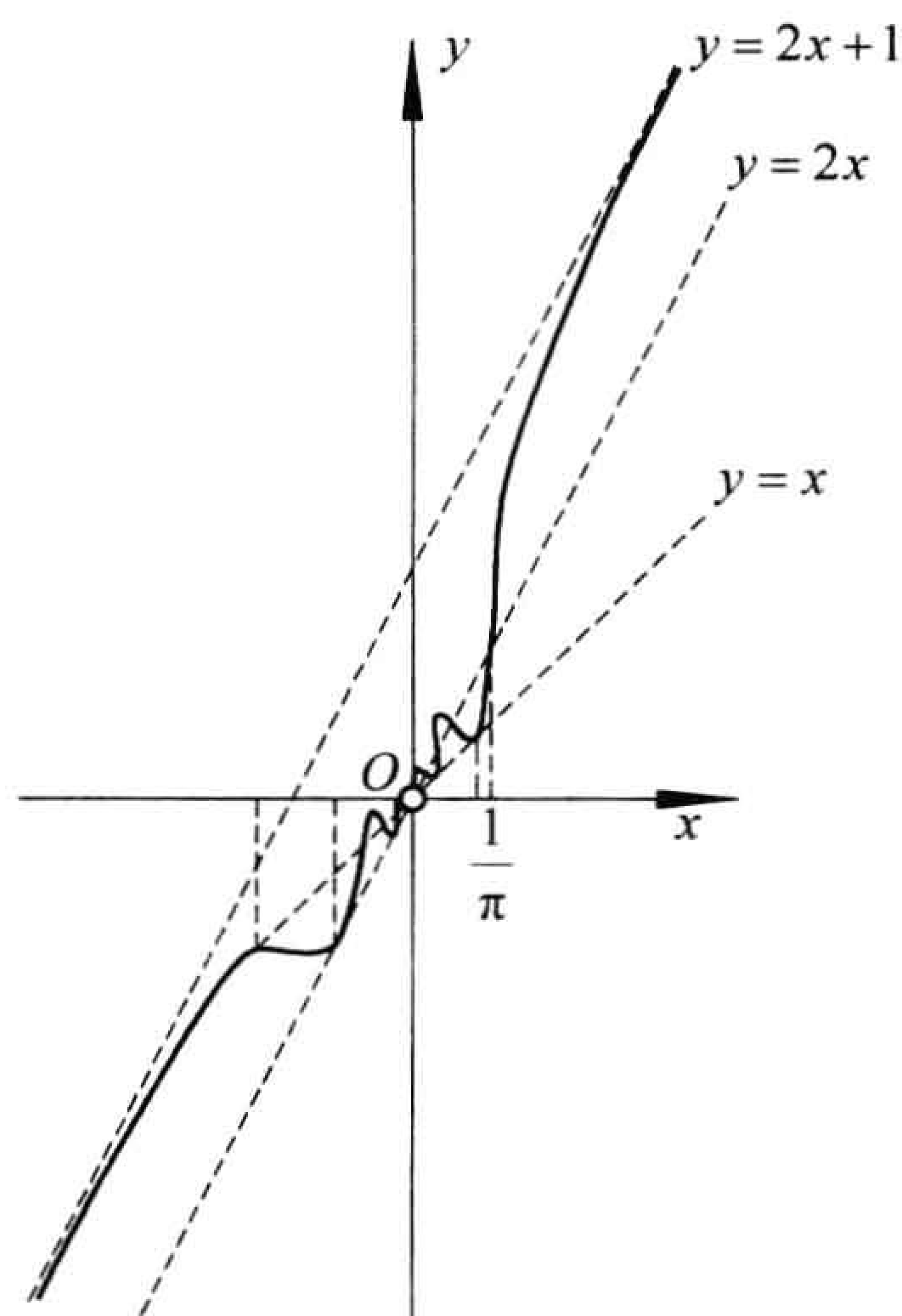


图 1.96

*）　此结果参看本章 § 5.

【303】　$y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$.

解　图像关于原点及 Oy 轴，Ox 轴均对称，由于

$$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\leqslant 1),$$

故图像位于圆 $x^2+y^2=1$ 内.

将函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 的纵坐标对应相乘，即可描出所求的图像.

如图 1.97 所示.

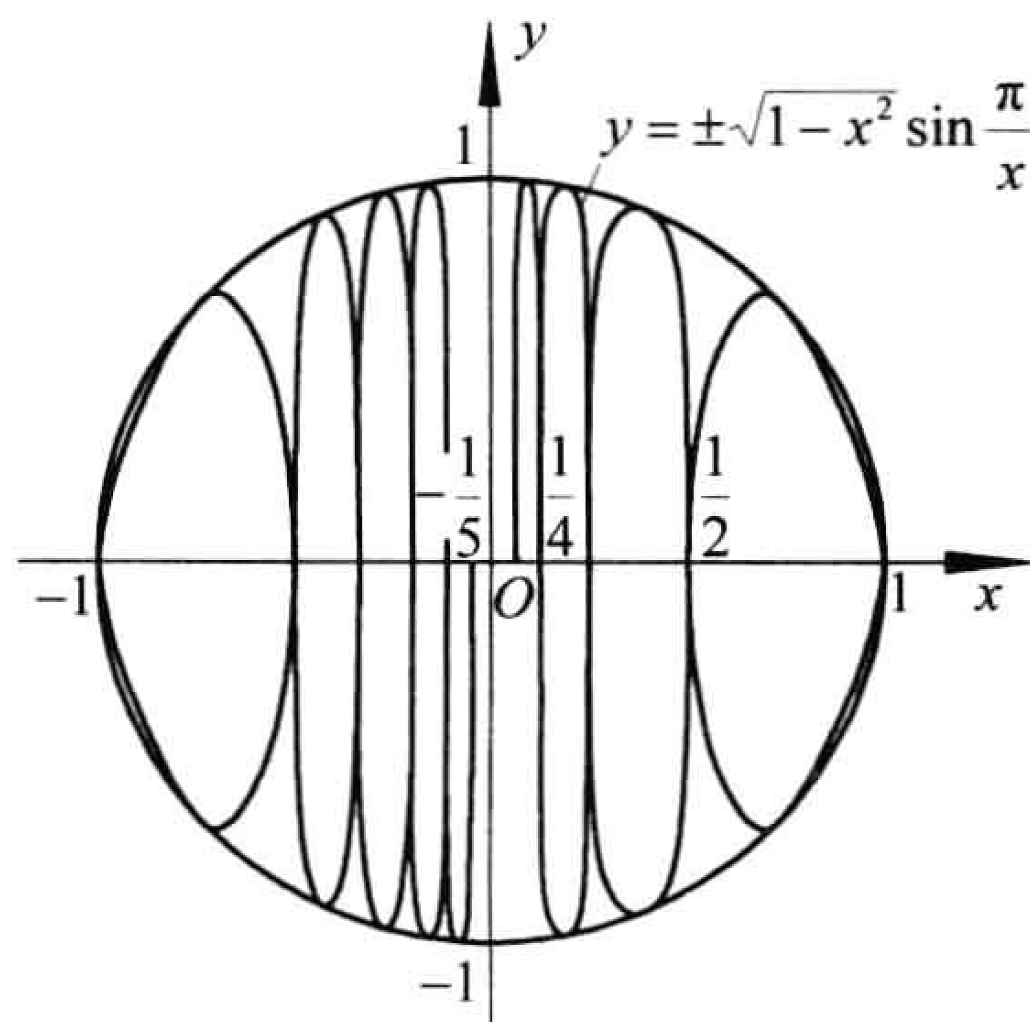


图 1.97

【304】　$y=\dfrac{\sin x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}y=1$. $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$.

由于 $|y|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，故图像在 $y=-\dfrac{1}{x}$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 之间. 又图像关于 Oy 轴对称. 当 $x=k\pi$ 时，$y=0$ $(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

如图 1.98 所示.

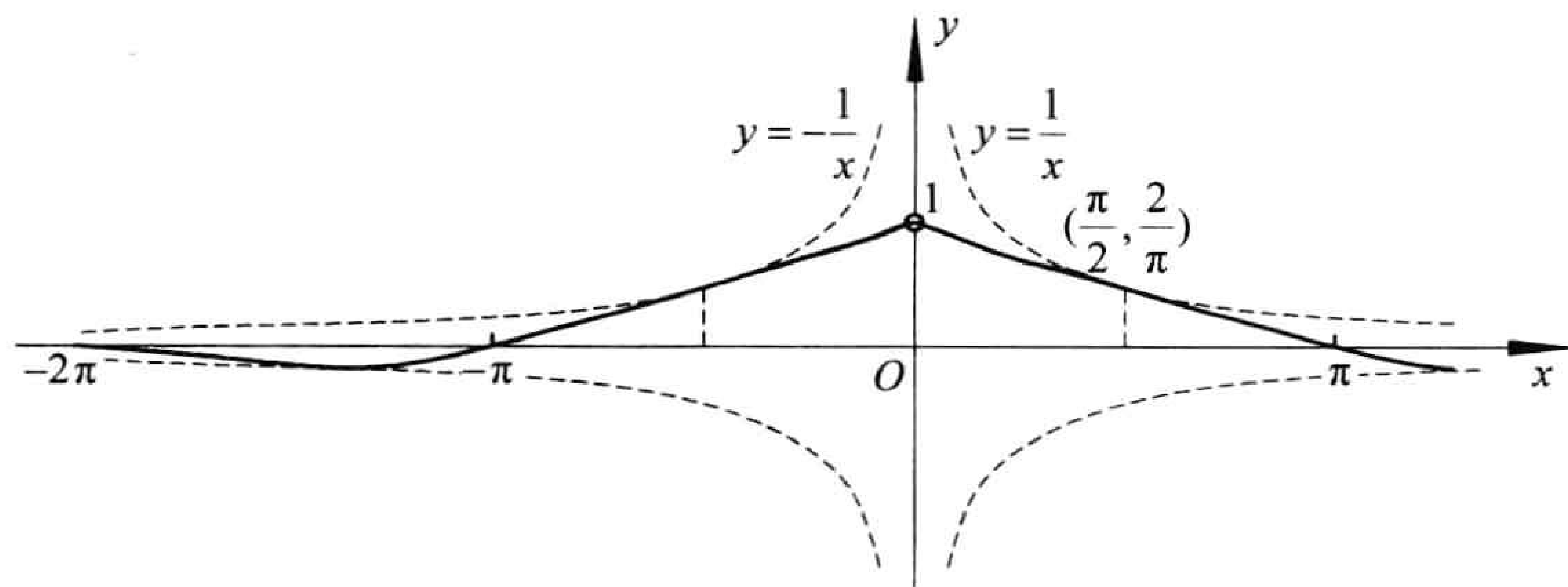


图 1.98

【305】　$y=e^x\cos x$.

解　由于 $-e^x\leqslant y\leqslant e^x$，故图像在 $y=e^x$ 及 $y=e^{-x}$ 之间.

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\cos x$ 却不存在.

如图 1.99 所示.

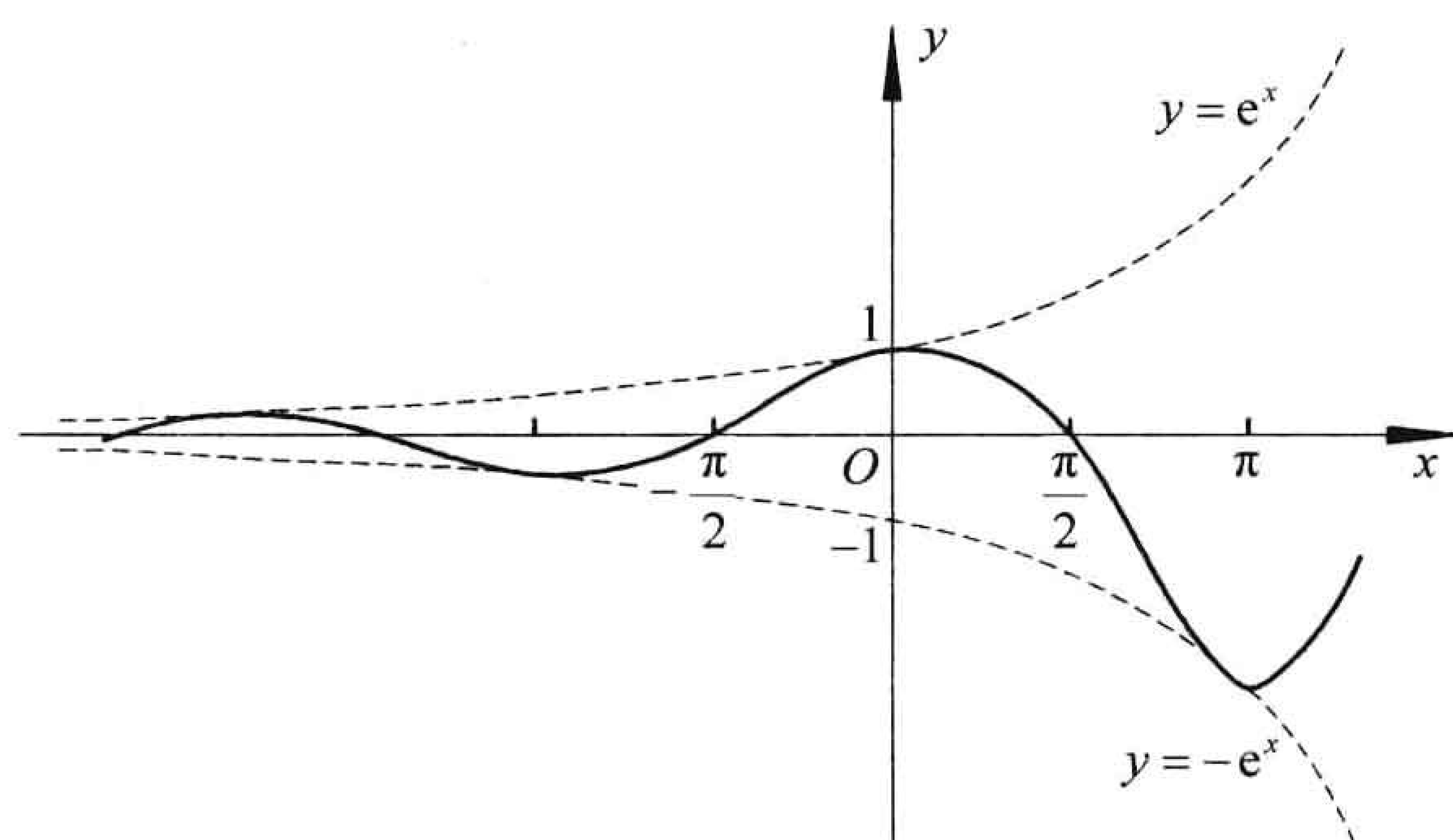


图 1.99

【306】 $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$.

解 当 $2k\leqslant x\leqslant(2k+1)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y$ 值才确定. 当 $k=2k+\frac{1}{2}$时，$y=\pm2^{-x}$. 图像关于 Ox 轴对称. $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$，而 $\lim\limits_{x\to-\infty}y$ 不存在. 如图 1.100 所示.

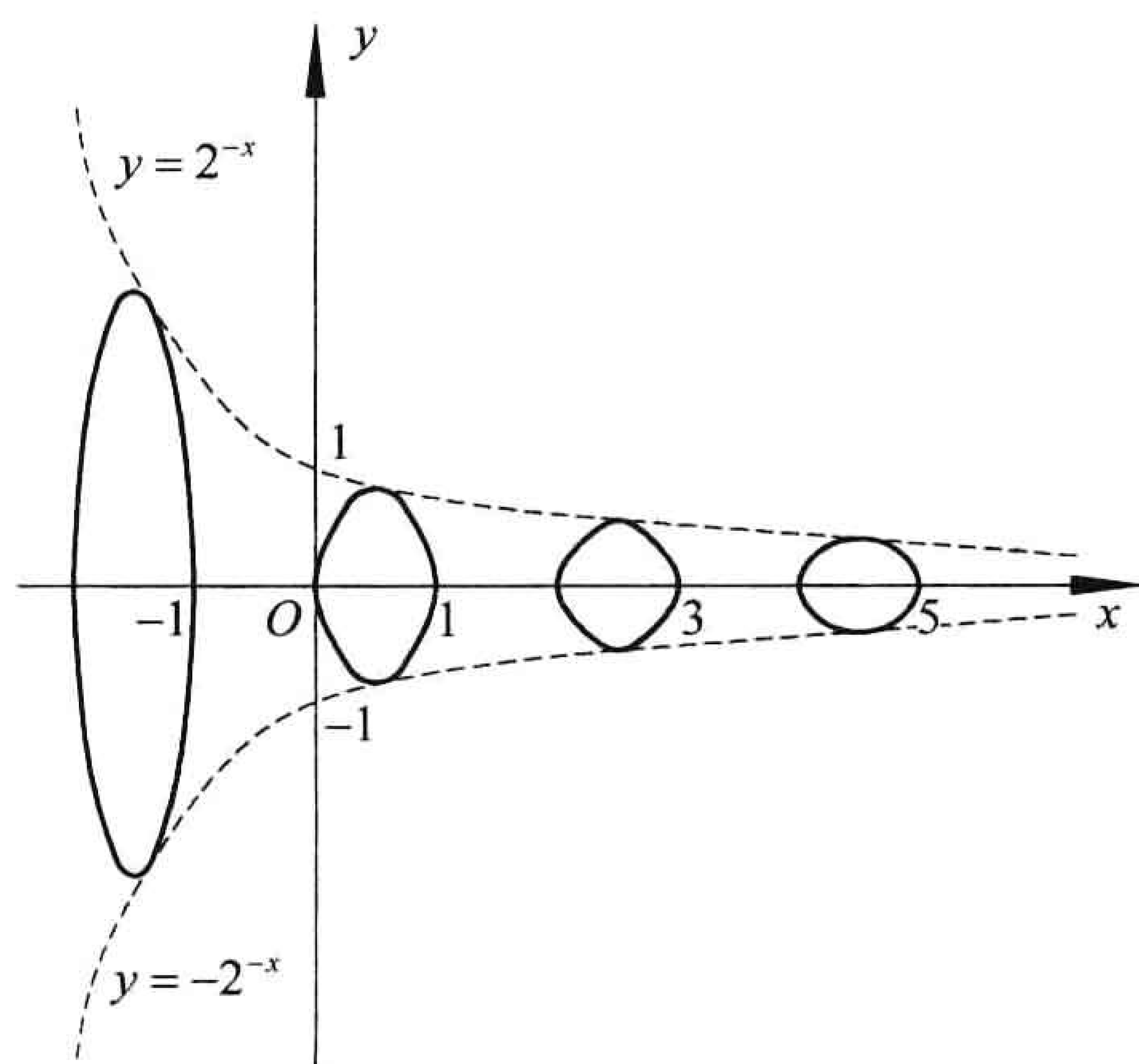


图 1.100

【307】 $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\frac{1}{1+x^2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，图像在 $y=-\frac{1}{1+x^2}$ 及 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 之间，且关于 Oy 轴对称.

$$\lim_{x\to\infty}y=0,\quad \lim_{x\to0}y=1.$$

如图 1.101 所示.

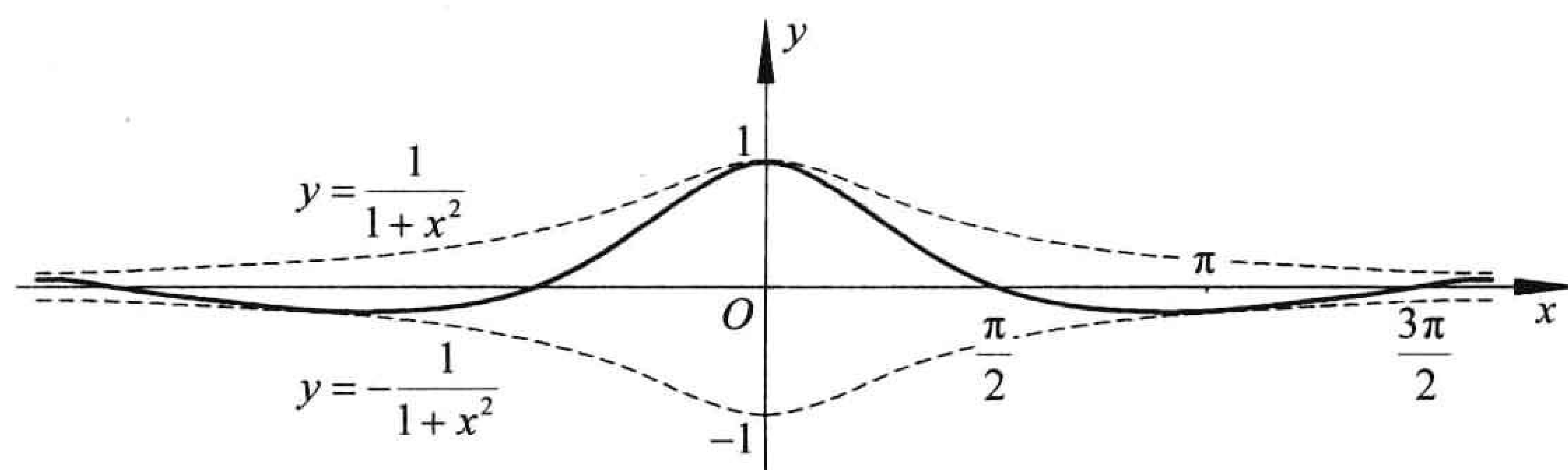


图 1.101

【308】 $y=\ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x>0$ 的开区间 $\left((4k-1)\frac{\pi}{2},(4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内, y 单调增加, 且 $y<0$. 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内, y 单调减小, $y<0$, 最大值是 $y=\ln\cos 0=0$.

又 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} y=-\infty$. 如图 1.102 所示.

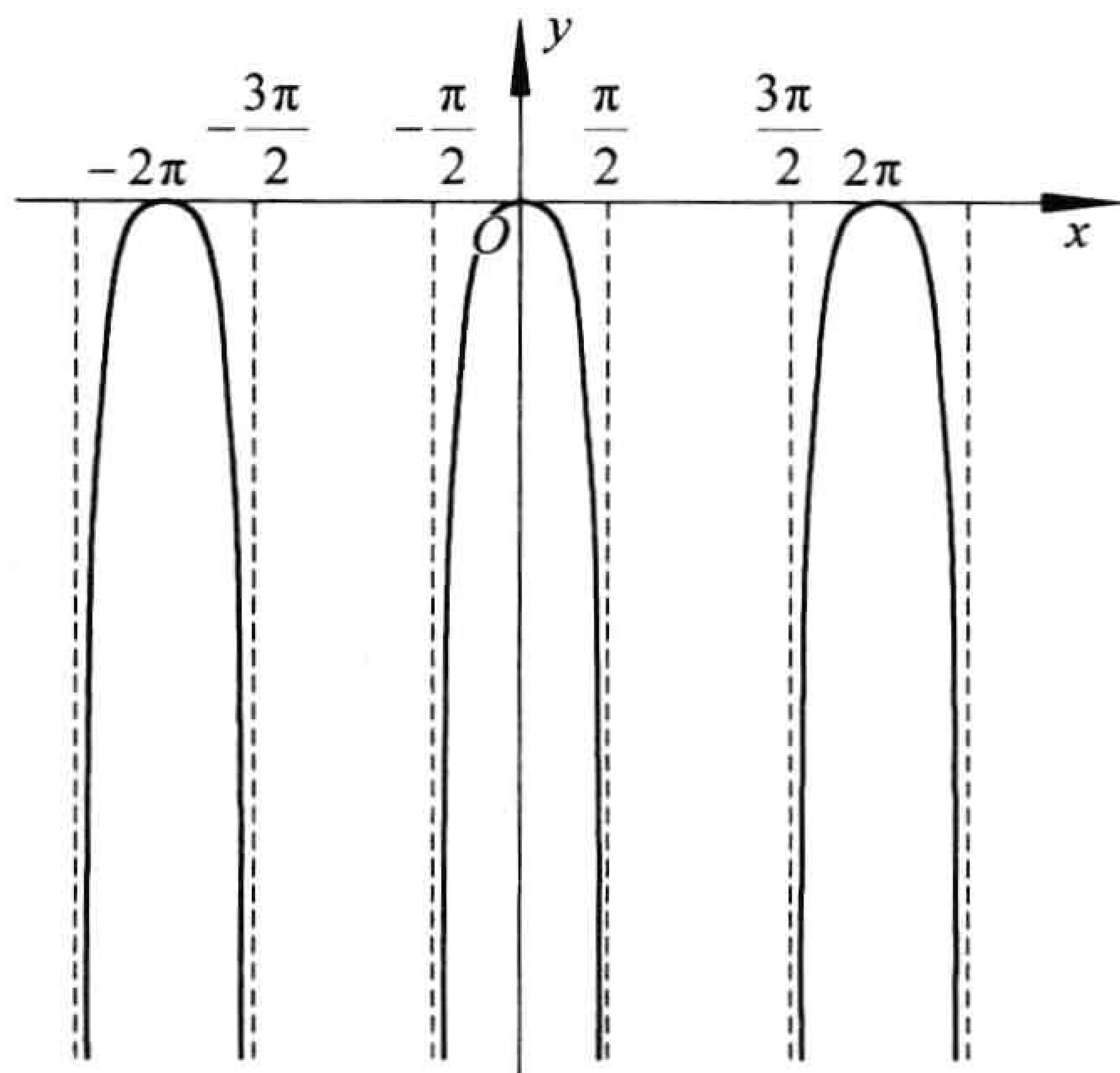


图 1.102

【309】 $y=\cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x>0$ 的全体.

当 $x=e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=0$. 当 $x=e^{2k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=1$;

而当 $x=e^{(2k+1)\pi}$ 时, $y=-1$. 图像始终在直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间摆动, 而且越靠近原点时, 摆动越密. 如图 1.103 所示.(两轴所取的单位不一致).

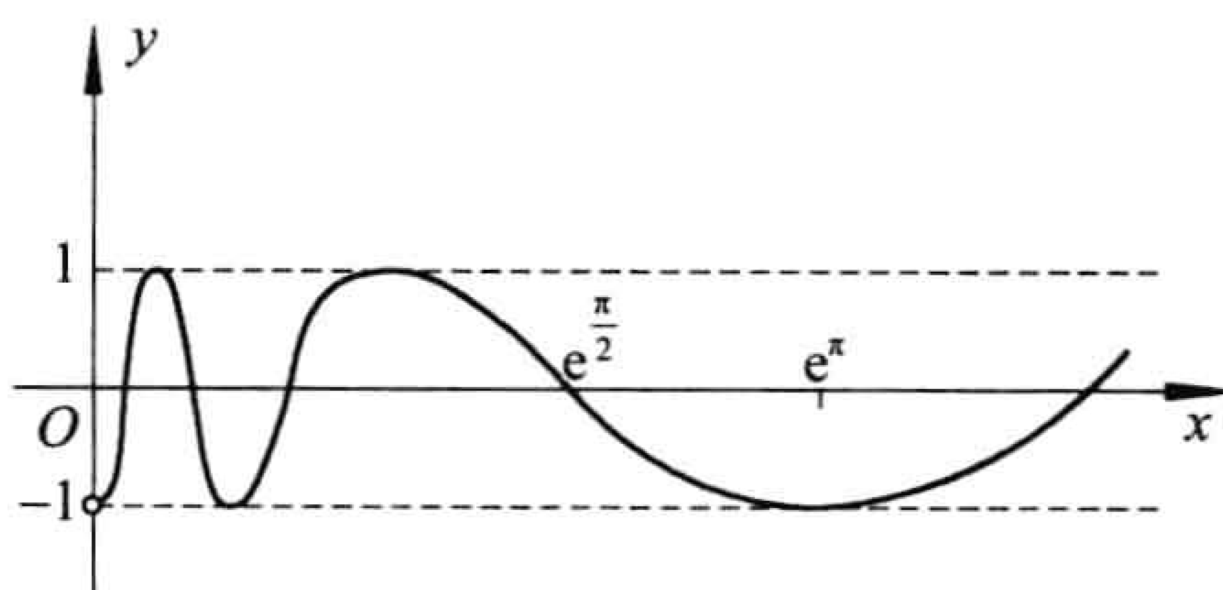


图 1.103

【310】 $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y>0$. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少; 当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时, y 单调增加. 又有 $\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to\pi-0} y=+\infty$. $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 为区间 $(0,\pi)$ 内函数 y 的最小值.

同理, x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 由 0 增到 $\frac{1}{e}$; 而 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0. $\lim\limits_{x\to\pi+0} y=\lim\limits_{x\to2\pi-0} y=0$.

如图 1.104 所示.

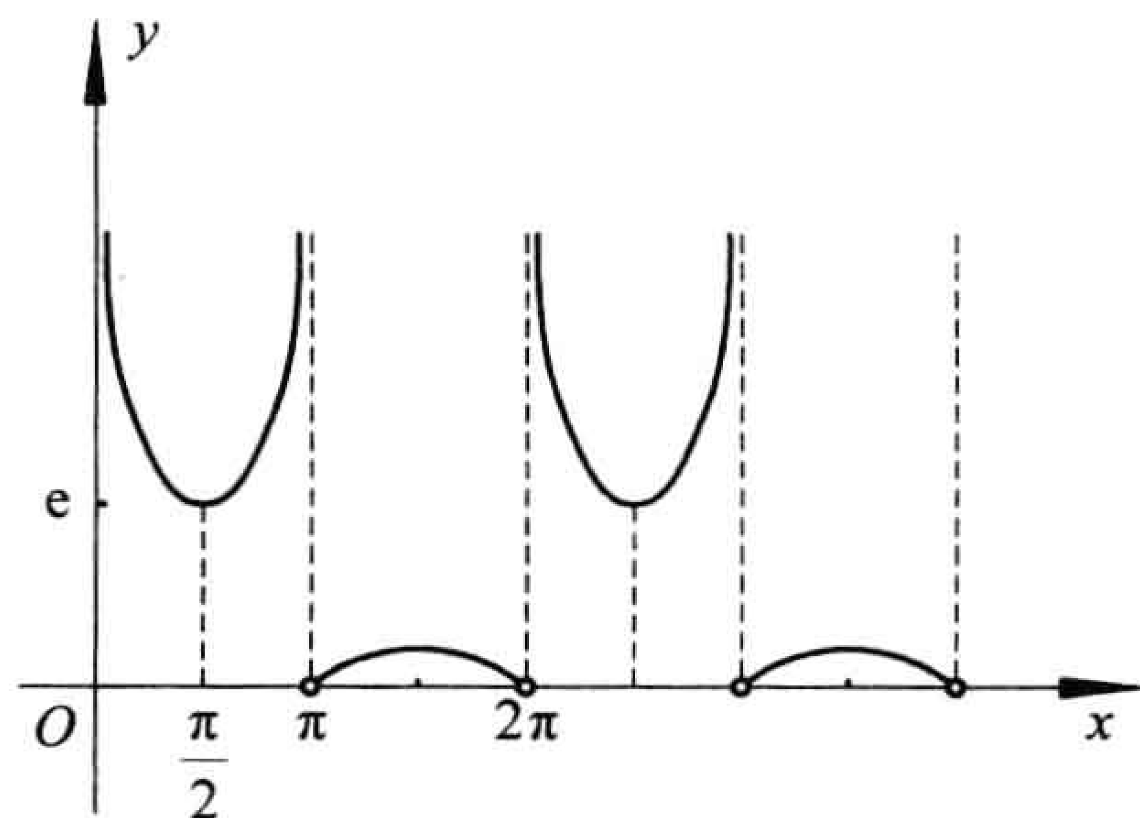


图 1.104

作下列反三角函数的图像：

【311】 $y=\arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

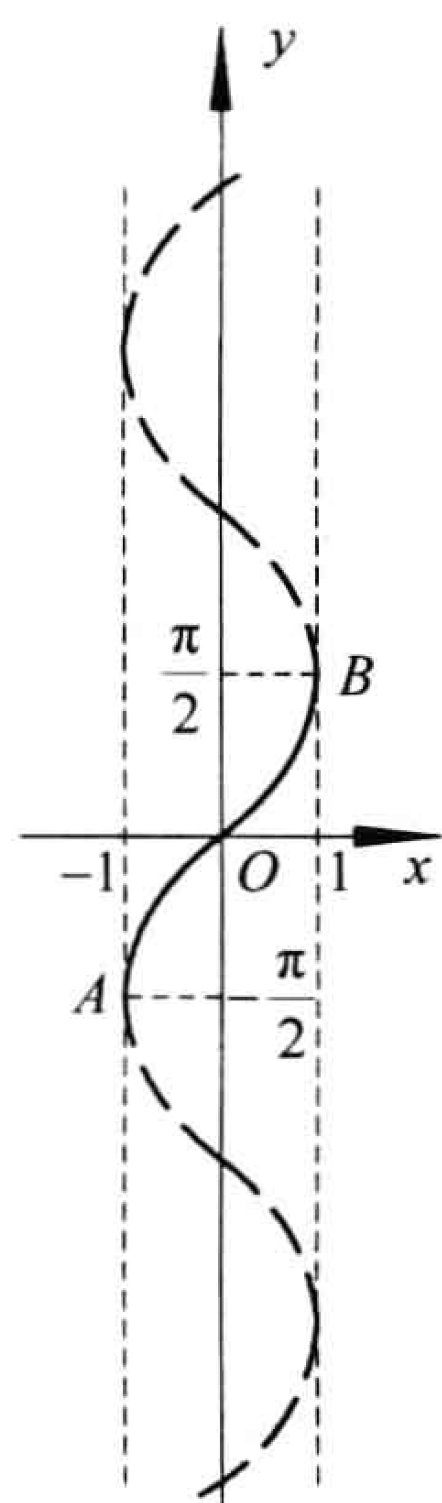


图 1.105

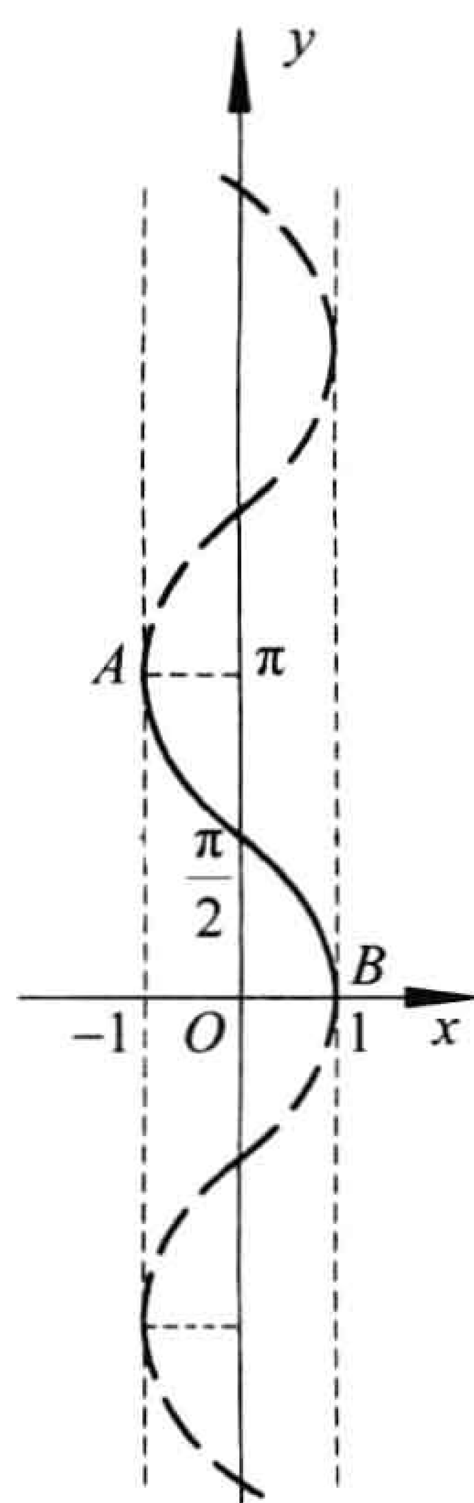


图 1.106

【312】 $y=\arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

【313】 $y=\arctan x$.

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

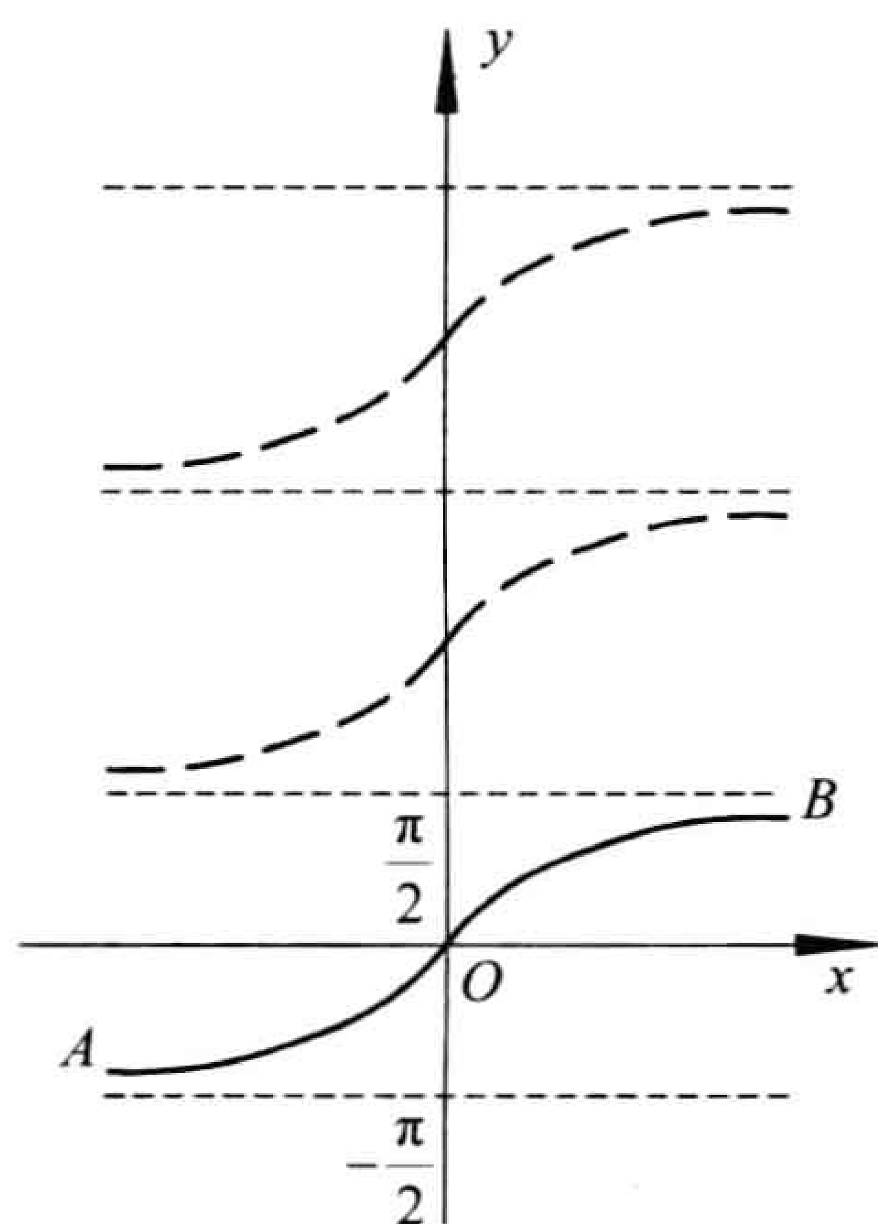


图 1.107

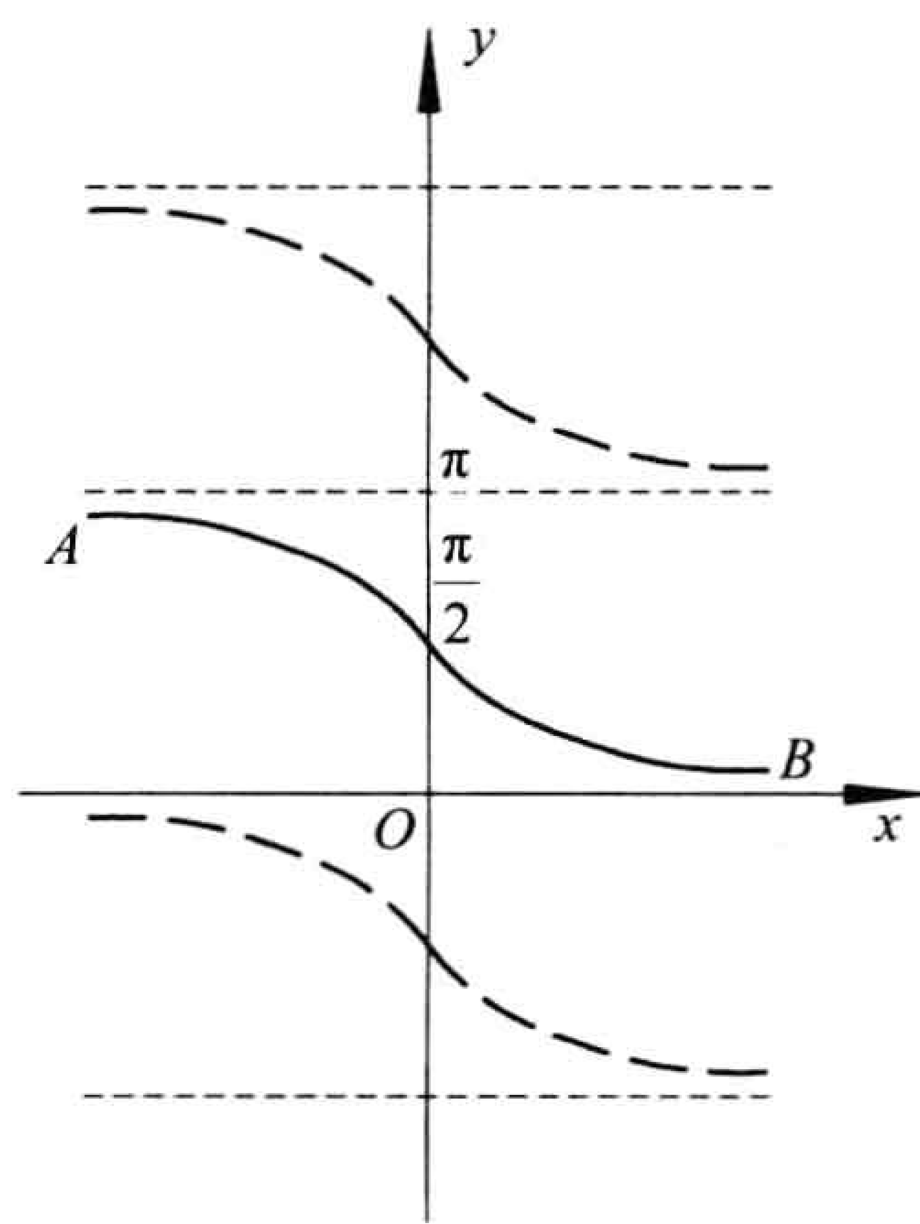


图 1.108

【314】 $y=\operatorname{arccot} x$.

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

【315】 $y=\arcsin \dfrac{1}{x}$.

解 图像关于原点对称.存在域是区间$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$.

当$1\leqslant x<+\infty$时，由于$\dfrac{1}{x}$单调减少，所以，y也是减函数，且有

$$\lim_{x\to 1+0} y=\frac{\pi}{2}=y\Big|_{x=1},\quad \lim_{x\to+\infty} y=0.$$

如图 1.109 所示.

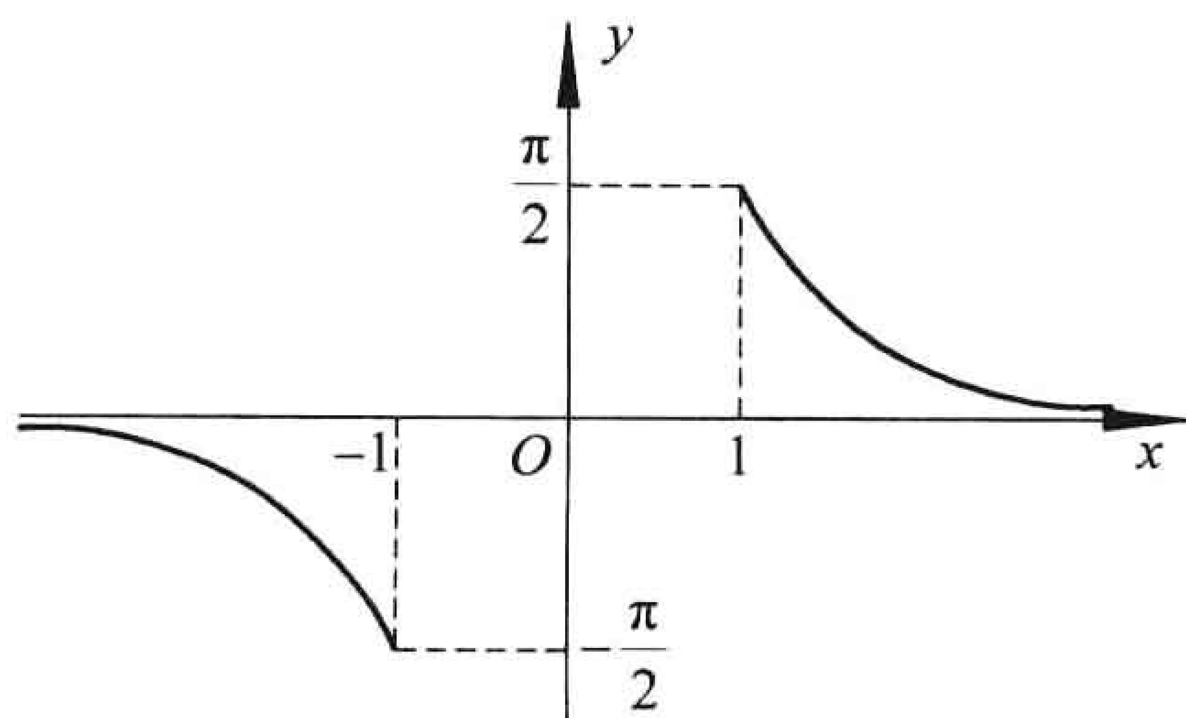


图 1.109

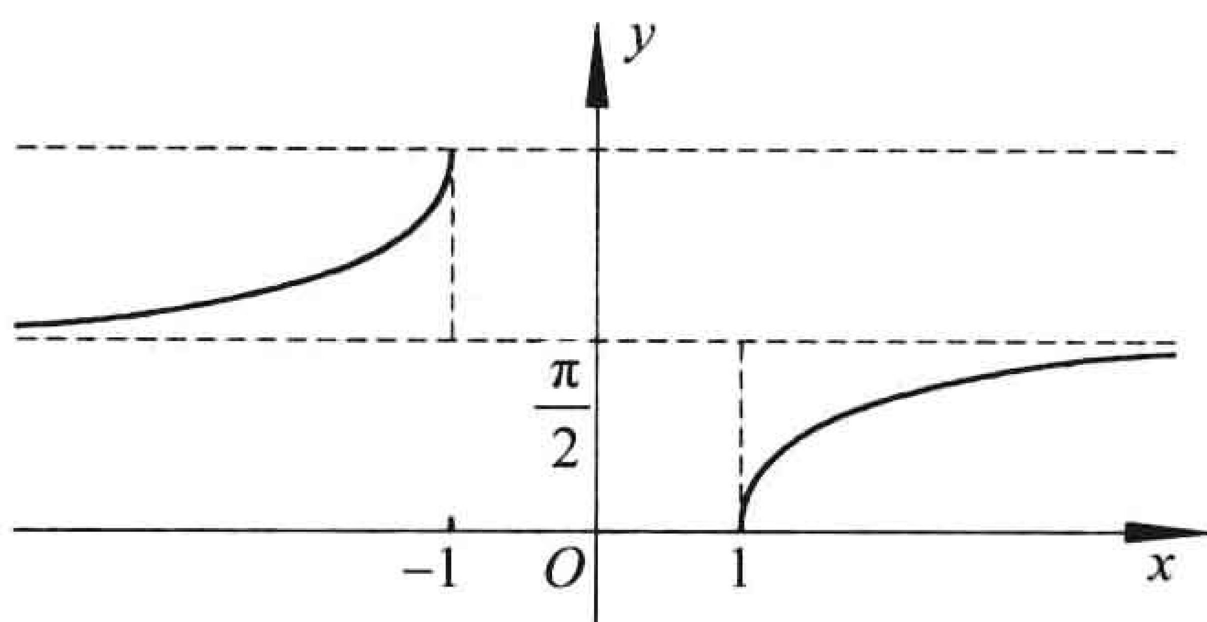


图 1.110

【316】 $y=\arccos\frac{1}{x}$.

解 存在域是区间$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$.

当 $1\leqslant x<+\infty$时,由于$\frac{1}{x}$单调减少,所以,y 是增函数,且有 $\lim\limits_{x\to1+0}y=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\frac{\pi}{2}$.

同理,当$-\infty<x\leqslant-1$ 时,y 单调增加;且有 $\lim\limits_{x\to-1-0}y=\pi$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\frac{\pi}{2}$.

如图 1.110 所示.

【317】 $y=\arctan\frac{1}{x}$.

解 图像关于原点对称.

当 $x>0$ 时,由于$\frac{1}{x}$单调减少,所以,y 是减函数,且有

$$\lim_{x\to+0}y=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}y=0.$$

如图 1.111 所示.

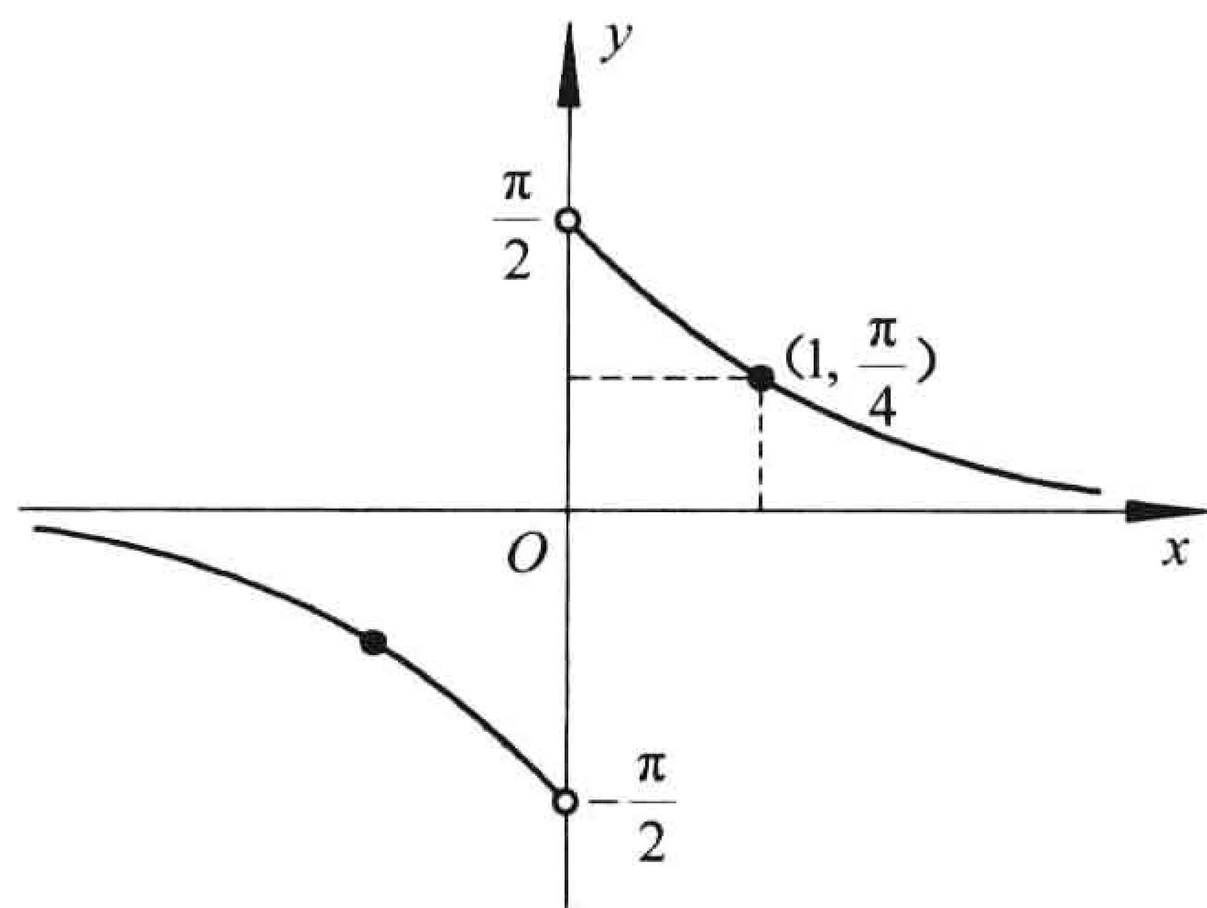


图 1.111

【318】 $y=\arcsin(\sin x)$.

提示 注意,当$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时,

$$y=x-2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时,$y=(\pi-x)+2k\pi$.

解 $\sin y=\sin x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此,当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$y=x$;当$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$时,$y=\pi-x$;当$\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$时,$y=x-2\pi$.

一般地,当$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时,

$$y=x-2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

而当$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时,

$$y=(\pi-x)+2k\pi.$$

如图 1.112 所示.

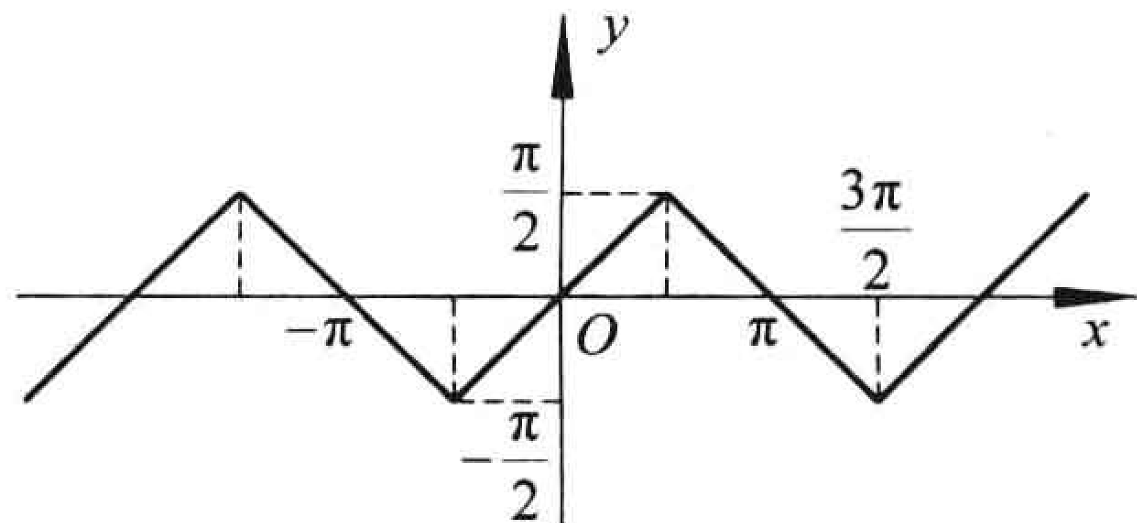


图 1.112

【319】 $y=\arcsin(\cos x)$.

提示 注意,当$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant2k\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

解 $\sin y=\cos x$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

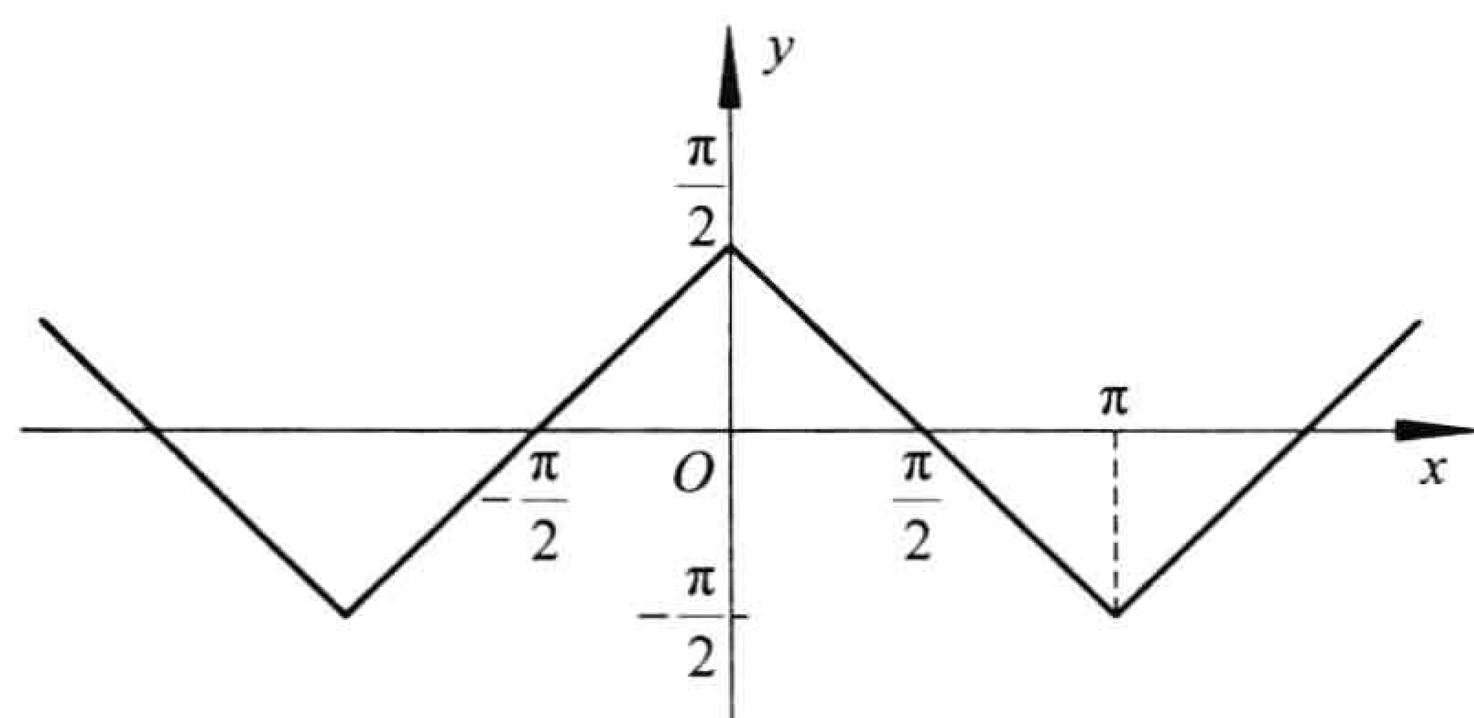


图 1.113

因此，当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=\frac{\pi}{2}+x$；

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$y=\frac{\pi}{2}-x$；

一般地，当 $(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，

$$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

而当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

如图 1.113 所示.

【320】 $y=\arccos(\cos x)$.

解 $\cos y=\cos x$，$0\leqslant y\leqslant\pi$.

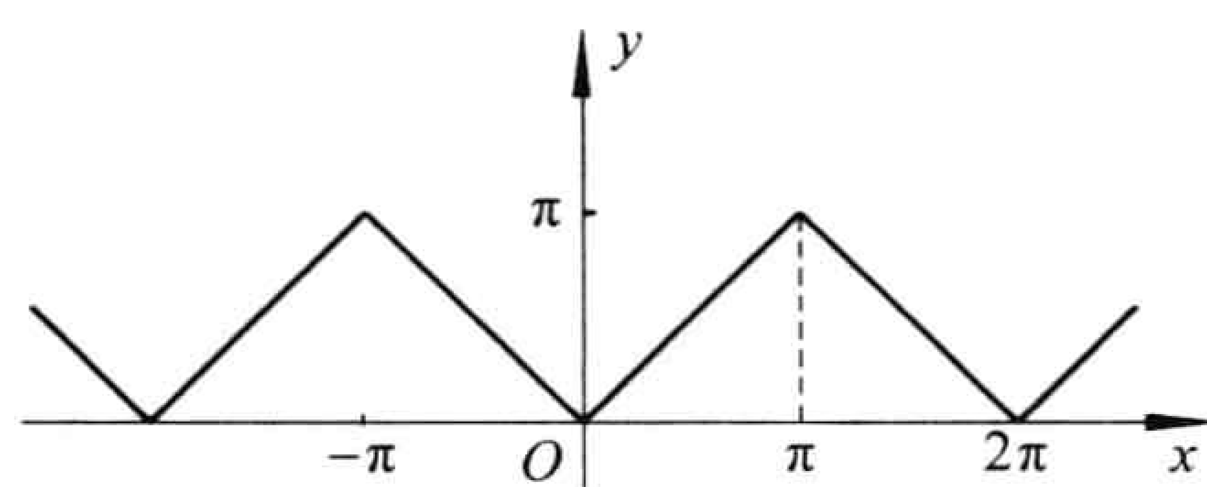


图 1.114

因此，当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$y=x$；当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$y=2\pi-x$；

当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=-x$.

一般地，当 $(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，

$$y=-x+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

而当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，$y=x-2k\pi$.

如图 1.114 所示.

【321】 $y=\arctan(\tan x)$.

解 $\tan y=\tan x$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

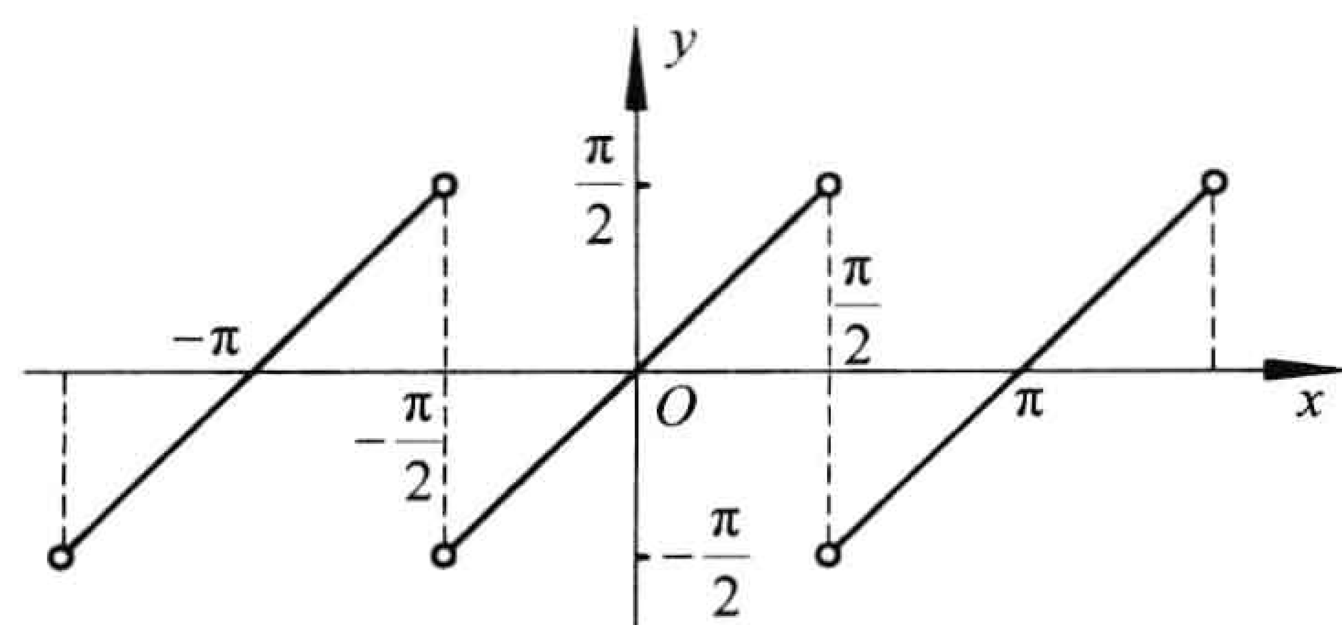


图 1.115

因此，当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y=x$；

当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$y=x-\pi$；

当 $-\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\pi+x$.

一般地，当 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$y=x-k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

如图 1.115 所示.

【322】 $y=\arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y=2\sin x$，$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

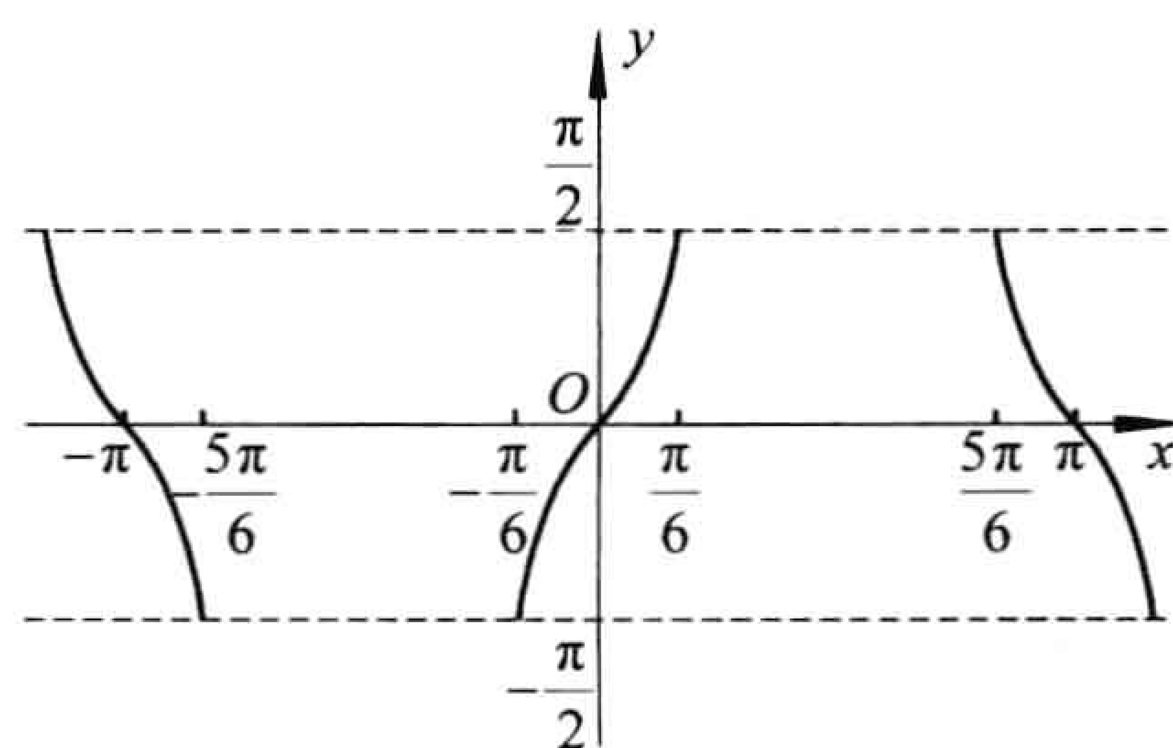


图 1.116

存在域为区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，…的全体.

即 $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的全体.

利用复合函数作图法得其图像，如图 1.116 所示，它关于原点对称.

【323】 设：(1) $y_1=1-\frac{x}{2}$； (2) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$； (3) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$； (4) $y_1=e^x$.

作函数 $y=\arcsin y_1$ 的图像.

解 (1)存在域为满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 4$ 的数 x 的集合. 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0；而当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$. 如图 1.117 所示.

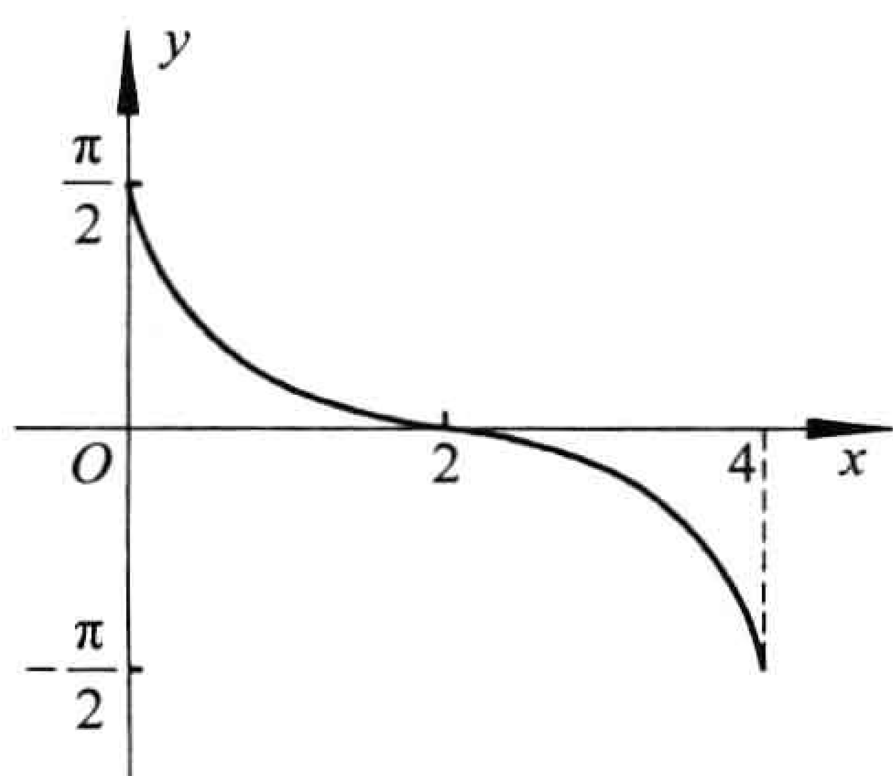


图 1.117

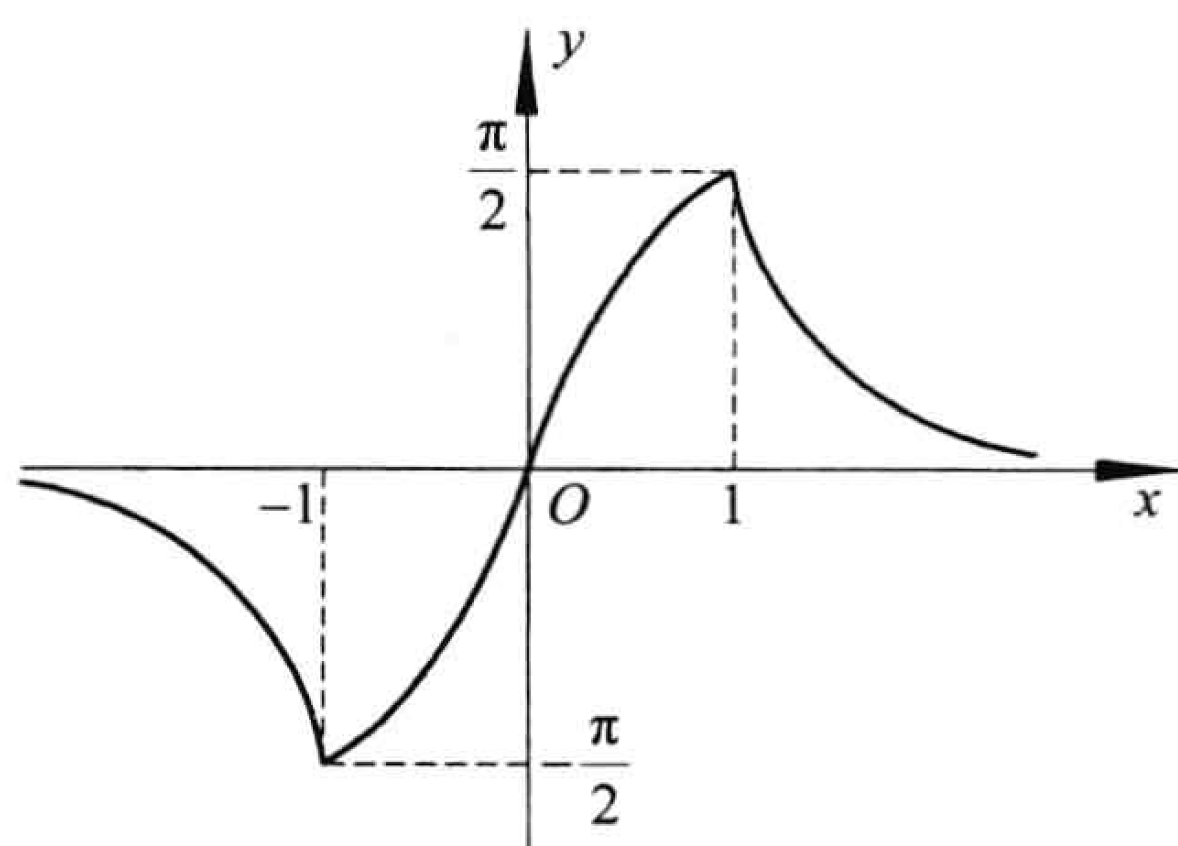


图 1.118

(2)图像关于原点对称. 存在域为全体实数. 当 x 由 0 增到 1 时，由于$\frac{2x}{1+x^2}$为增函数，故 y 由 0 增到$\frac{\pi}{2}$. 而当 $x>1$ 时，$\frac{2x}{1+x^2}$为减函数，故 y 由$\frac{\pi}{2}$减少到 0，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$. 如图 1.118 所示.

(3)要 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\leqslant 1$，只要 $x\geqslant 0$，故存在域为 $x\geqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 0 增到 1 时，$\frac{1-x}{1+x}$由 1 减少到 0，而 y 则由$\frac{\pi}{2}$减少到 0；而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$由 0 减少到 -1，而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\frac{\pi}{2}$，如图 1.119 所示.

(4)存在域为 $-\infty<x\leqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时，e^x 由 0 增到 1，而 y 则由 0 增到$\frac{\pi}{2}$. 如图 1.120 所示.

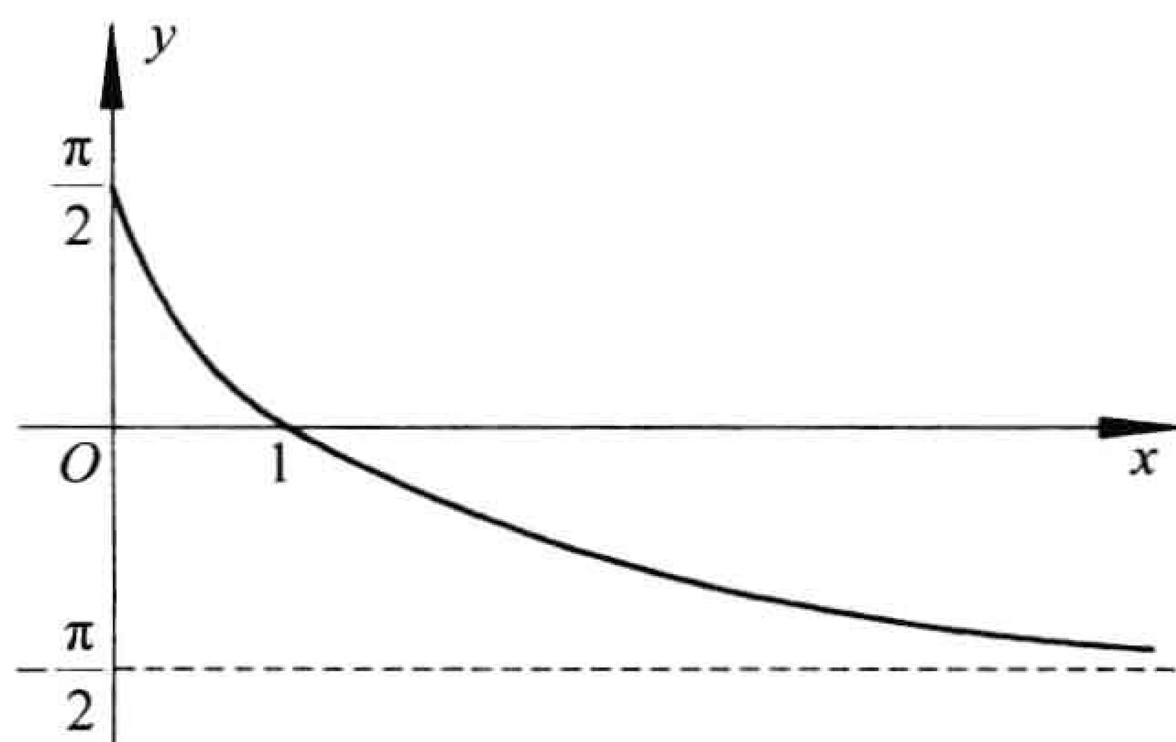


图 1.119

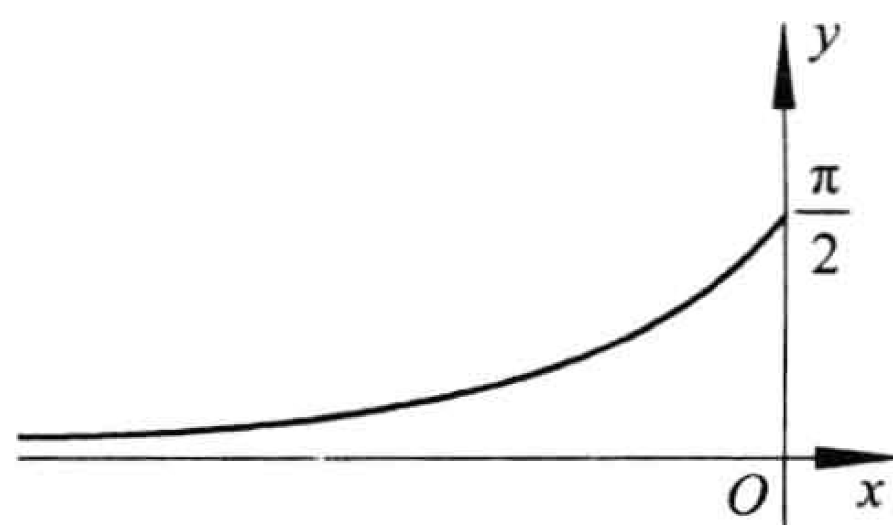


图 1.120

【324】 设：

(1) $y_1=x^2$； (2) $y_1=\frac{1}{x^2}$； (3) $y_1=\ln x$； (4) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

作函数 $y=\arctan y_1$ 的图像.

解 (1)如图 1.121 所示的 AB 曲线.

(2)如图 1.122 所示.

(3)如图 1.123 所示的 O_1A 曲线.

(4)以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到$\frac{\pi}{2}$时，$\frac{1}{\sin x}$由 $+\infty$ 减到 1，而 y 则由$\frac{\pi}{2}$减到$\frac{\pi}{4}$.

余类推，如图 1.124 所示.

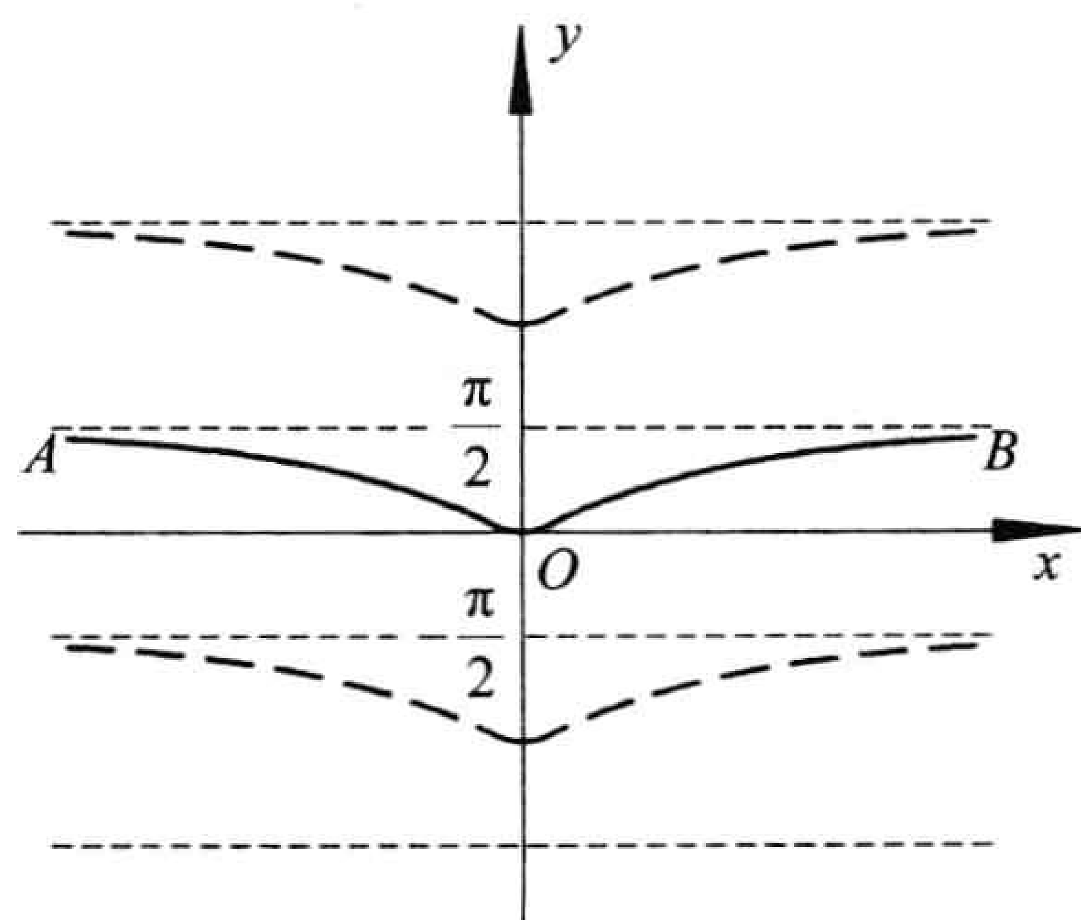


图 1.121

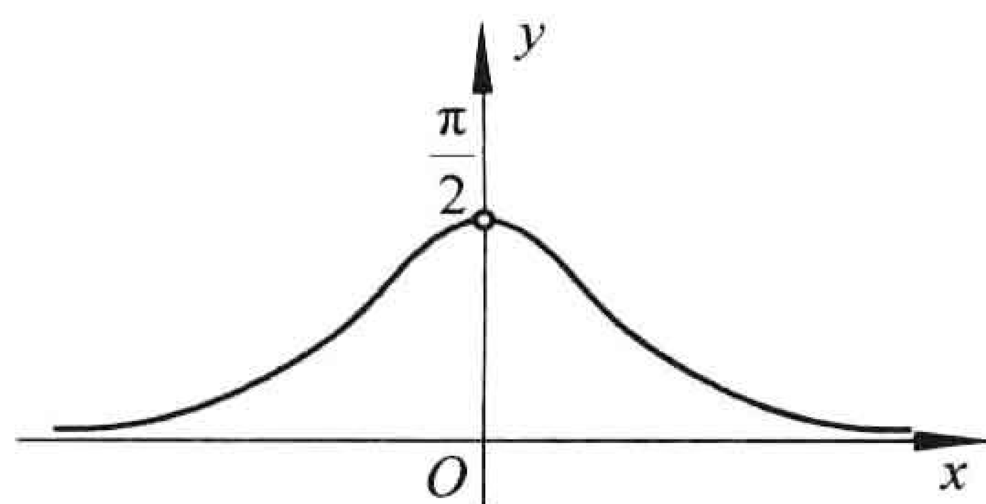


图 1.122

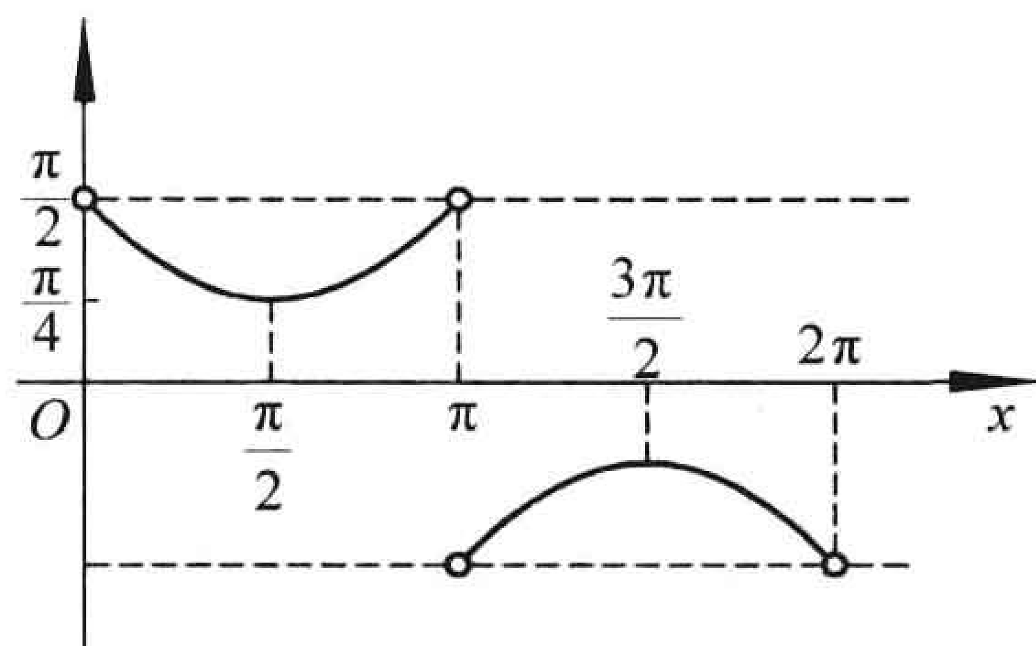


图 1.124

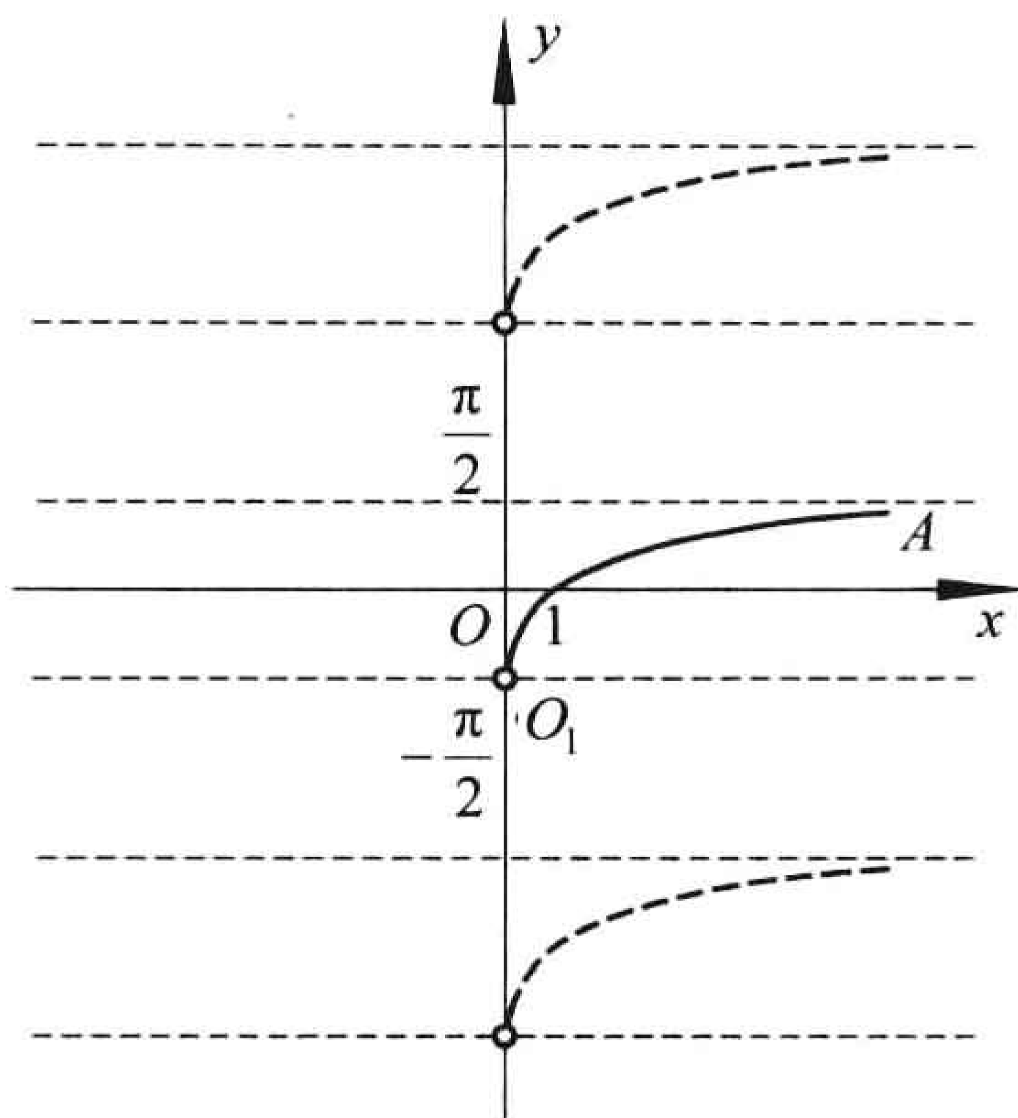


图 1.123

【325】 已知函数 $y=f(x)$的图像，作下列各函数的图像：

(1) $y=-f(x)$； (2) $y=f(-x)$； (3) $y=-f(-x)$.

解 (1)函数 $y=-f(x)$的图像和函数 $y=f(x)$的图像关于 Ox 轴对称. 如图 1.125 所示.

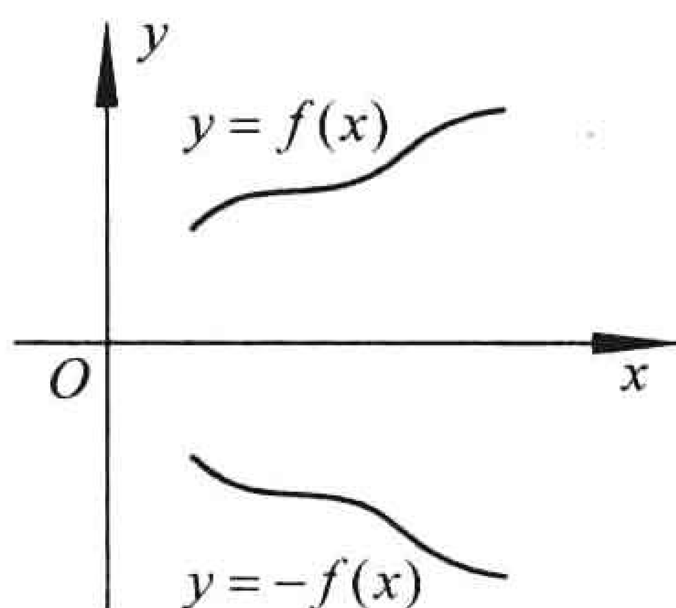


图 1.125

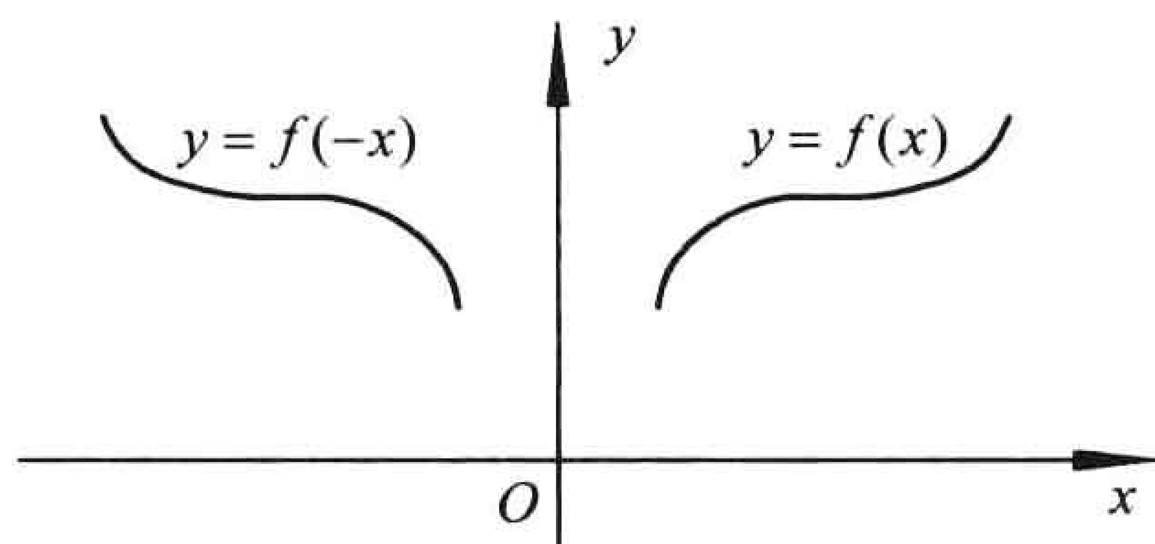


图 1.126

(2)函数 $y=f(-x)$的图像和函数 $y=f(x)$的图像关于 Oy 轴对称. 如图 1.126 所示.

(3)函数 $y=-f(-x)$的图像和函数 $y=f(x)$的图像关于原点对称. 如图 1.127 所示.

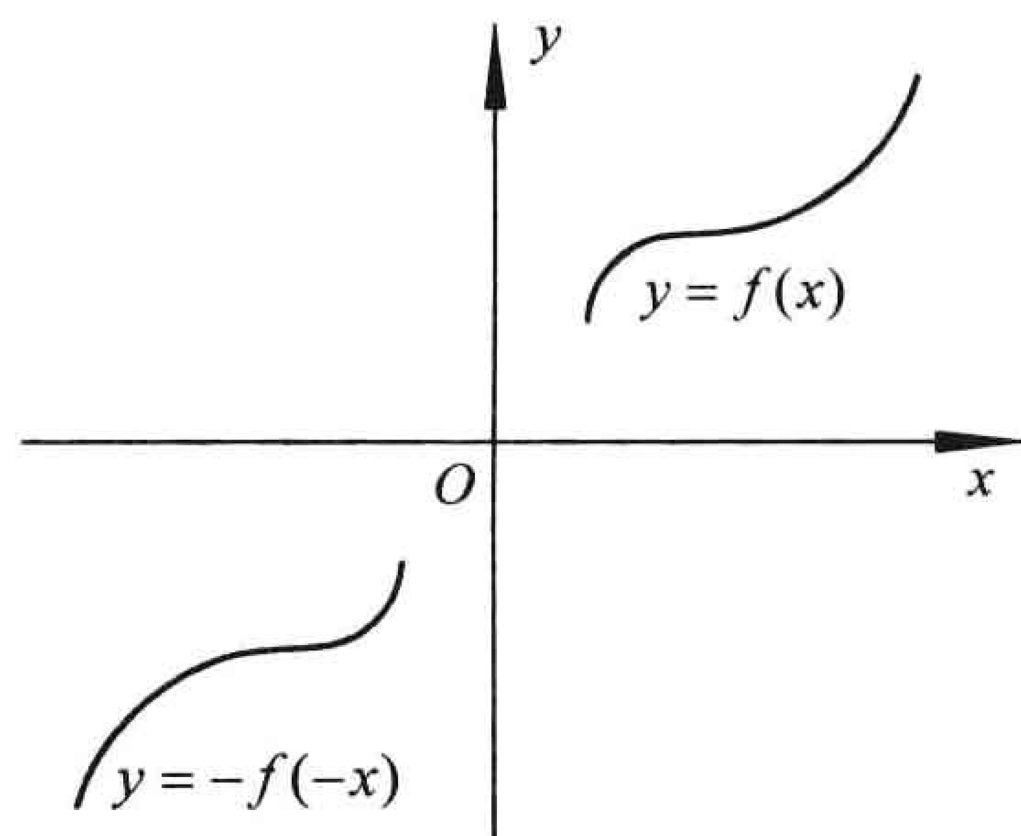


图 1.127

【326】 已知函数 $y=f(x)$的图像，作下列各函数的图像：

(1)$y=f(x-x_0)$； (2)$y=y_0+f(x-x_0)$；

(3)$y=f(2x)$； (4)$y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

解 (1)函数 $y=f(x-x_0)$的图像可由 $y=f(x)$的图像平移距离 $|x_0|$得出.

当 $x_0>0$ 时，向右平移；当 $x_0<0$ 时，向左平移.

如图 1.128 所示.

(2)函数 $y=y_0+f(x-x_0)$的图像可由 $y=f(x)$的图像先平移距离$|x_0|$，再上下平移距离$|y_0|$得出，其中当 $y_0>0$ 时，向上平移；当 $y_0<0$ 时，向下平移.

事实上，只要先将坐标原点平移到点(x_0,y_0). 坐标轴的方向均不变，再在新坐标系中作 $y'=f(x')$的图像，其中 $y'=y-y_0$，$x'=x-x_0$.

如图 1.129 所示.

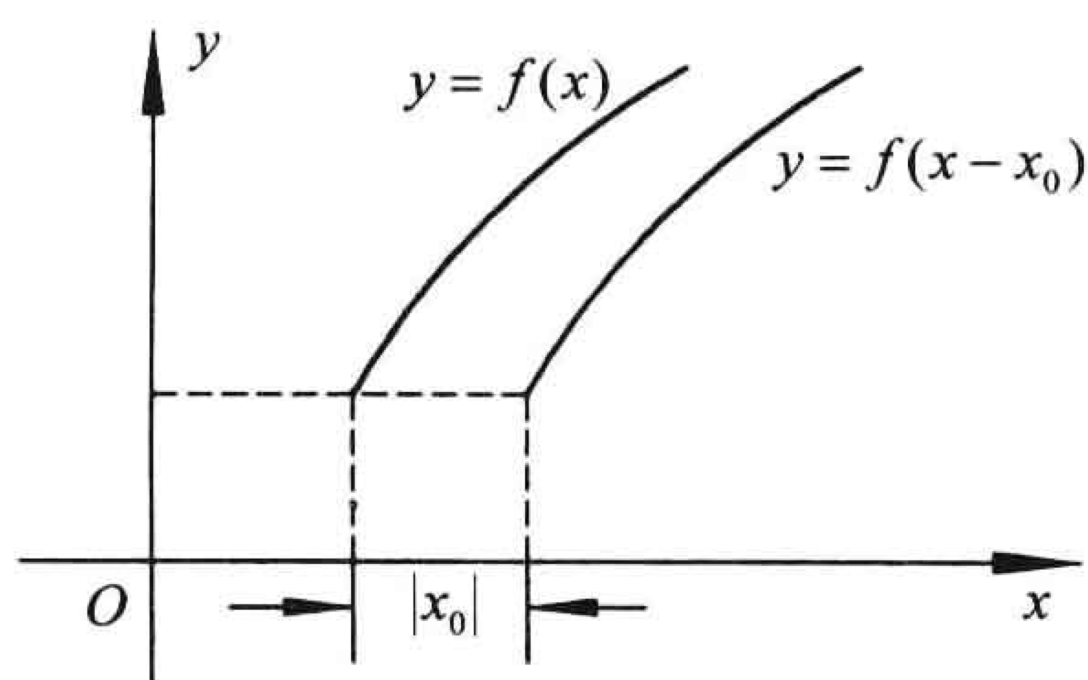


图 1.128

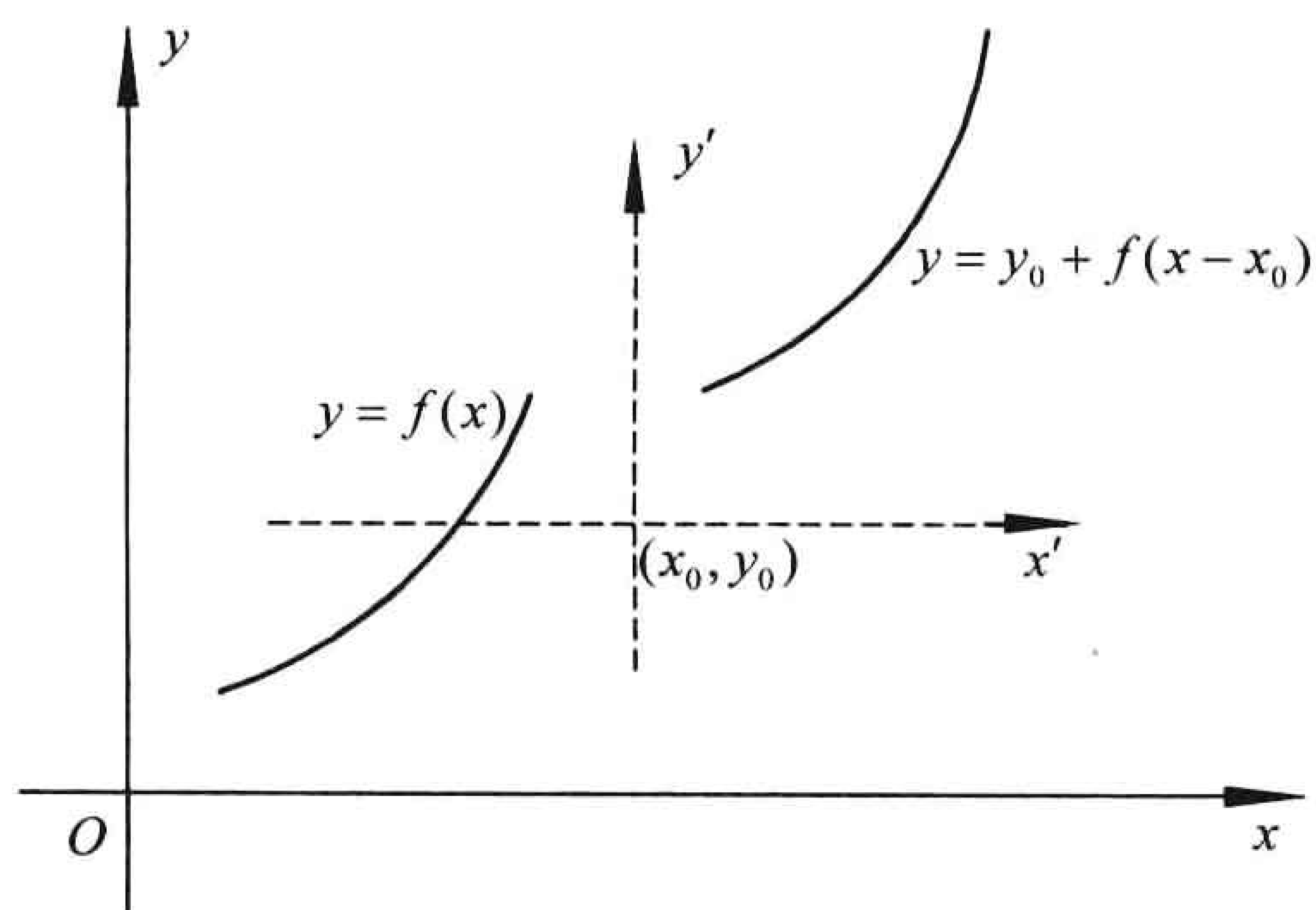


图 1.129

(3)函数 $y=f(2x)$的图像可由 $y=f(x)$的图像沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

图像如图 1.130 所示.

(4)$y=f(kx+b)$的图像可由 $y=f(x)$的图像先沿 Ox 轴方向"压缩"k 倍($0<k<1$ 时,理解为"放大").然后再将所得图像平移距离$|b|$.

图像如图 1.131 所示.

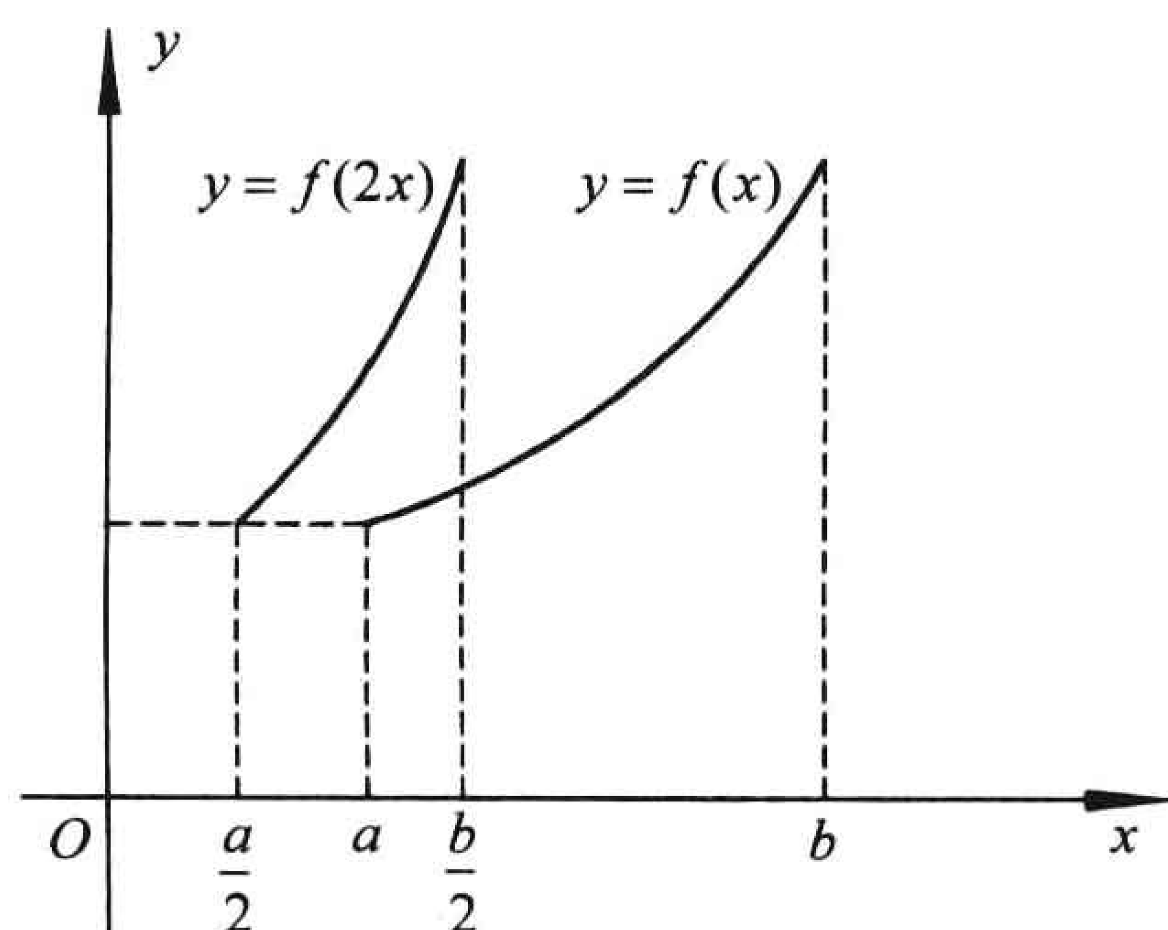


图 1.130

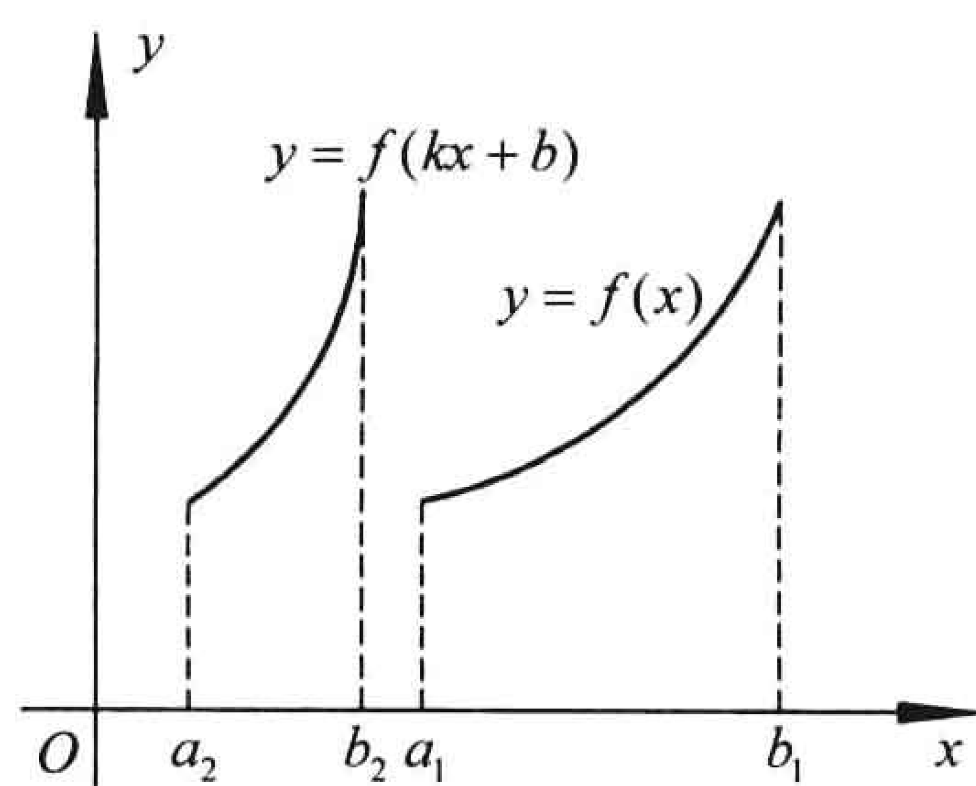


图 1.131

【327】 作函数的图像:

(1)$y=2+\sqrt{1-x}$;(2)$y=1-e^{-x}$;(3)$y=\ln(1+x)$;(4)$y=-\frac{\pi}{2}\arcsin(1+x)$;(5)$y=3+2\cos 3x$.

解 (1)如图 1.132 所示.

(2)如图 1.133 所示.

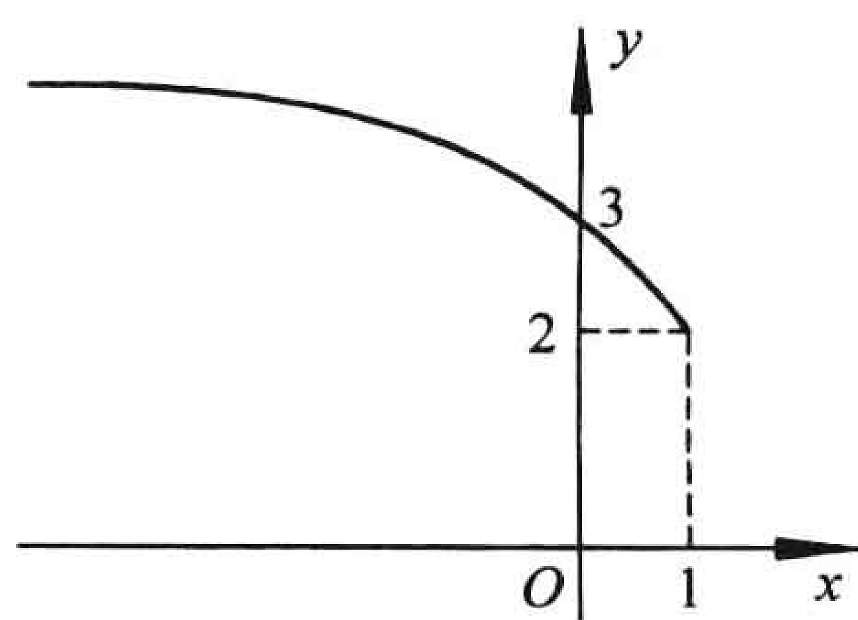


图 1.132

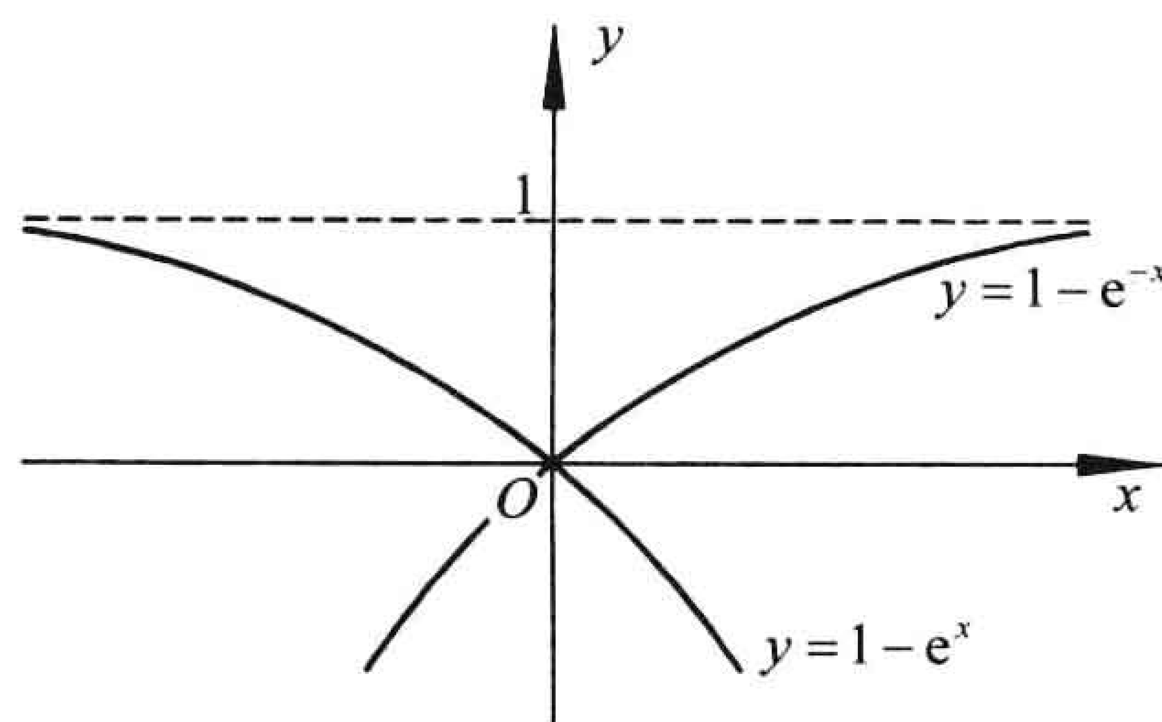


图 1.133

(3)如图 1.134 所示.

(4)如图 1.135 所示的 AB 段曲线.

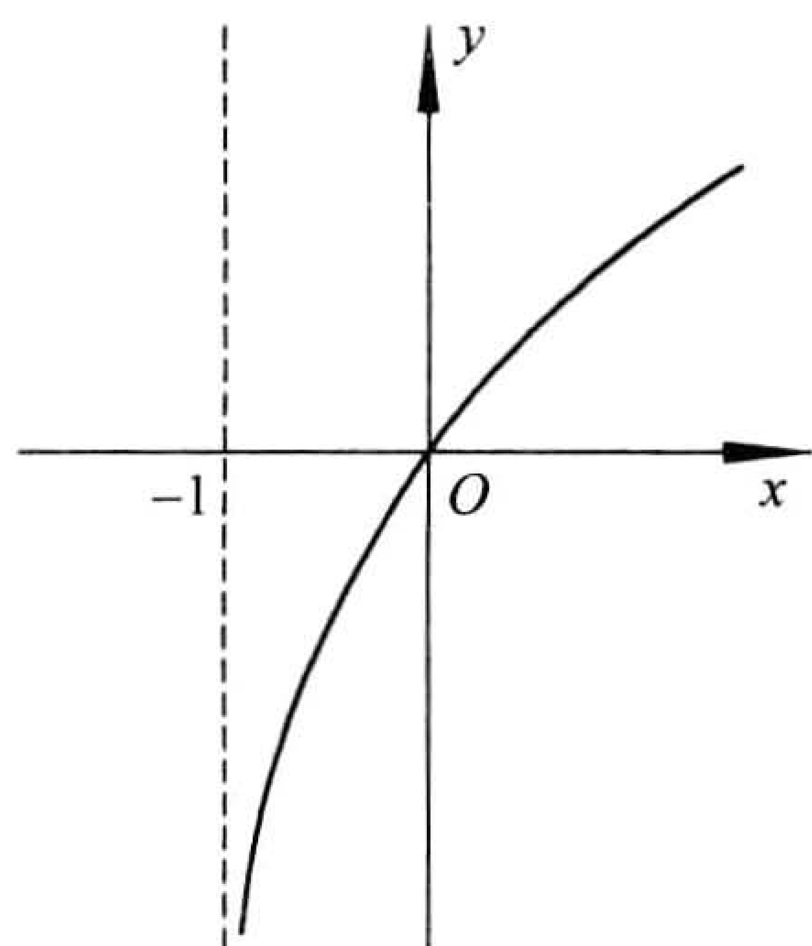


图 1.134

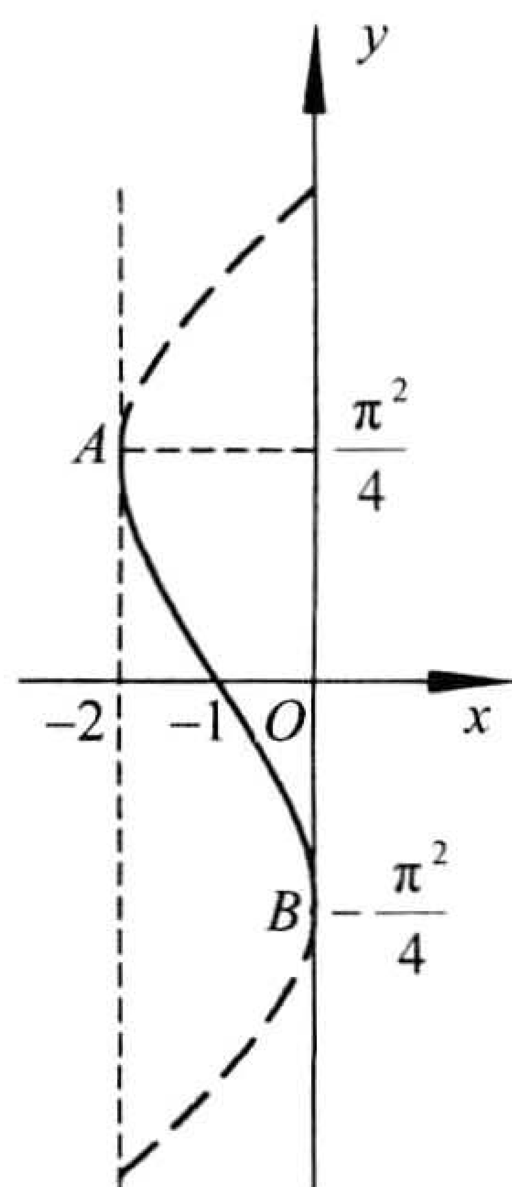


图 1.135

(5)如图 1.136 所示.

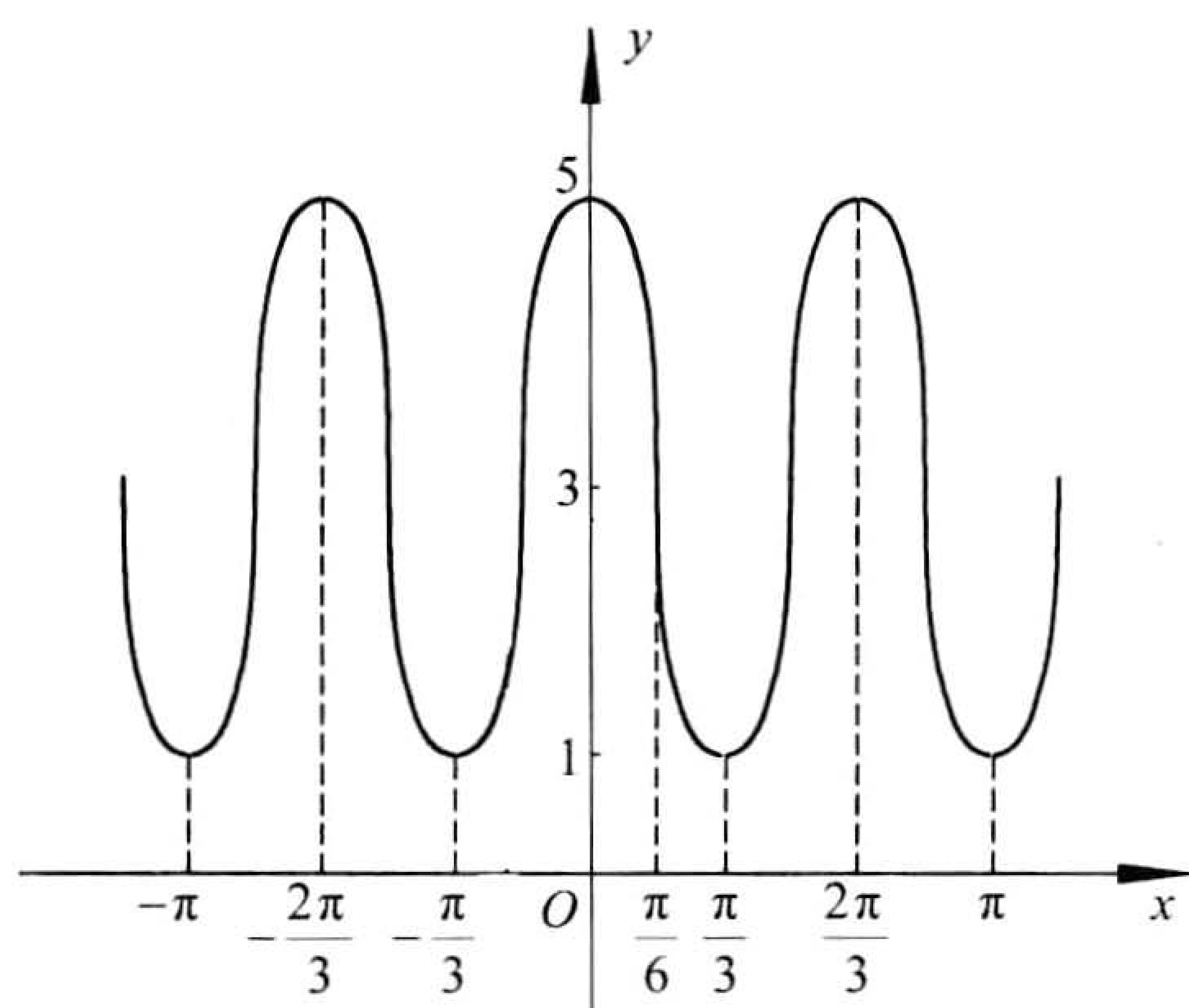


图 1.136

【328】 已知函数 $y=f(x)$的图像,作下列函数的图像:

(1)$y=|f(x)|$;　(2)$y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$;　(3)$y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解　(1)当 $f(x)\geqslant 0$ 时,$y=f(x)$;当 $f(x)<0$ 时,$y=-f(x)$;如图 1.137 黑粗线所示.

(2)当 $f(x)\geqslant 0$ 时,$y=f(x)$;当 $f(x)<0$ 时,$y=0$.如图 1.138 黑粗线所示.

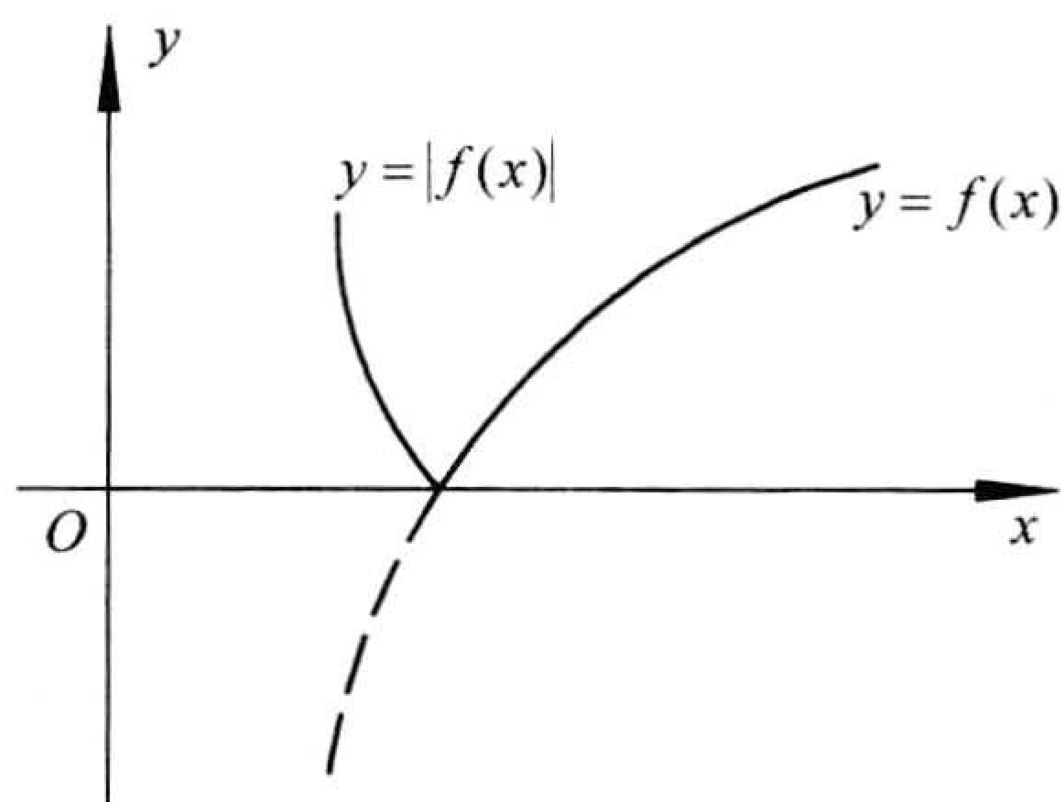


图 1.137

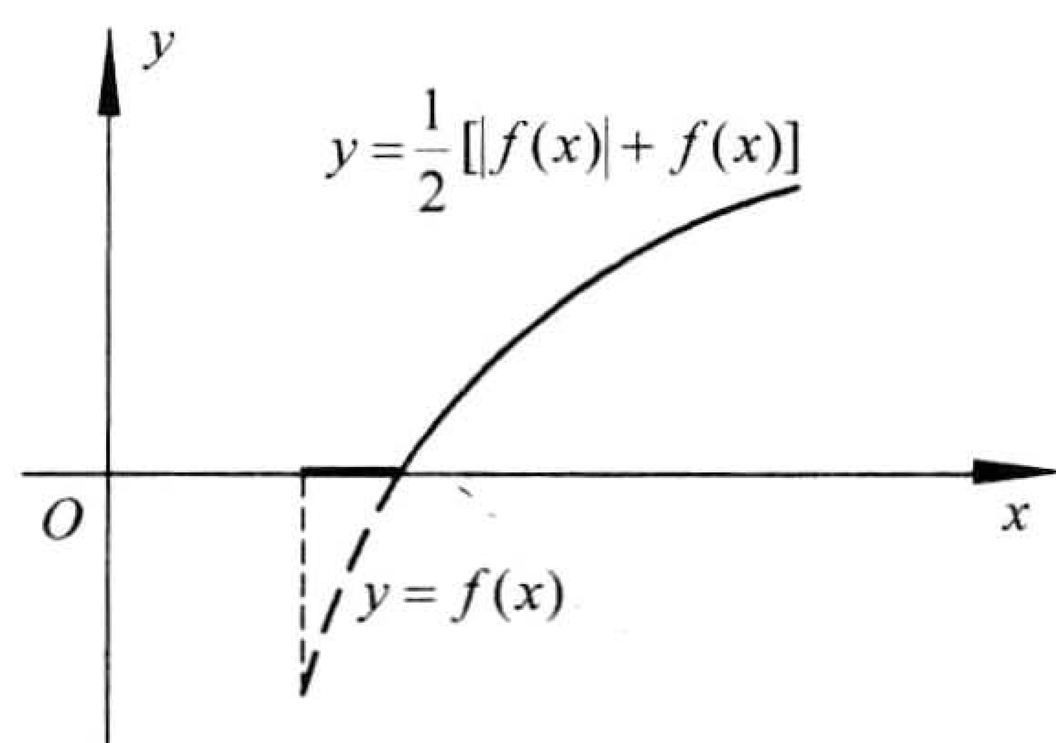


图 1.138

(3)当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=0$；当 $f(x)<0$ 时，$y=-f(x)$；如图 1.139 黑粗线所示.

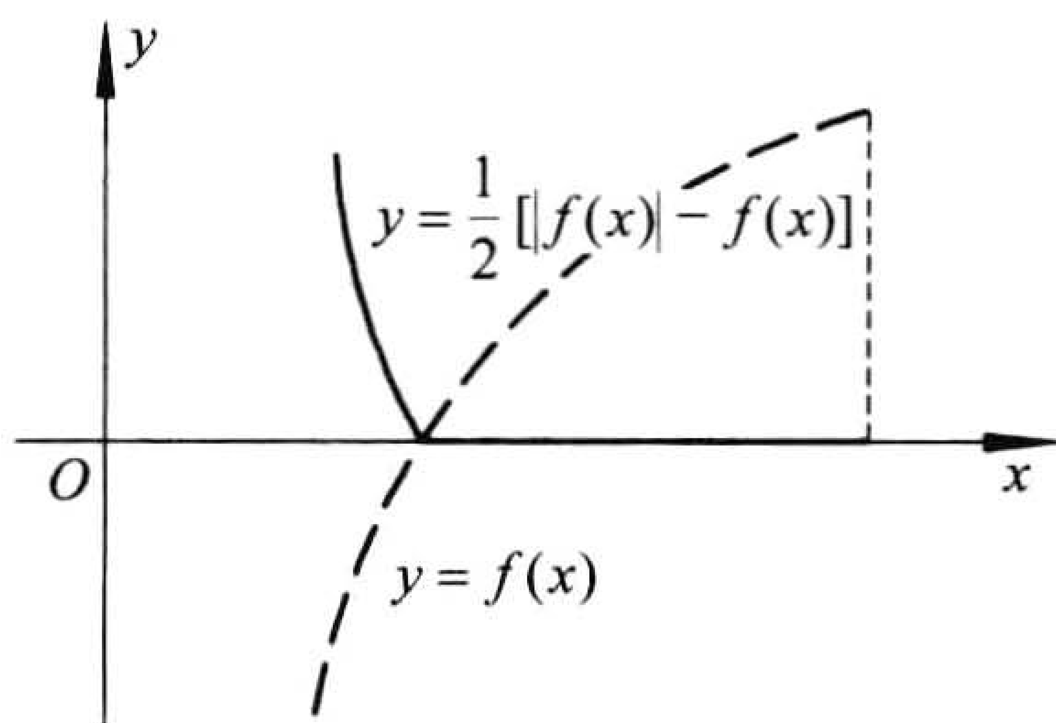


图 1.139

【329】 已知函数 $y=f(x)$的图像，作下列函数的图像：

(1)$y=f^2(x)$；　　(2)$y=\sqrt{f(x)}$；　　(3)$y=\ln f(x)$；

(4)$y=f[f(x)]$；　　(5)$y=\operatorname{sgn} f(x)$；　　(6)$y=[f(x)]$.

解　(1)以 $y=1$ 为图像的分界线.

如图 1.140 所示. 1:$y=f(x)$；　2:$y=f^2(x)$.

(2)当 $f(x)>1$ 时，$\sqrt{f(x)}<f(x)$；而当 $0\leqslant f(x)<1$ 时，$\sqrt{f(x)}\geqslant f(x)$.

如图 1.141 所示. 1:$y=f(x)$；2:$y=\sqrt{f(x)}$.

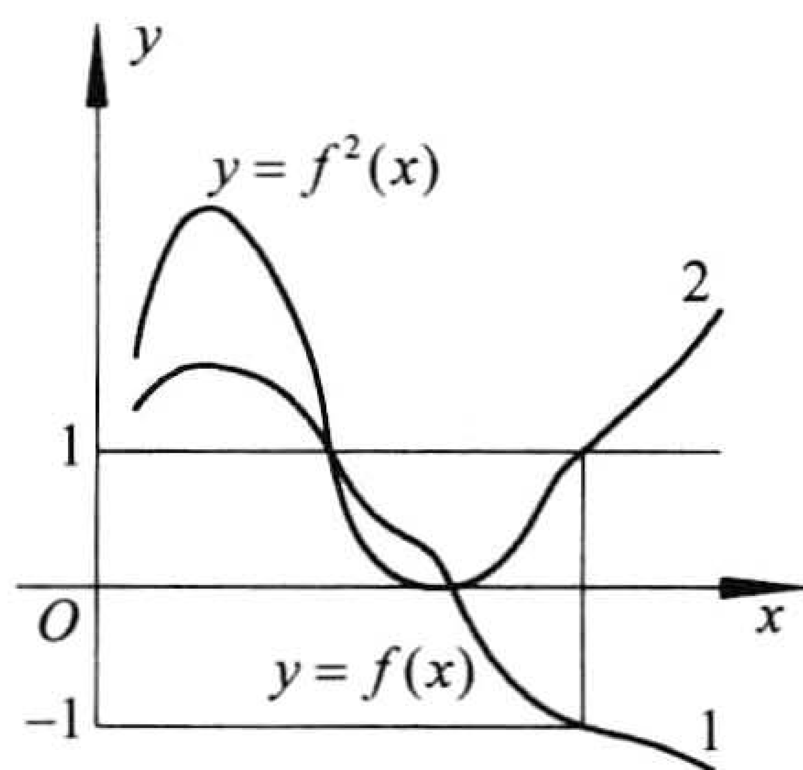


图 1.140

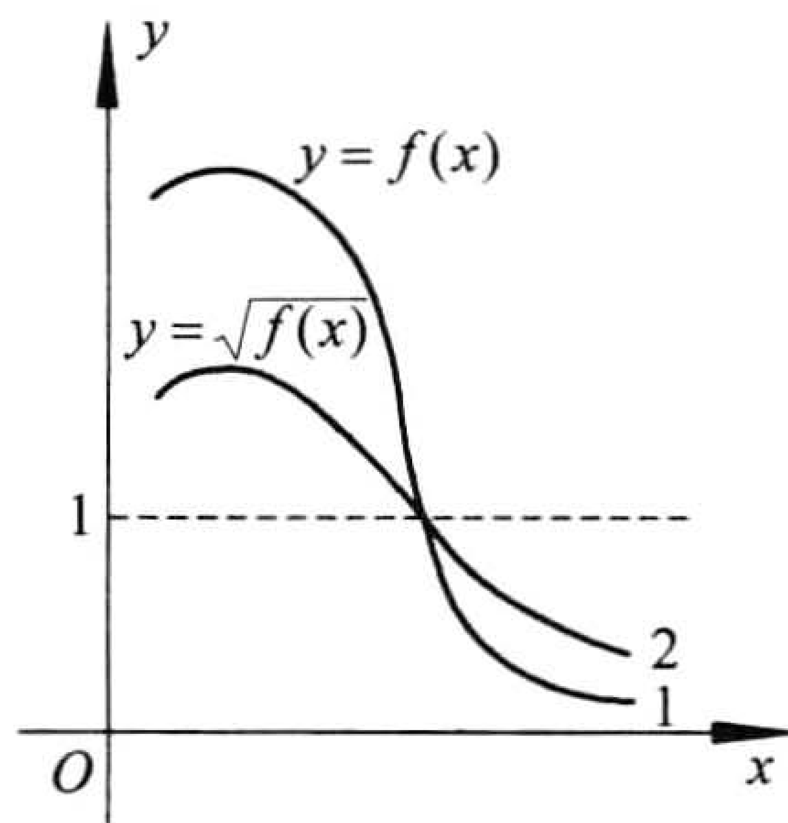


图 1.141

(3)当 $f(x)\geqslant 1$ 时，$\ln f(x)<f(x)$；而当 $0<f(x)<1$ 时，$\ln f(x)<f(x)$，故 $y=\ln f(x)$的图像始终在 $y=f(x)$之下. 如图 1.142 所示.

(4)若 $y=f(x)$的存在域为$[a,b]$，则仅当 $f(x)$之值在 a 与 b 之间，才能使 $f[f(x)]$有意义. 其详细作图法见 330 题(3).

如图 1.143 所示. 1:$y=f(x)$；2:$y=f[f(x)]$.

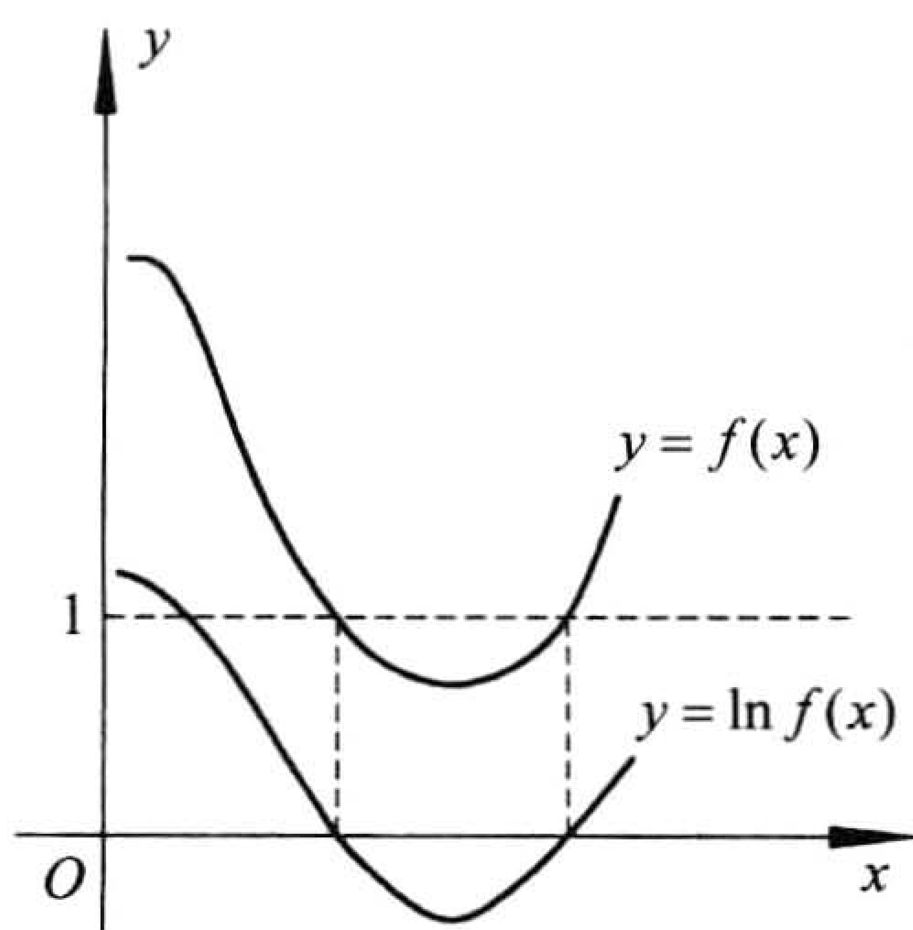


图 1.142

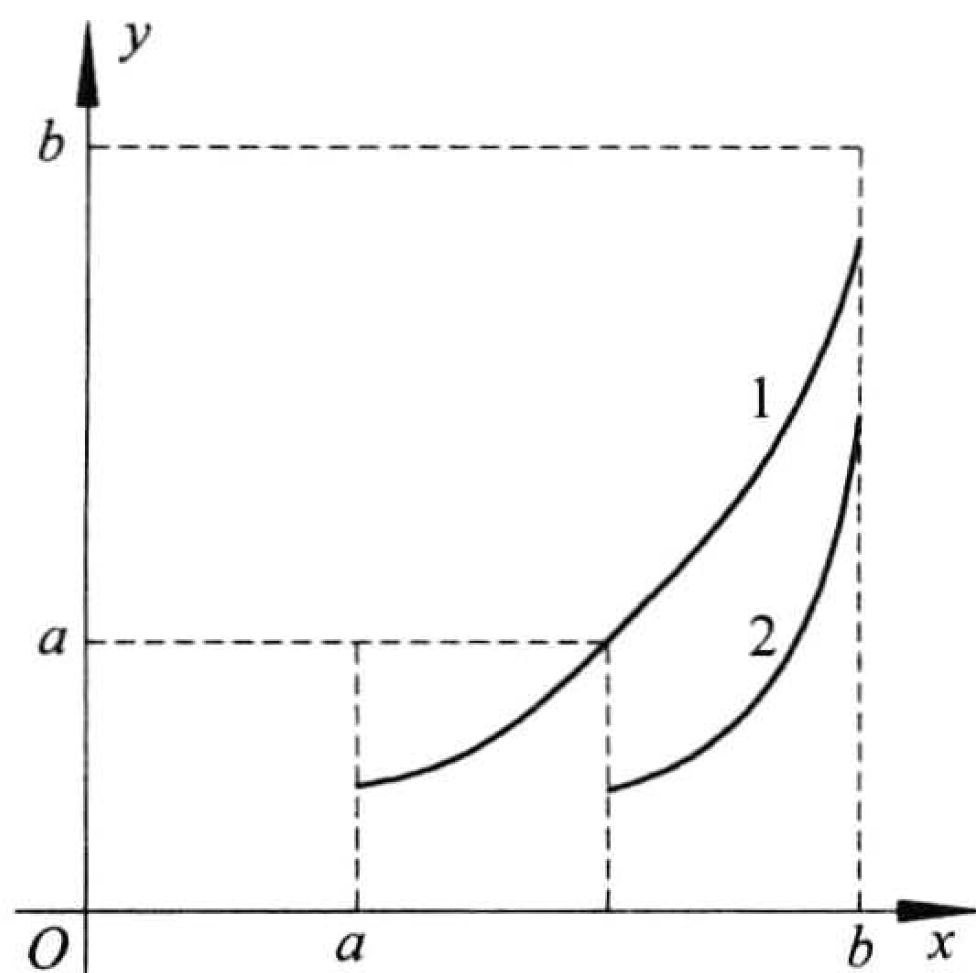


图 1.143

(5)当 $f(x)>0$ 时，$y=1$；当 $f(x)=0$ 时，$y=0$；当 $f(x)<0$ 时，$y=-1$. 如图 1.144 所示.

(6)当 $n\leqslant f(x)<n+1$ 时，$y=n$(n 为正整数). 如图 1.145 所示.

其中图 1.144 及 1.145 均为黑粗线所示的图像.

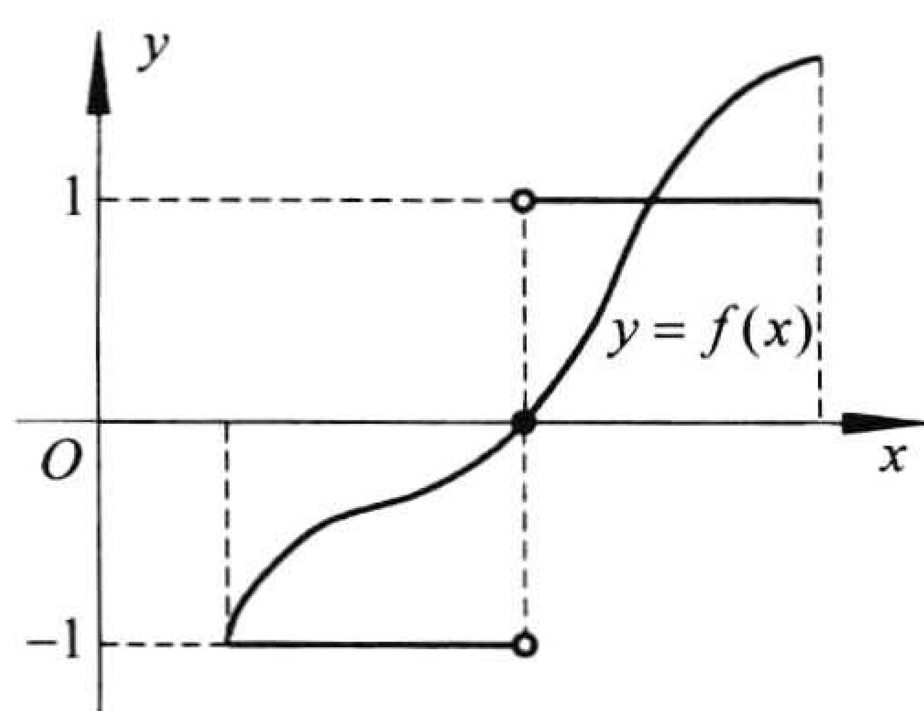


图 1.144

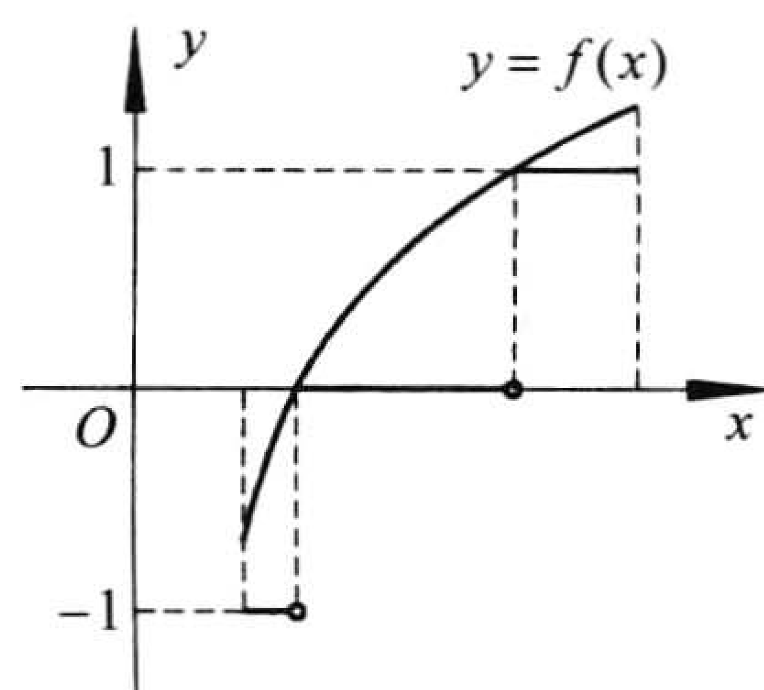


图 1.145

【330】 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像，作下列各函数的图像：

(1) $y=f(x)+g(x)$；　(2) $y=f(x)g(x)$；　(3) $y=f[g(x)]$.

解　(1)利用图像相加法即得. 如图 1.146 所示.

(2)利用图像相乘法即得. 如图 1.147 所示.

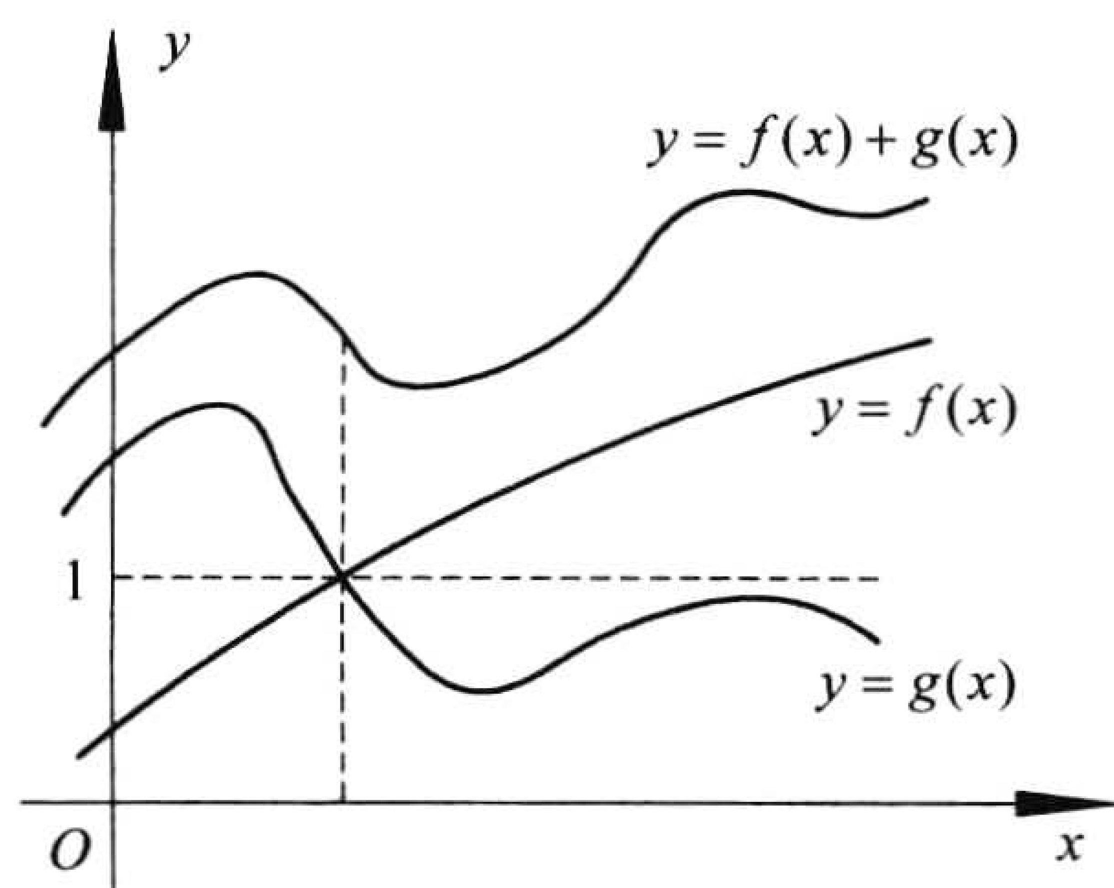


图 1.146

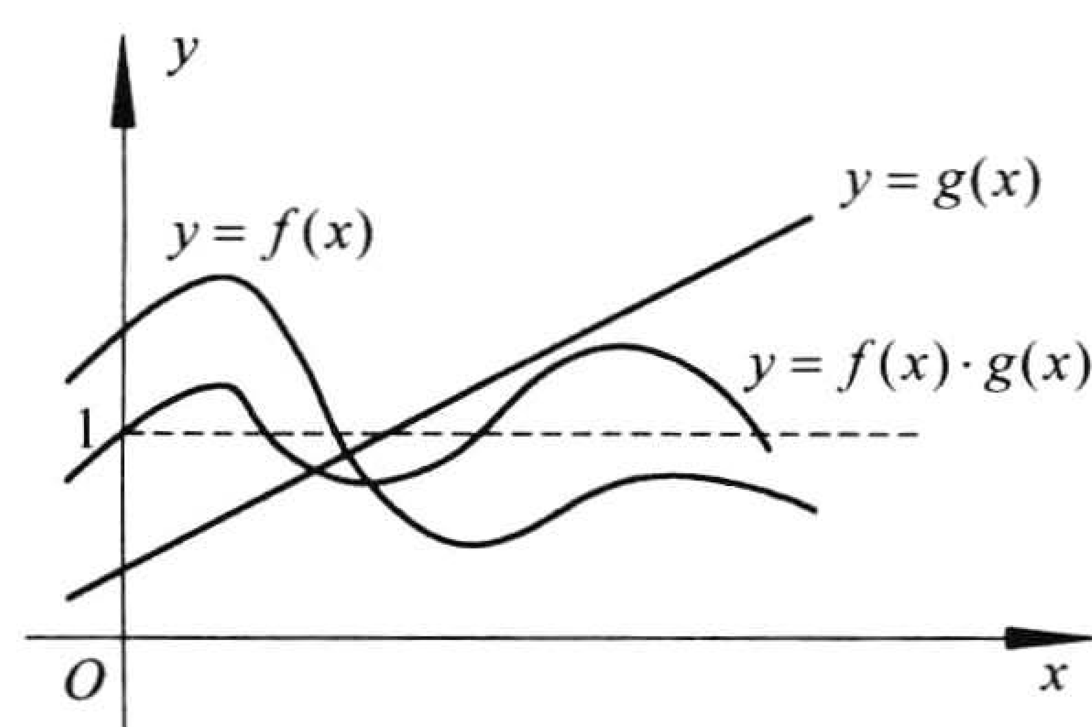


图 1.147

(3)如图 1.148 所示. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引铅直线. 它和 $y=g(x)$ 的图像相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). $PQ=g(x)$. 过 Q 点引水平线，它与 $y=x$ 交于 R 点，过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$ 分别交于 T 点及 S 点，则 $OT=TR=PQ=g(x)$，因而 $TS=f[g(x)]$. 最后，把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点，此即函数 $y=f[g(x)]$ 图像上的一点. 至于该图像上的其他点，同法求得. 但要注意，函数 $y=f[g(x)]$ 的存在域是满足不等式

$$a\leqslant g(x)\leqslant b$$

的数 x 的集合，式中 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

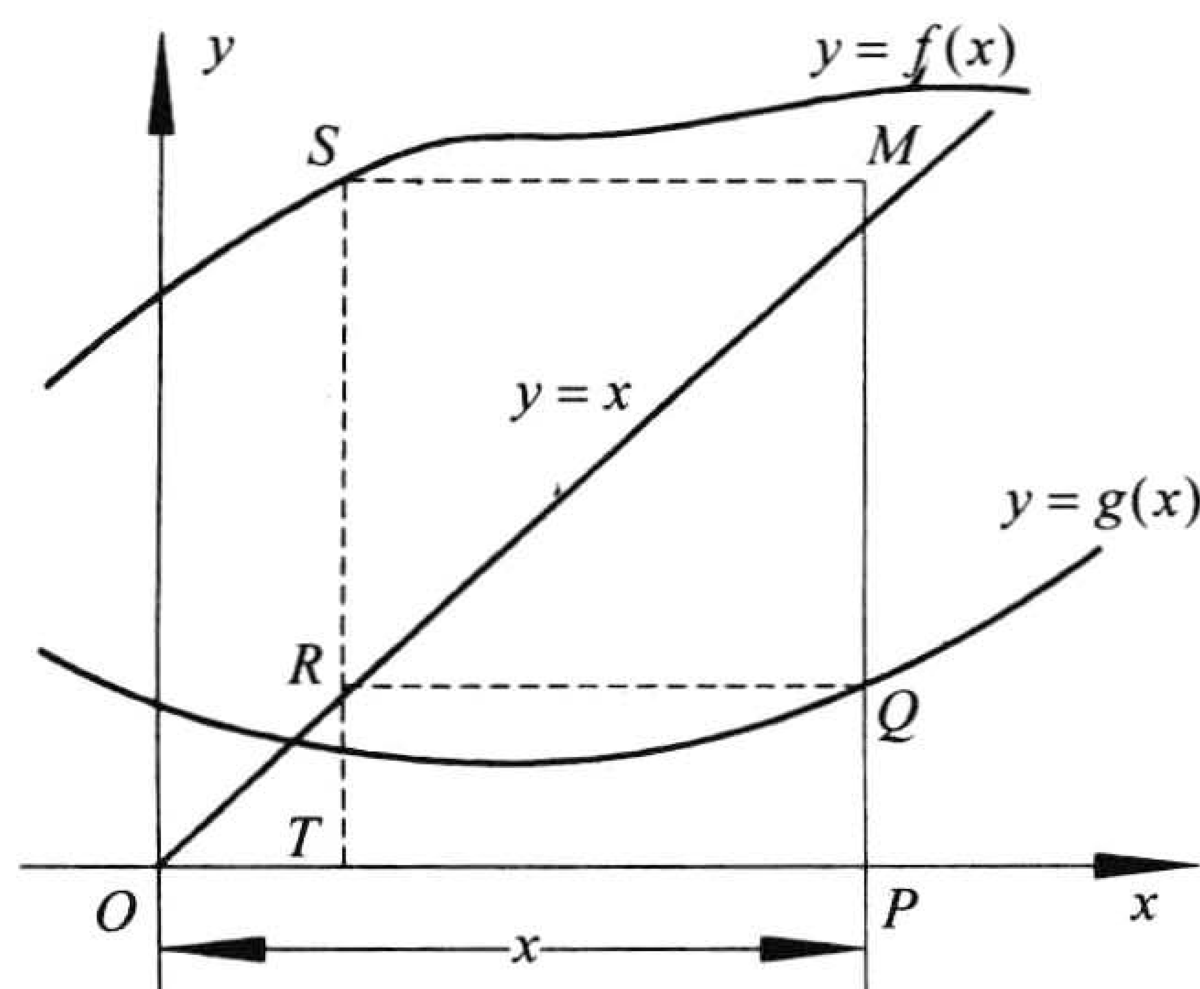


图 1.148

利用图像的加法,作下列函数的图像:

【331】 $y=1+x+e^x$.

解 如图 1.149 所示.

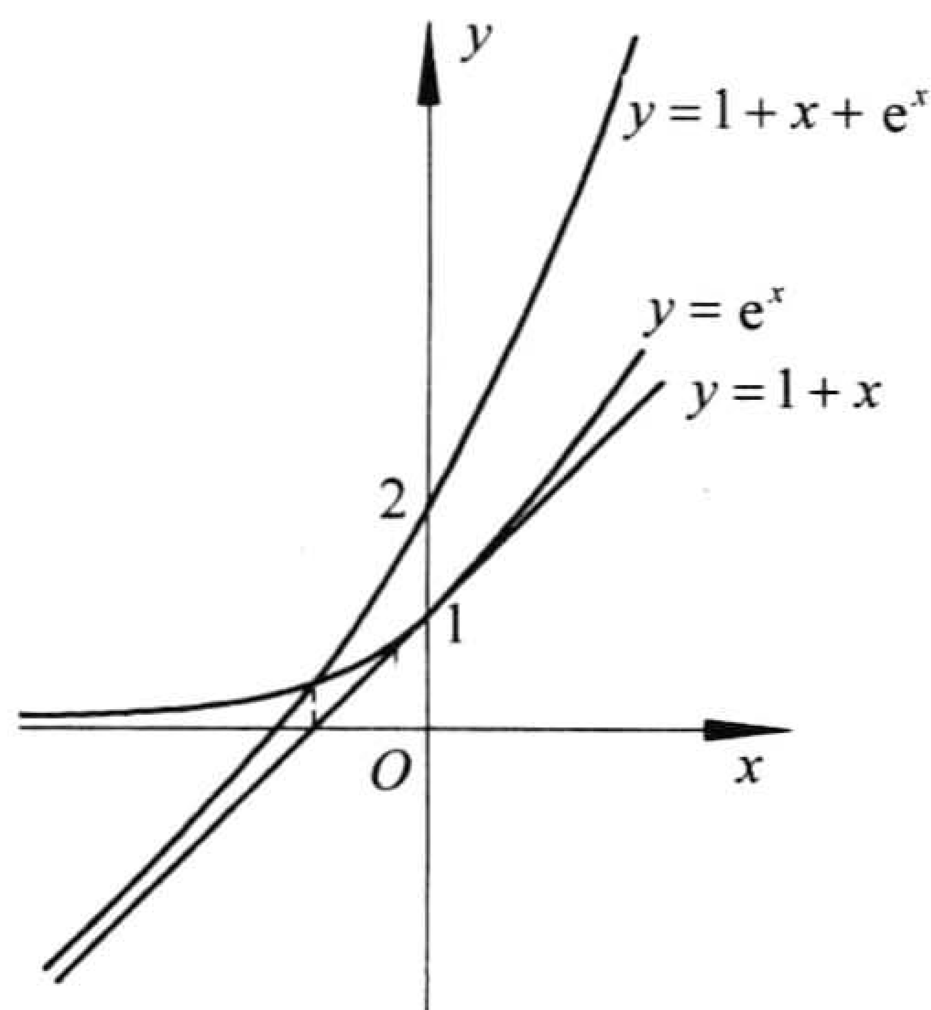


图 1.149

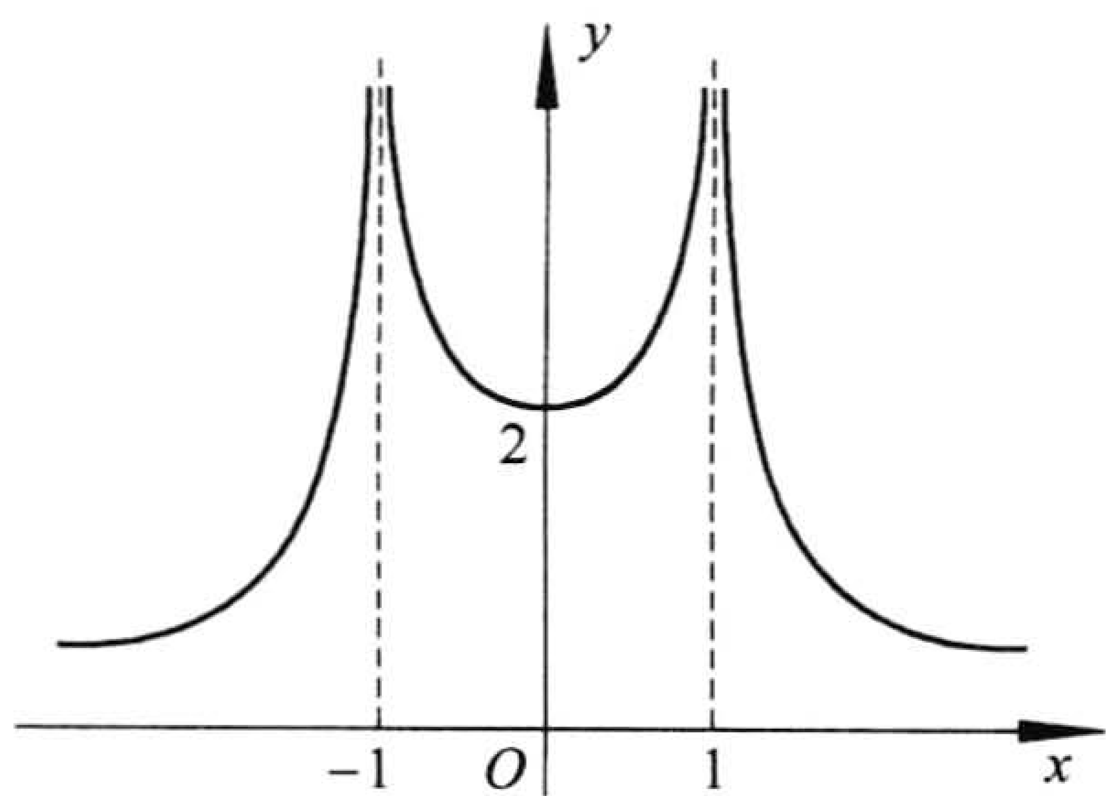


图 1.150

【332】 $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.如图 1.150 所示.

【333】 $y=x+\sin x$.

解 如图 1.151 所示. $P_1Q_1=P_2Q_2=\cdots=1$.

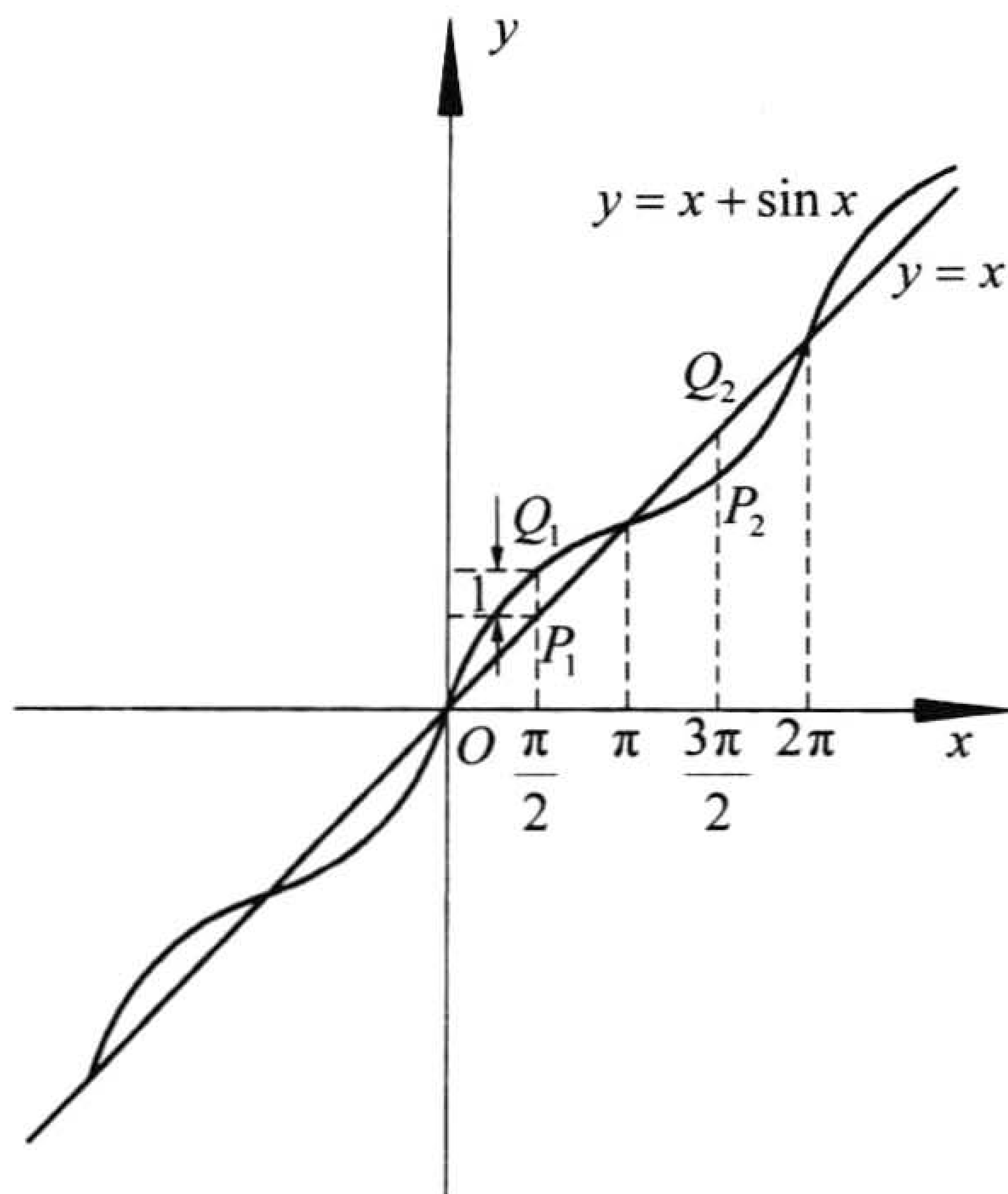


图 1.151

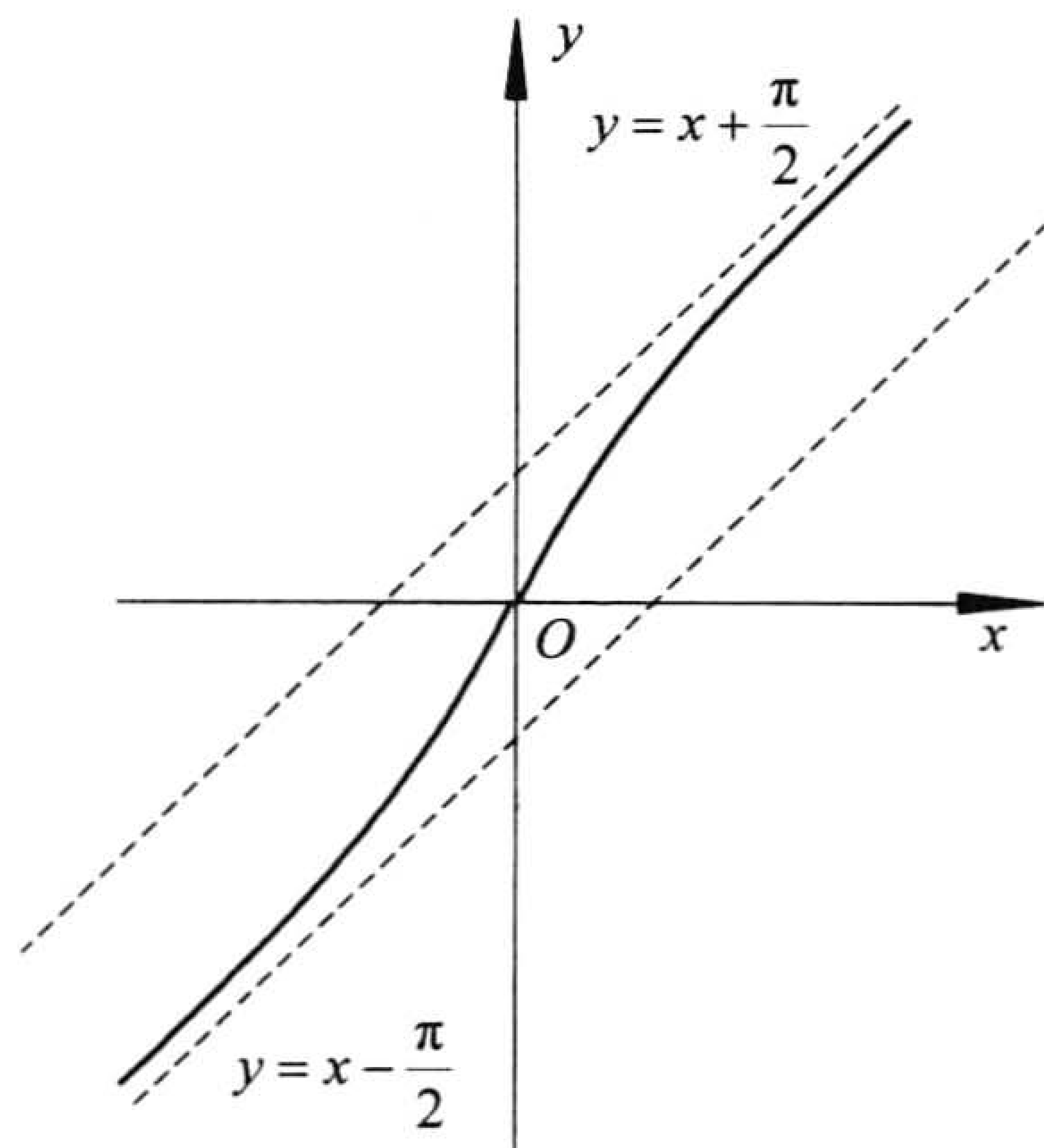


图 1.152

【334】 $y=x+\arctan x$.

解 如图 1.152 所示.图中仅画了主值的一支,一般地,在平行线 $y=x+(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $y=x+(2k-1)\frac{\pi}{2}$ 之间($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$),有类似的一支.

【335】 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$.

解 图像关于 Oy 轴对称,且关于直线 $x=k\pi$ 对称.周期为 2π.

如图 1.153 所示.

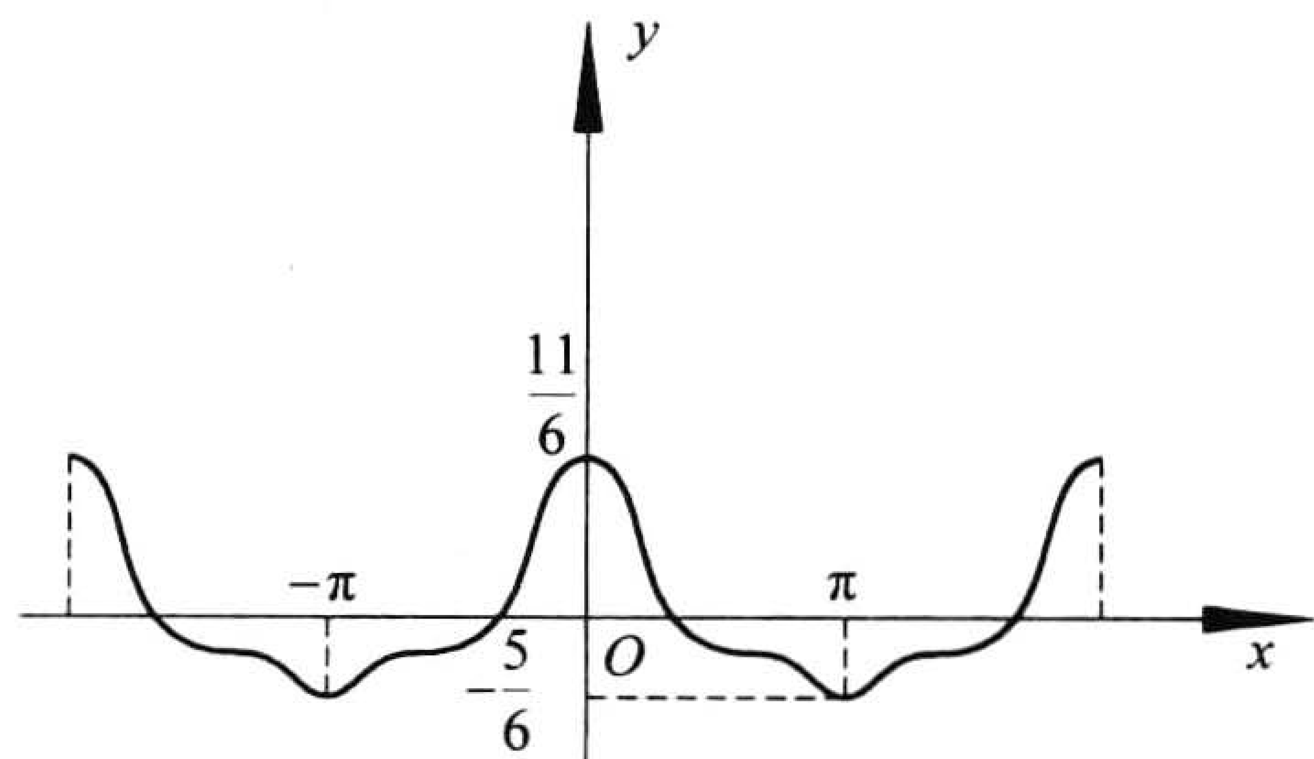


图 1.153

【336】 $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$.

解 图像关于原点对称，周期为 2π，且有 $f(x+\pi)=-f(x)$，故在$[0,2\pi]$内图像关于直线 $x=\pi$ 反对称*. 因此，我们只需做出$[0,\pi]$内的图像即可.

如图 1.154 所示.

*) 即关于点 π 对称，也称之为以 π 为周期的反周期函数.

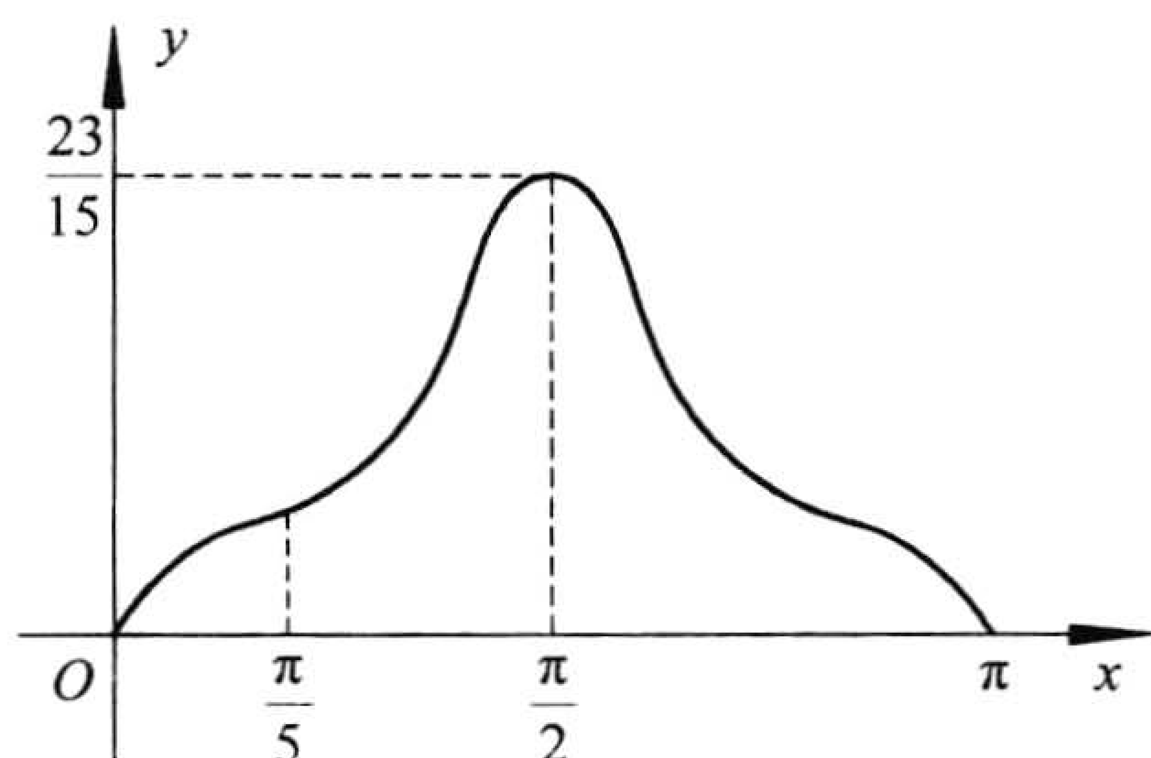


图 1.154

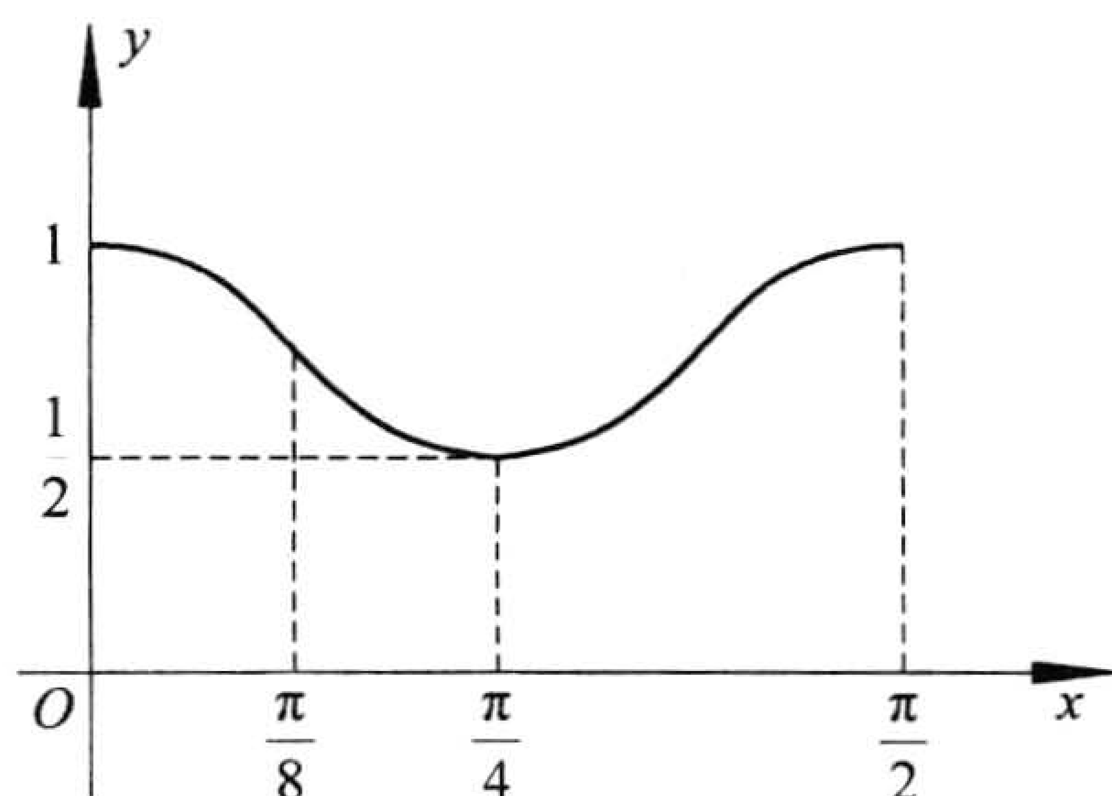


图 1.155

【337】 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 图像关于 Oy 轴对称. 周期为$\frac{\pi}{2}$. 如图 1.155 所示.

【338】 $y=|1-x|+|1+x|$.

解 当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=2$；

当 $x<-1$ 时，$y=-2x$；

当 $x>1$ 时，$y=2x$.

如图 1.156 所示.

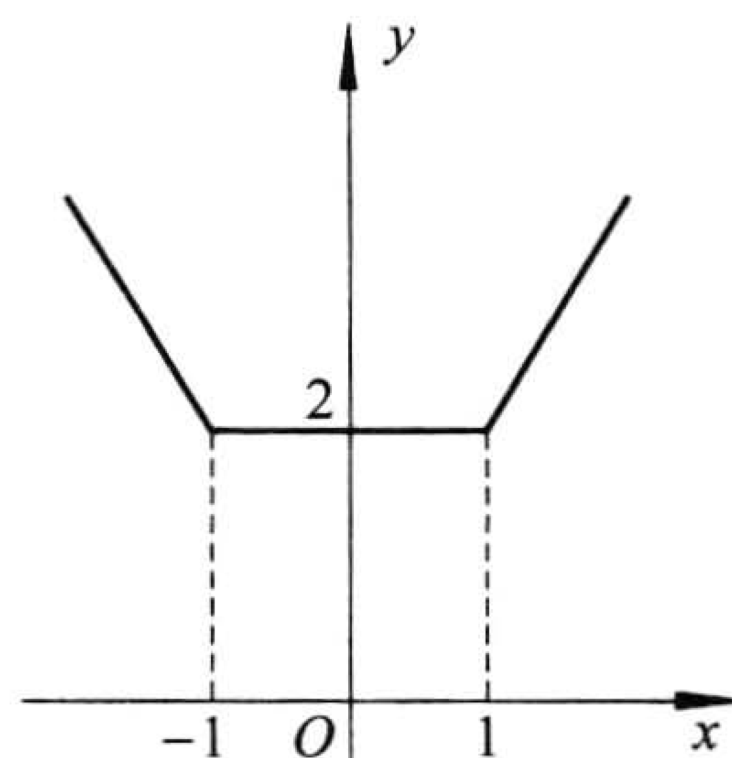


图 1.156

【339】 $y=|1-x|-|1+x|$.

解 当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=-2x$；当 $x<-1$ 时，$y=2$；当 $x>1$ 时，$y=-2$.

如图 1.157 所示.

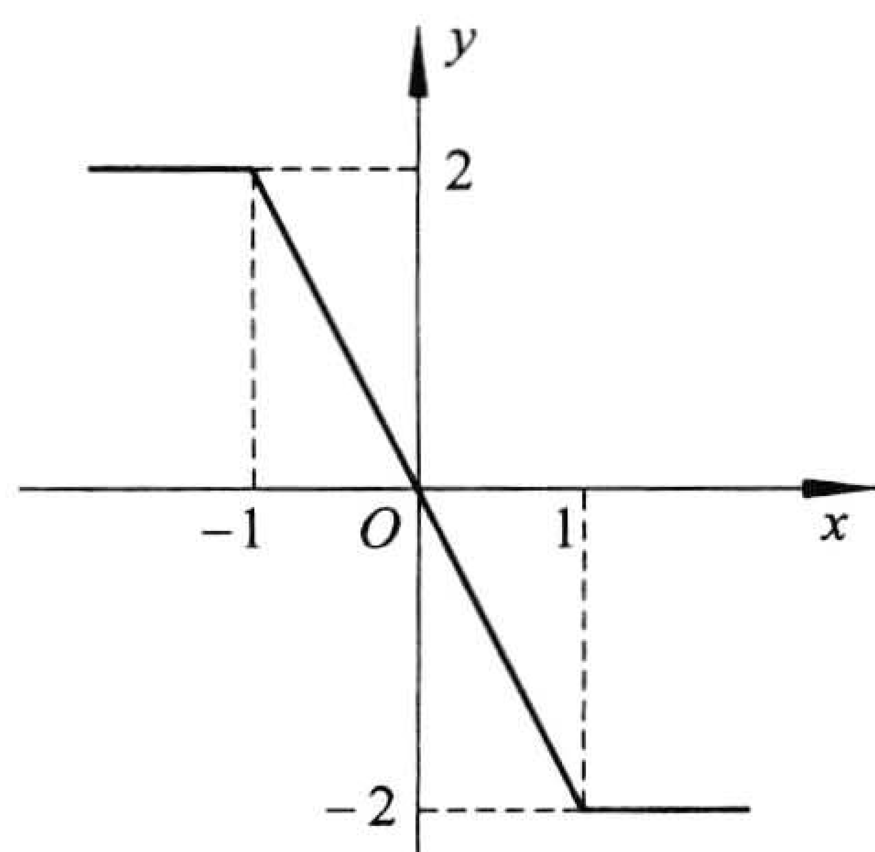


图 1.157

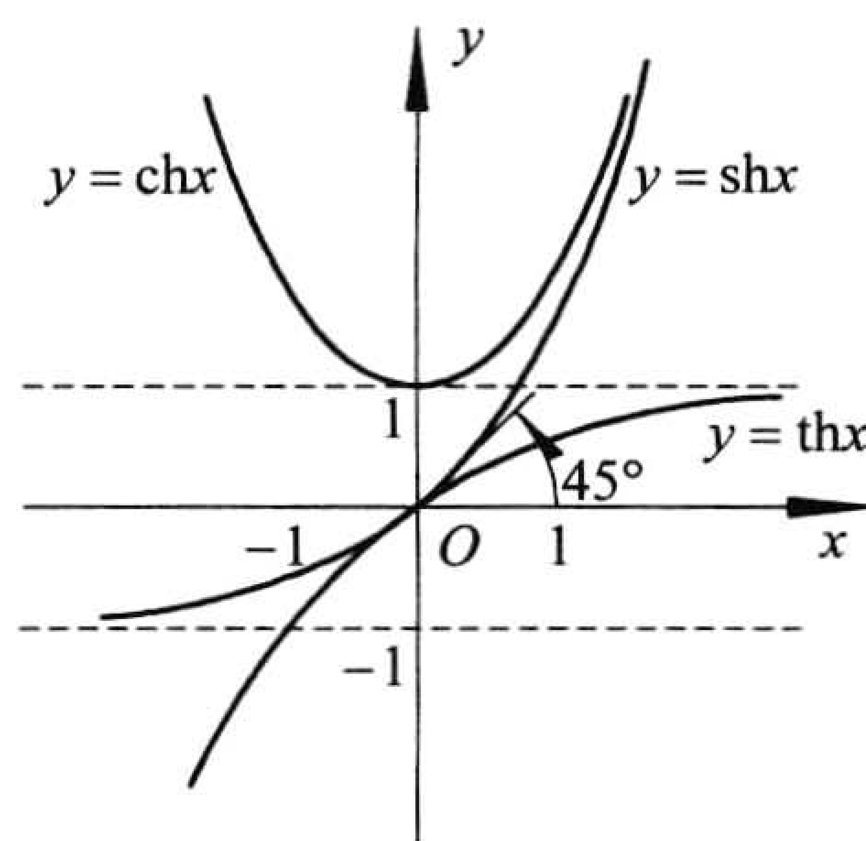


图 1.158

【340】 作双曲线函数的图像：

(1) $y=\text{ch}x$，式中 $\text{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；

(2) $y=\text{sh}x$，式中 $\text{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；

(3) $y=\text{th}x$，式中 $\text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$.

解 如图 1.158 所示.

利用图像的乘法,作下列函数的图像:

【341】 $y=x\sin x$.

解 当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$.图像关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时,$y=x$;又当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时,$y=-x$.

如图 1.159 所示.

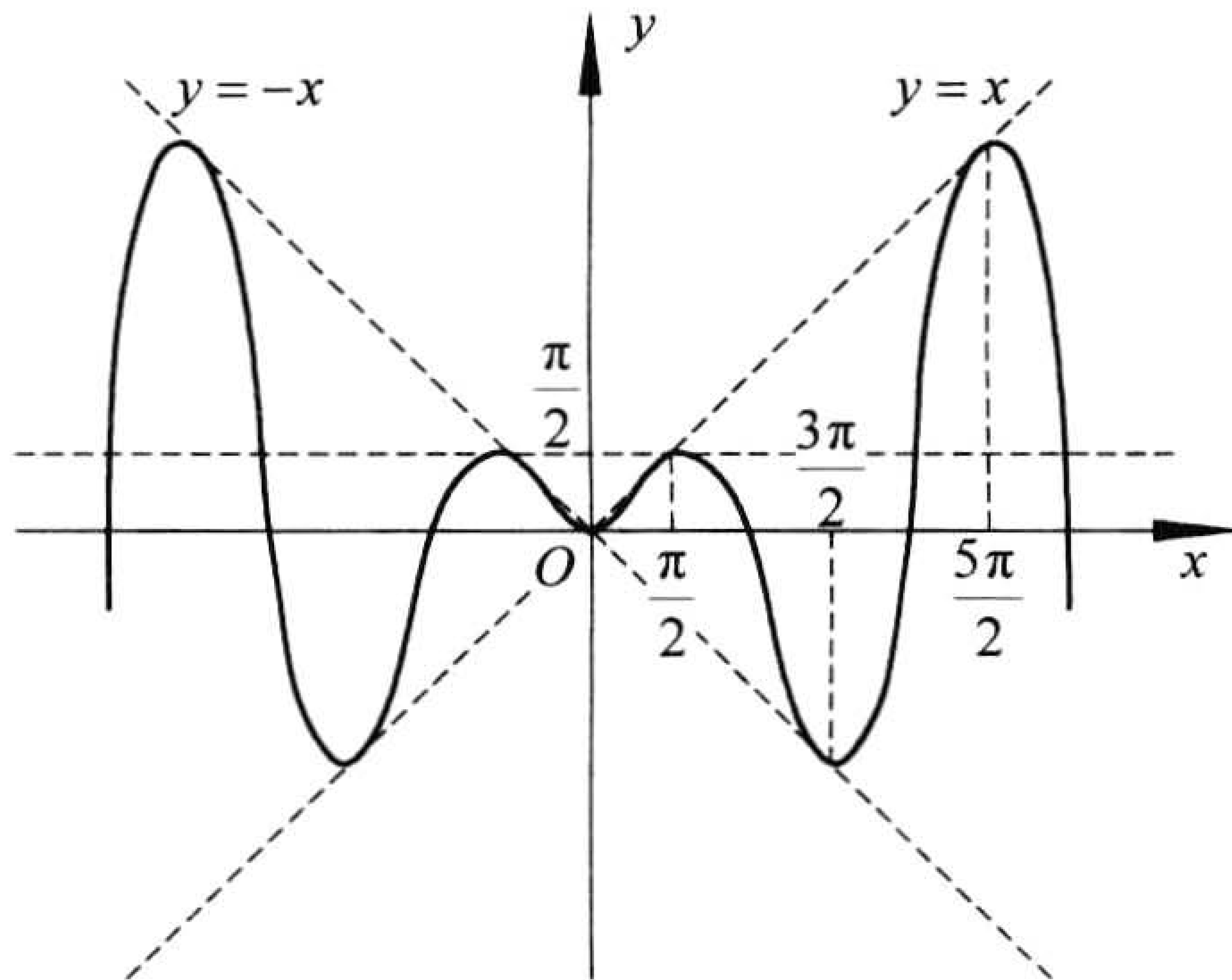


图 1.159

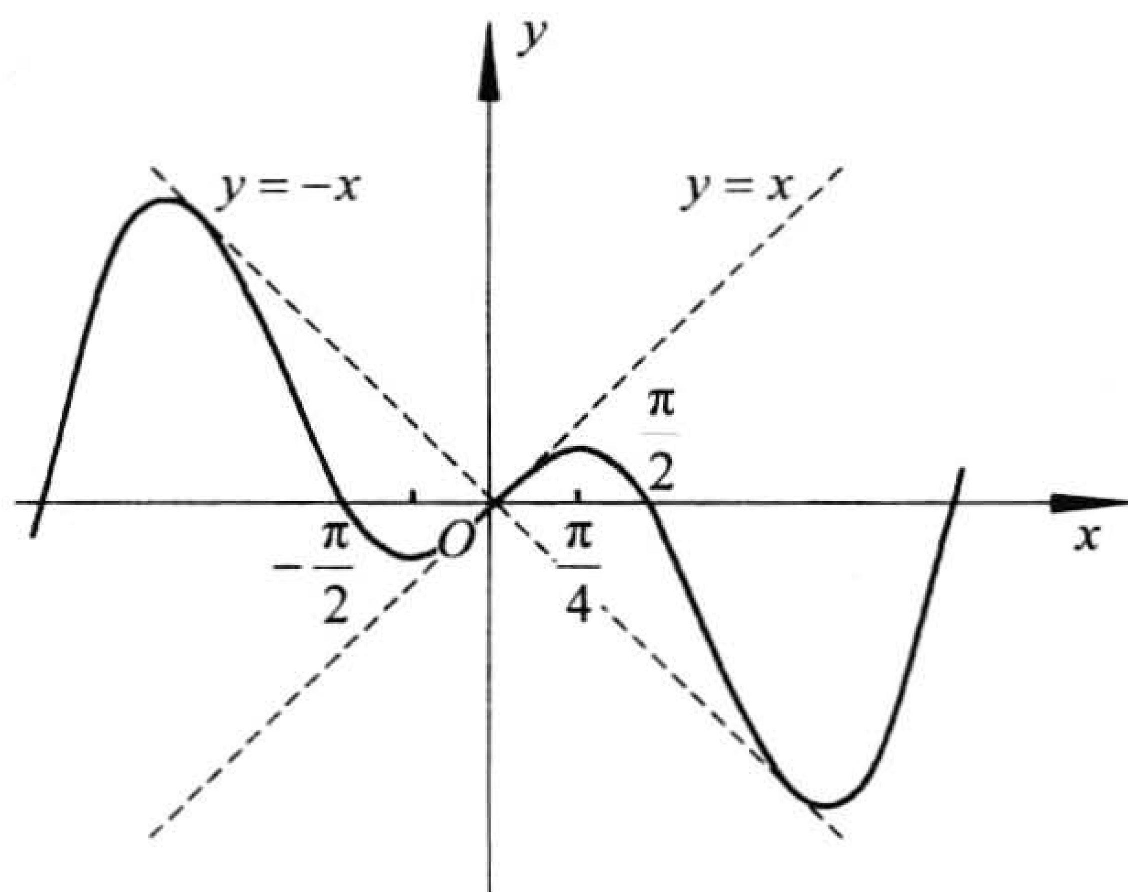


图 1.160

【342】 $y=x\cos x$.

解 图像关于原点对称.

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$;当 $x=2k\pi$ 时,$y=x$;当 $x=(2k+1)\pi$ 时,$y=-x$.

如图 1.160 所示.

【343】 $y=x^2\sin^2x$.

解 只要将图像 $y=x\sin x$ 作出后,再按 329 题(1)的作法画出.

如图 1.161 所示.

其实,我们也可由下列几点画出该函数的图像:

$$0\leqslant y\leqslant x^2;$$

当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$;

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$时,$y=x^2$.图像关于 Oy 轴对称.

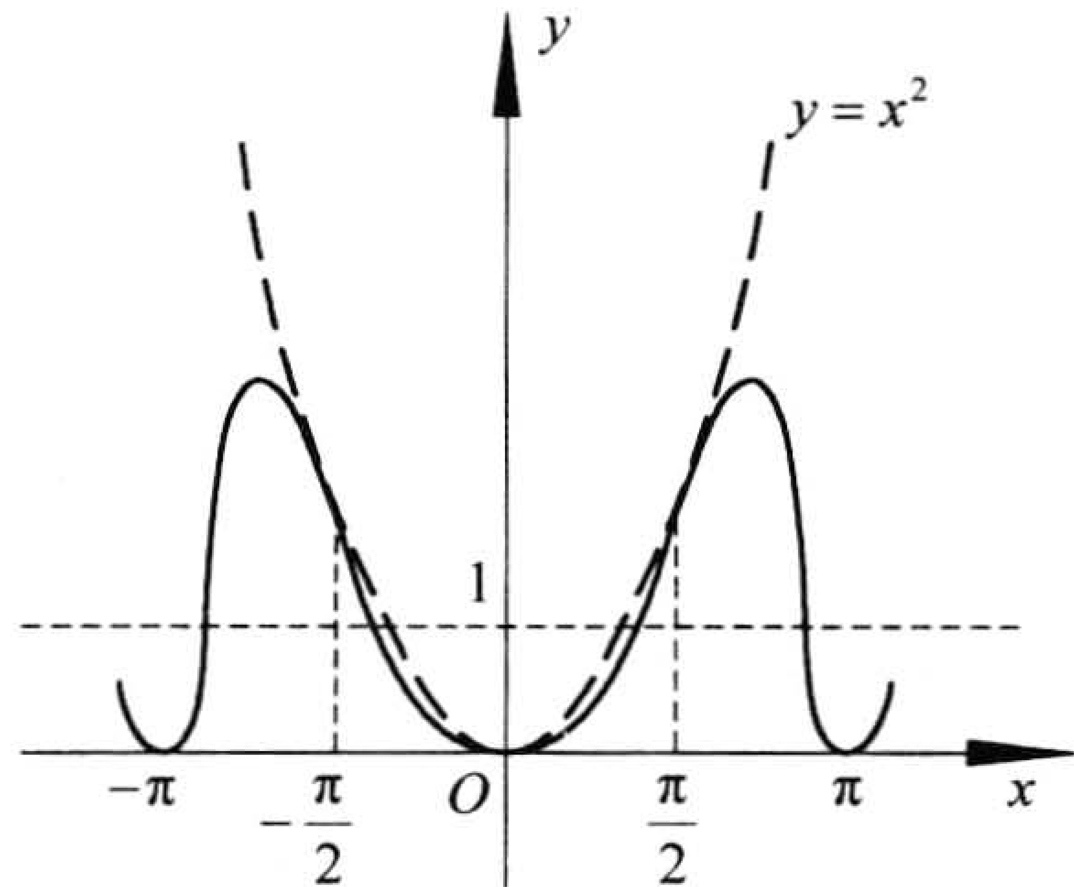


图 1.161

【344】 $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 图像关于原点对称.

当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$;当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时,$y=-\frac{1}{1+x^2}$;当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时,$y=\frac{1}{1+x^2}$.

当 $x\to\infty$时,$y\to0$.如图 1.162 所示.

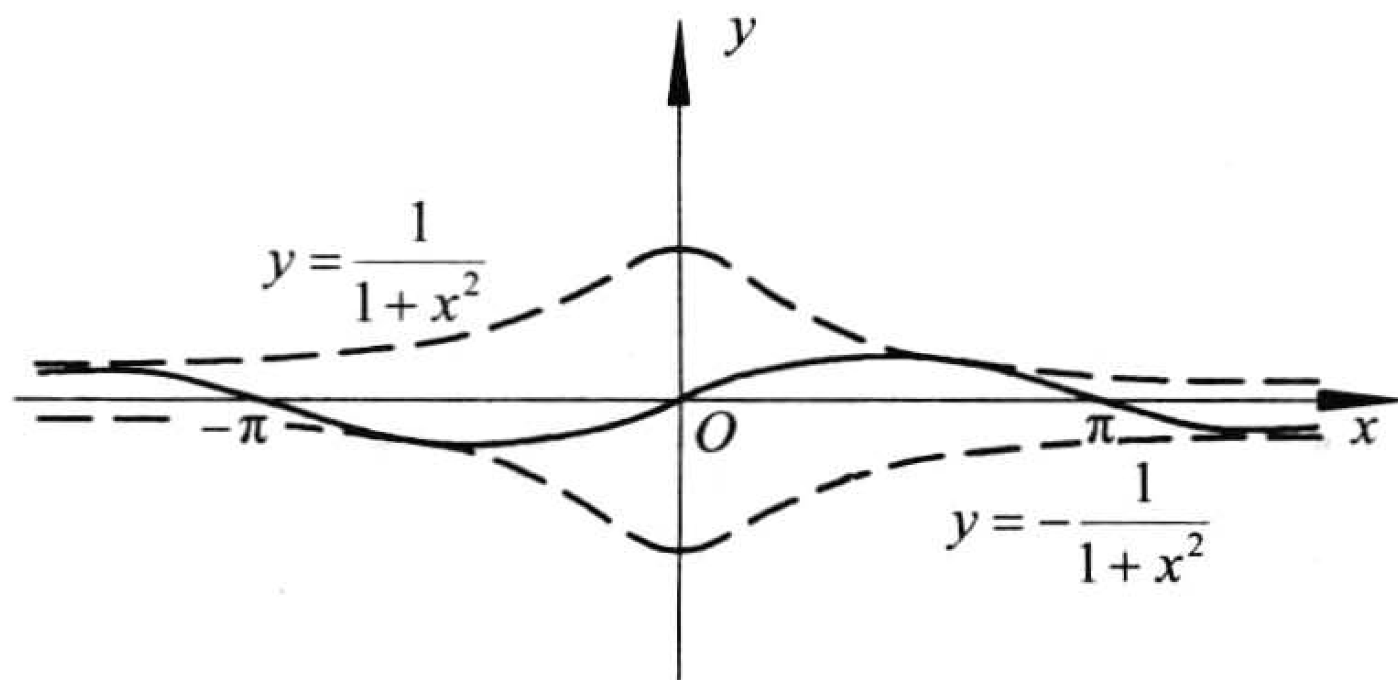


图 1.162

【345】 $y=e^{-x^2}\cos 2x$.

解 因$-e^{-x^2}\leqslant y\leqslant e^{-x^2}$，故图像在图像$y=e^{-x^2}$及$y=-e^{-x^2}$之间.

如图 1.163 所示.

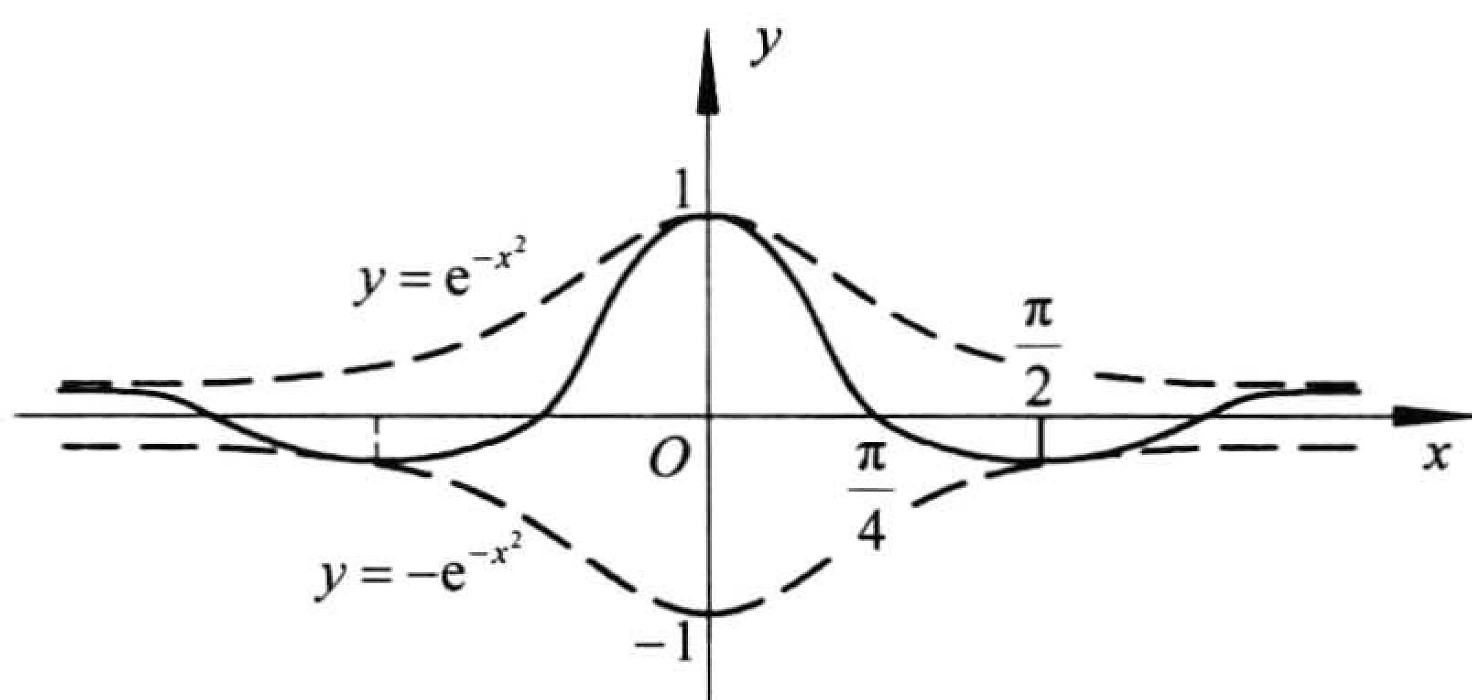


图 1.163

【346】 $y=x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$.

解 图像关于Oy轴对称.

当$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；当$2k\pi<x<(2k+1)\pi$时，$y=x$；当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$时，$y=-x$.

如图 1.164 所示.

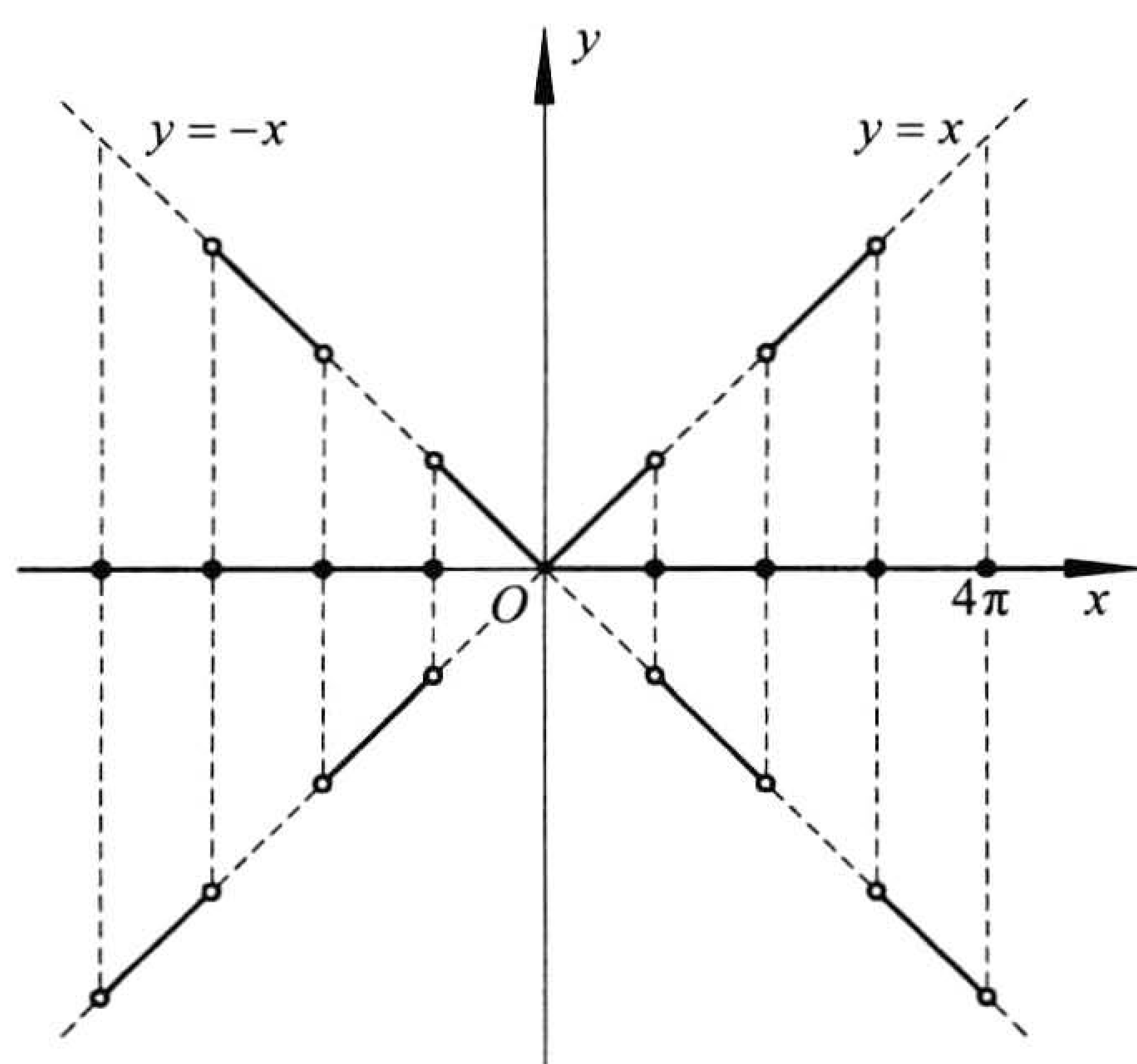


图 1.164

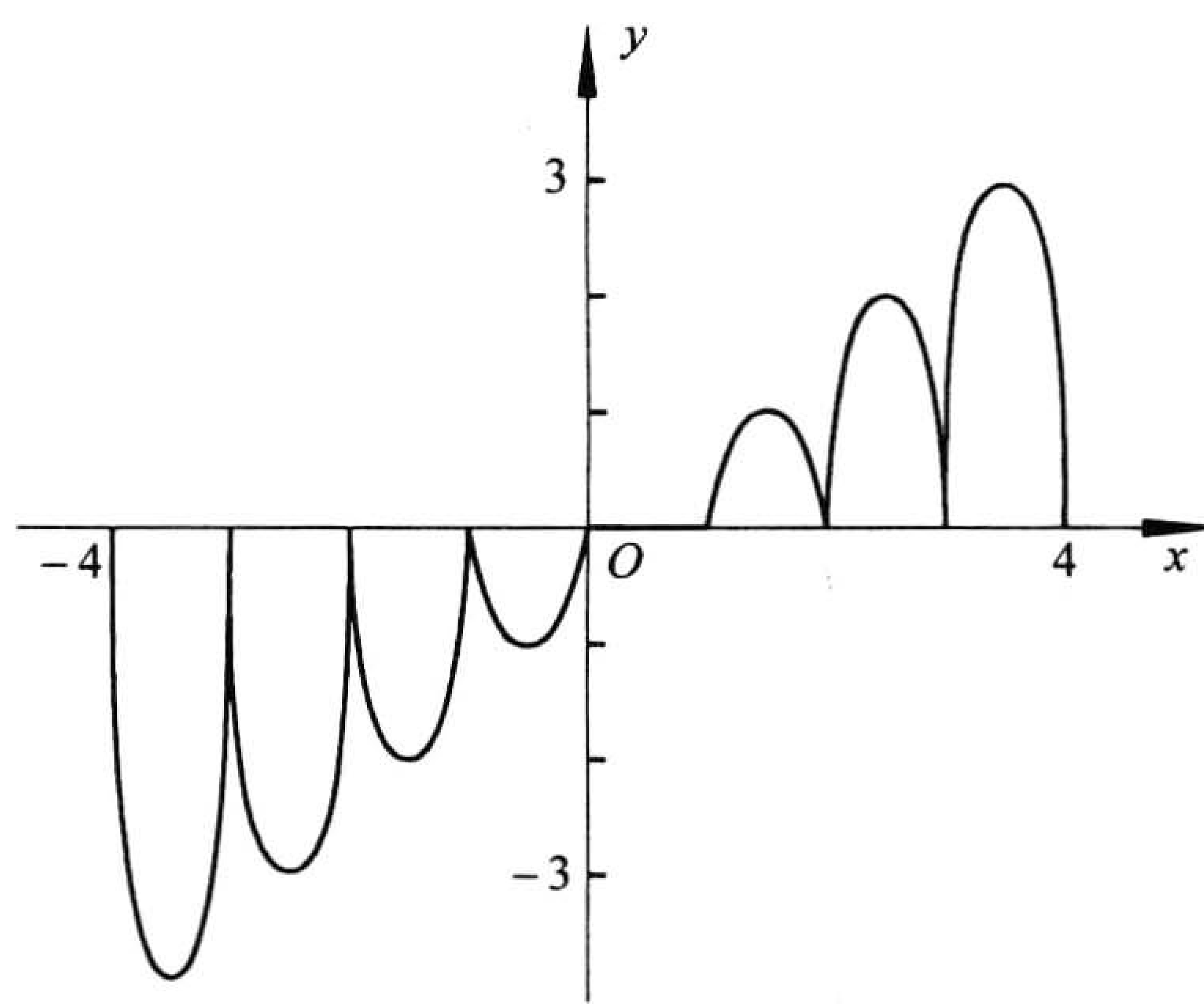


图 1.165

【347】 $y=[x]\cdot|\sin\pi x|$.

解 当$x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；当$n<x<n+1$($n$为正整数)时，$y=n|\sin\pi x|$.

如图 1.165 所示.

【348】 $y=\cos x\cdot\mathrm{sgn}(\sin x)$.

解 图像关于原点对称. 周期为π.

当$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；当$2k\pi<x<(2k+1)\pi$时，$y=\cos x$；当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$时，$y=-\cos x$.

如图 1.166 所示.

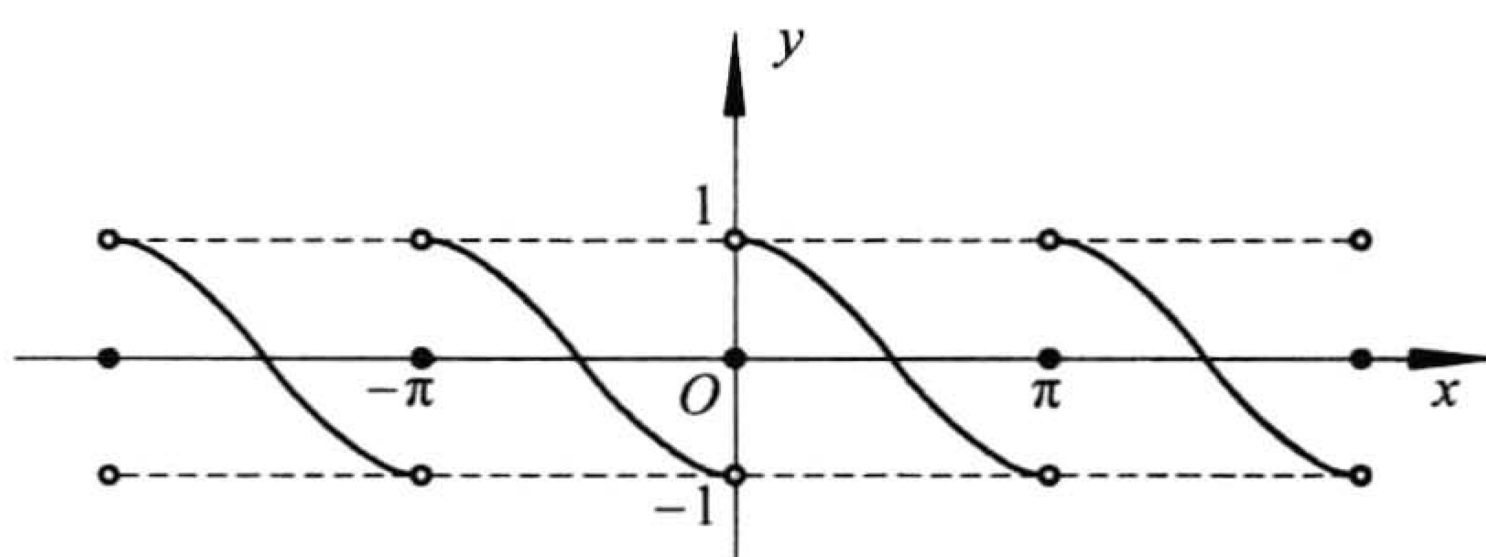


图 1.166

【349】 设 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

作函数 $y=f(x)f(a-x)$ 当(1)$a=0$,(2)$a=1$,(3)$a=2$ 时的图像.

解题思路 (1)$f(x)$为偶函数,故 $y=f^2(x)$. 由 $f(x)$的定义得 $y=\begin{cases}(1+x)^2, & -1\leqslant x<0,\\ (1-x)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(2) $y=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x-x^2, & 0<x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (3) $y=0$.

解 (1)$y=f(x)f(-x)$. 因为 $f(x)$为偶函数,所以,$y=f^2(x)$. 由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}(1+x)^2, & -1\leqslant x<0,\\ (1-x)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

如图 1.167 所示.

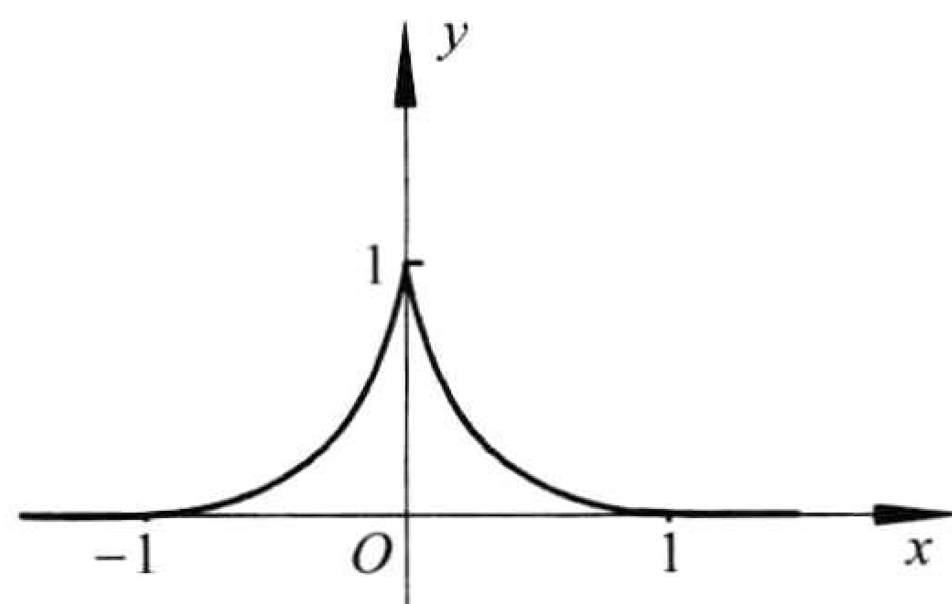


图 1.167

(2)$y=f(x)f(1-x)$. 由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x-x^2, & 0<x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

如图 1.168 所示.

(3)$y=f(x)f(2-x)$. 由函数 $f(x)$的定义易得 $y=0$.

如图 1.169 所示.

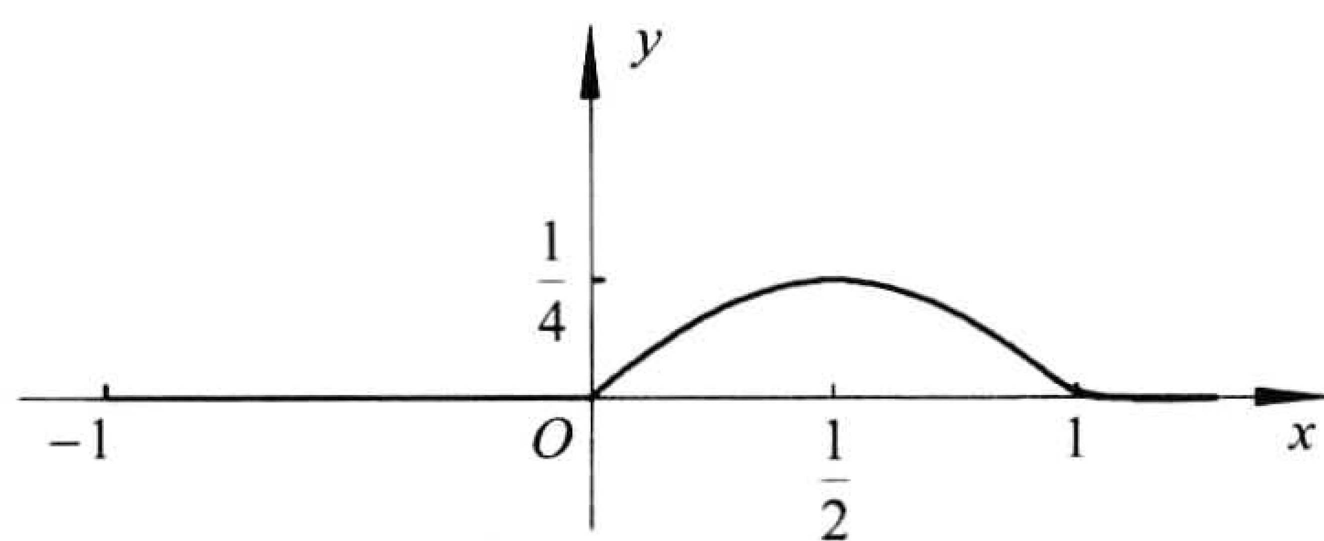


图 1.168

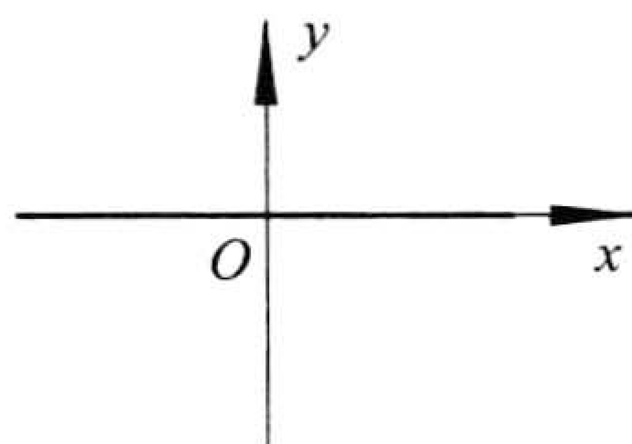


图 1.169

【350】 作函数 $y=x+\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$的图像.

解 当 $2k<x<2k+1$ ($k=0,1,2,\cdots$)时,$\sin\pi x>0$,$\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=1$,因而,$y=x+\sqrt{x}$.

而当 $2k+1<x<2k+2$ 时,$y=x-\sqrt{x}$. 图 1.170 中系函数 $y=\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$的图像(黑粗线所示). 其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=\sqrt{x}+x$ 的一段.

至于函数 $y=x+\sqrt{x}\cdot\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$的图像如图 1.171 所示.

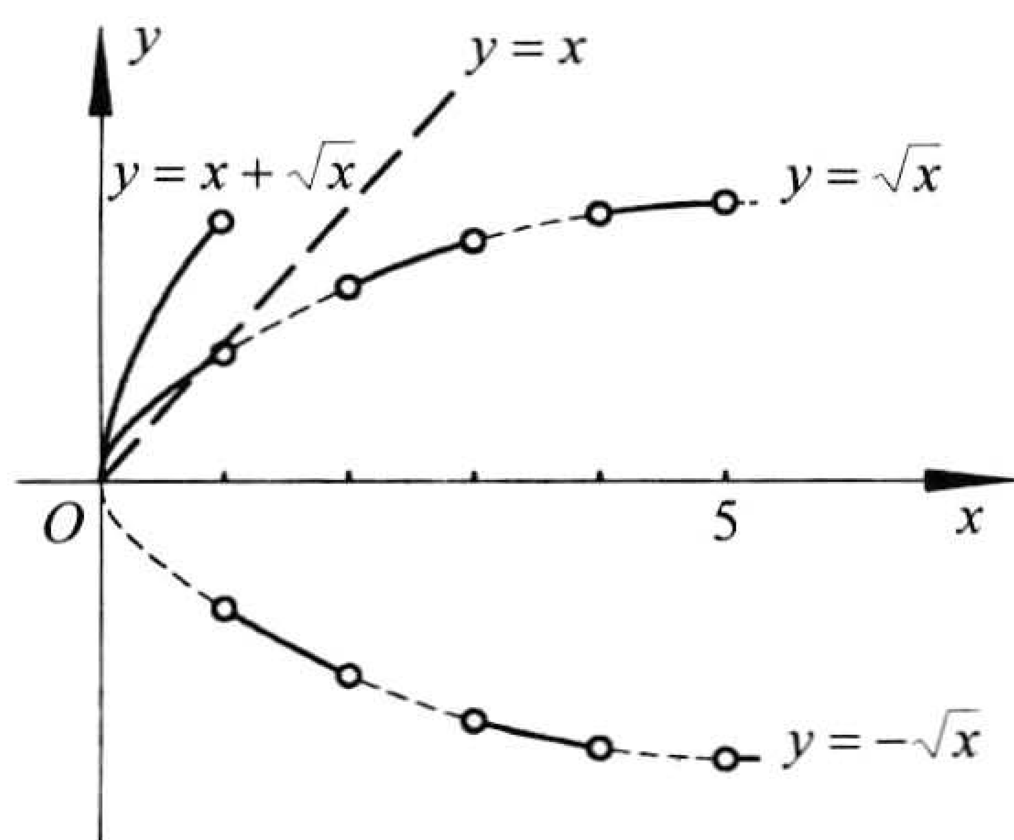


图 1.170

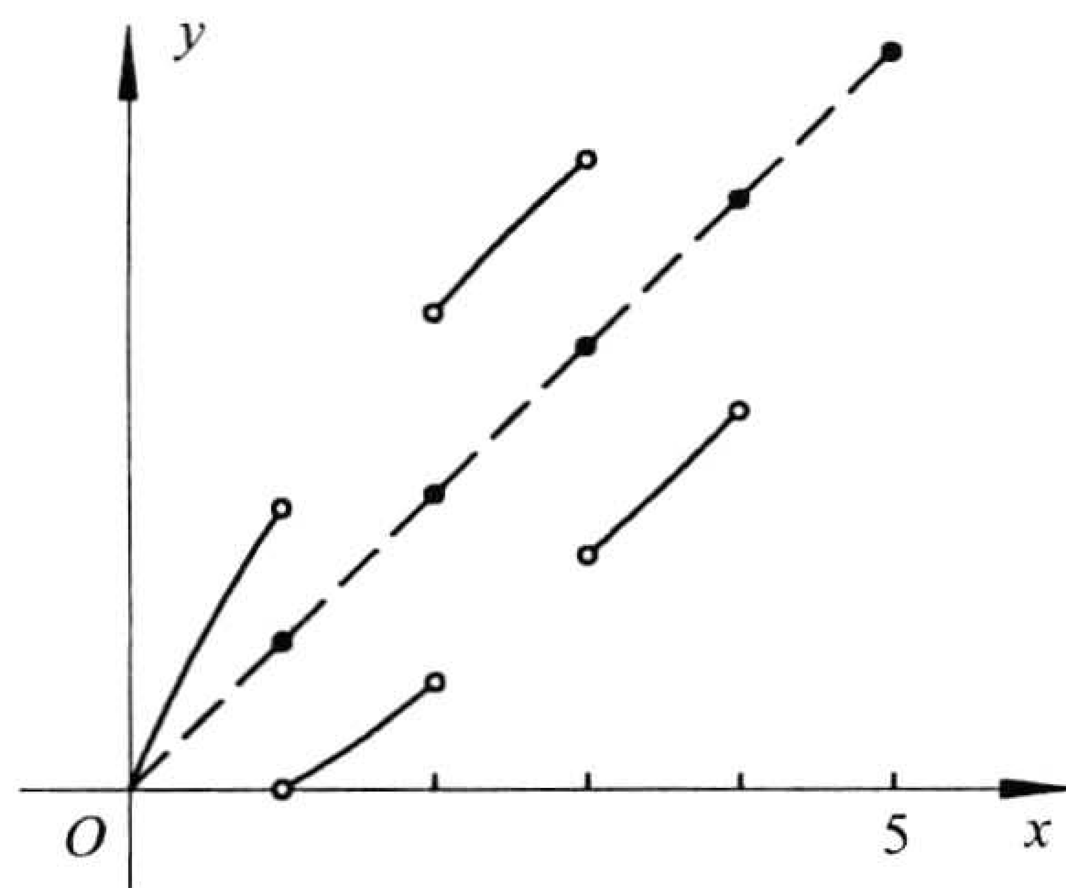


图 1.171

作函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的图像，设：

【351】 $f(x)=x^2(1-x^2)$.

解 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$.

利用图像的加法，将函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 及 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的图像相加即得. 如图 1.172 所示.

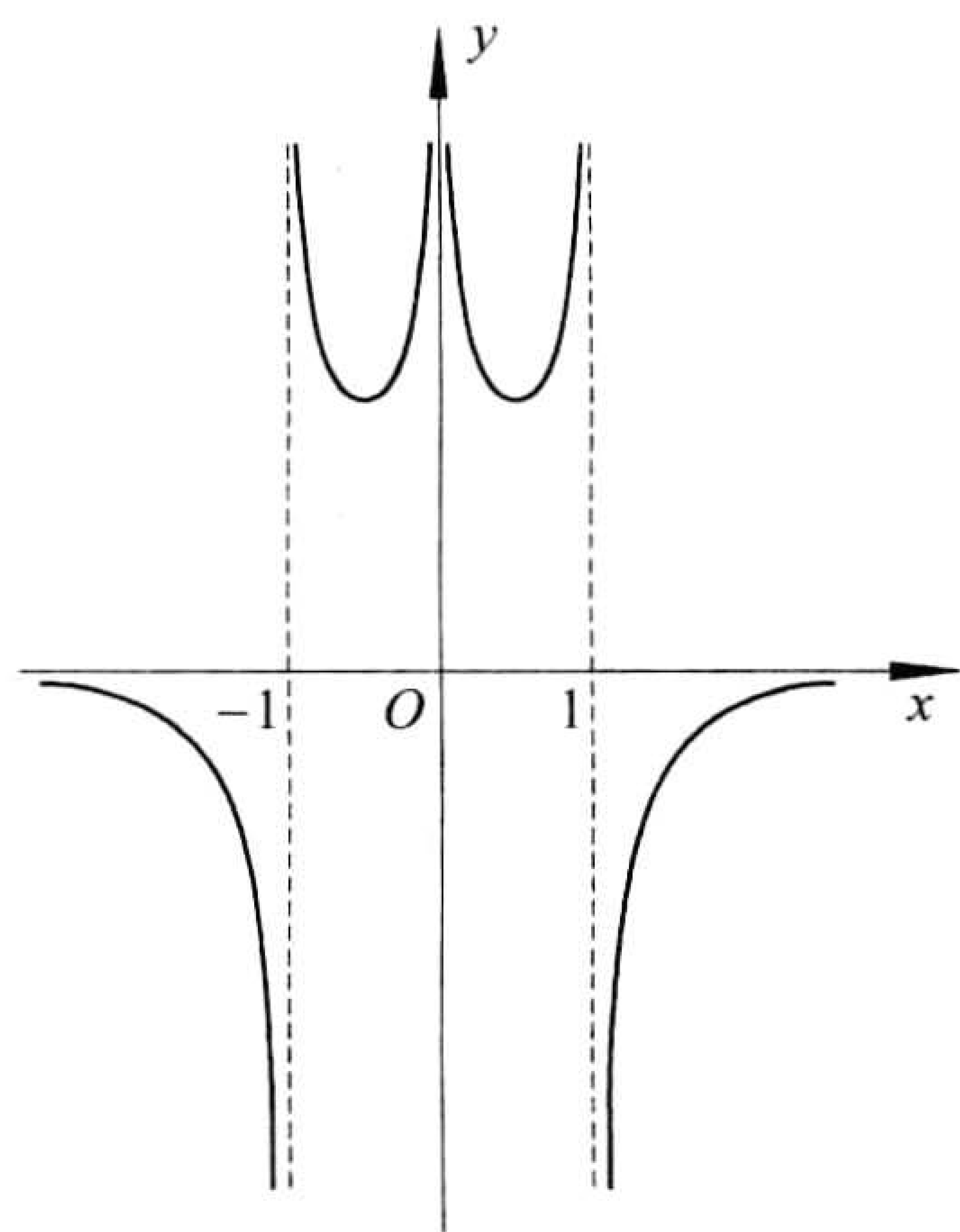


图 1.172

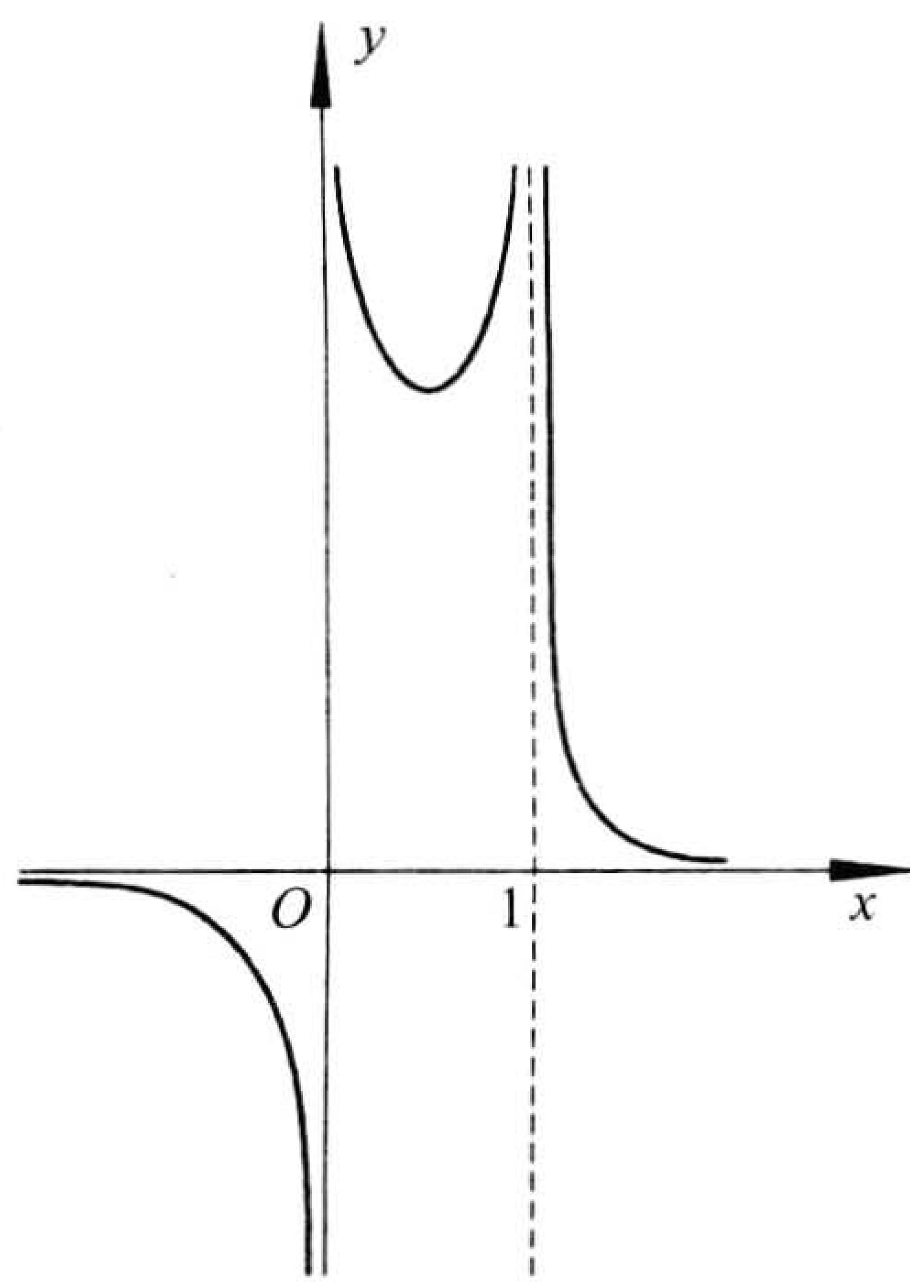


图 1.173

【352】 $f(x)=x(1-x)^2$.

解 $y=\dfrac{1}{x(1-x)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$. 当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y<0$.

利用图像的加法即得，如图 1.173 所示.

【353】 $f(x)=\sin^2 x$.

解 $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 是一周期为 π 的周期函数. 图像关于 Oy 轴对称. 如图 1.174 所示.

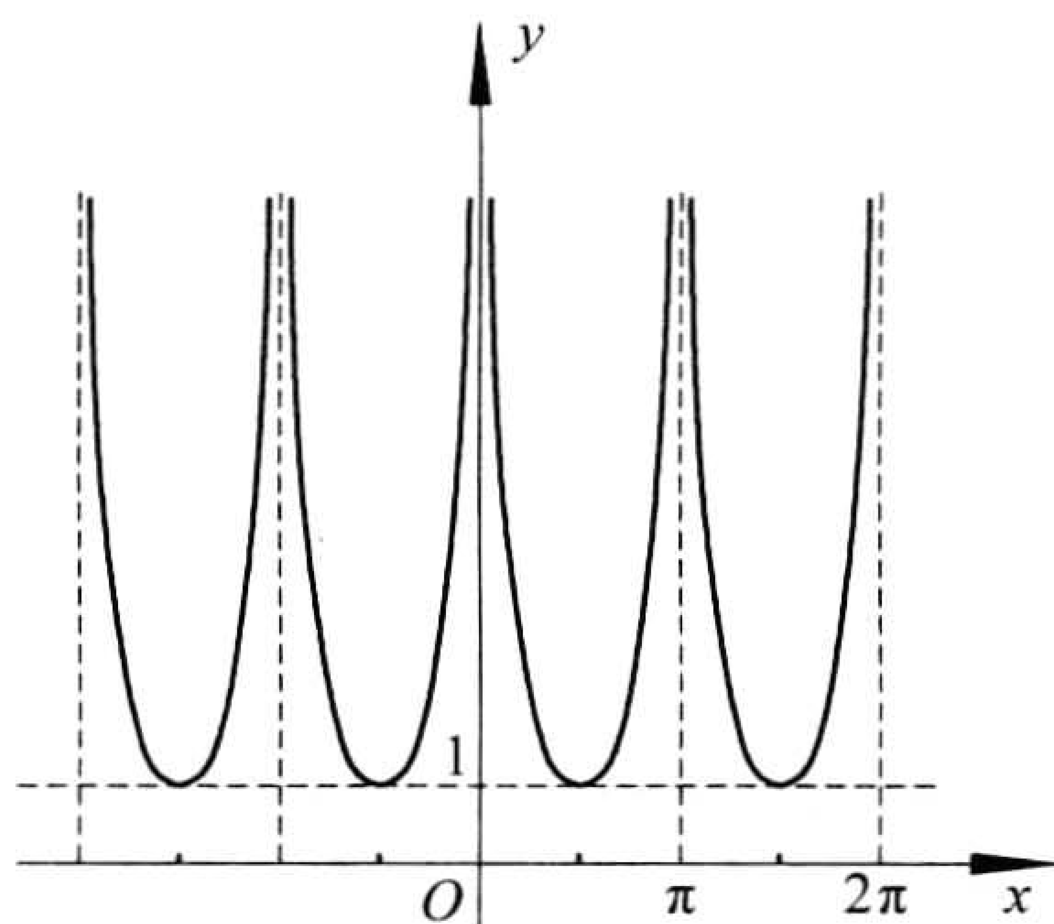


图 1.174

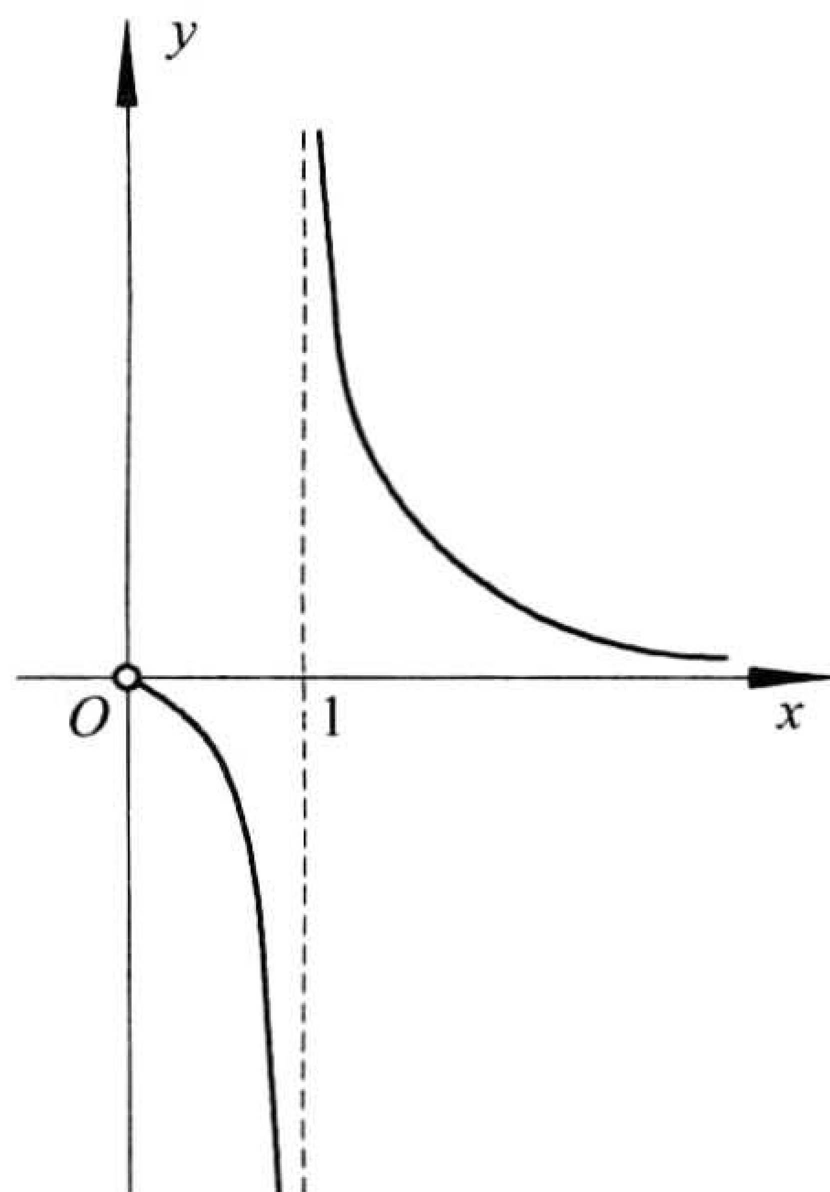


图 1.175

【354】 $f(x)=\ln x$.

解 $y=\dfrac{1}{\ln x}$. 当 $0<x<1$ 时，y 由 0 下降到 $-\infty$；当 $1<x<+\infty$ 时，y 由 $+\infty$ 下降到 0.

如图 1.175 所示.

【355】 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$.

解 $y=\mathrm{e}^{-x}\csc x$.

因为 $|\csc x|\geqslant 1$，所以，$|y|\geqslant \mathrm{e}^{-x}$. 利用图像的乘法即得. 如图 1.176 所示.

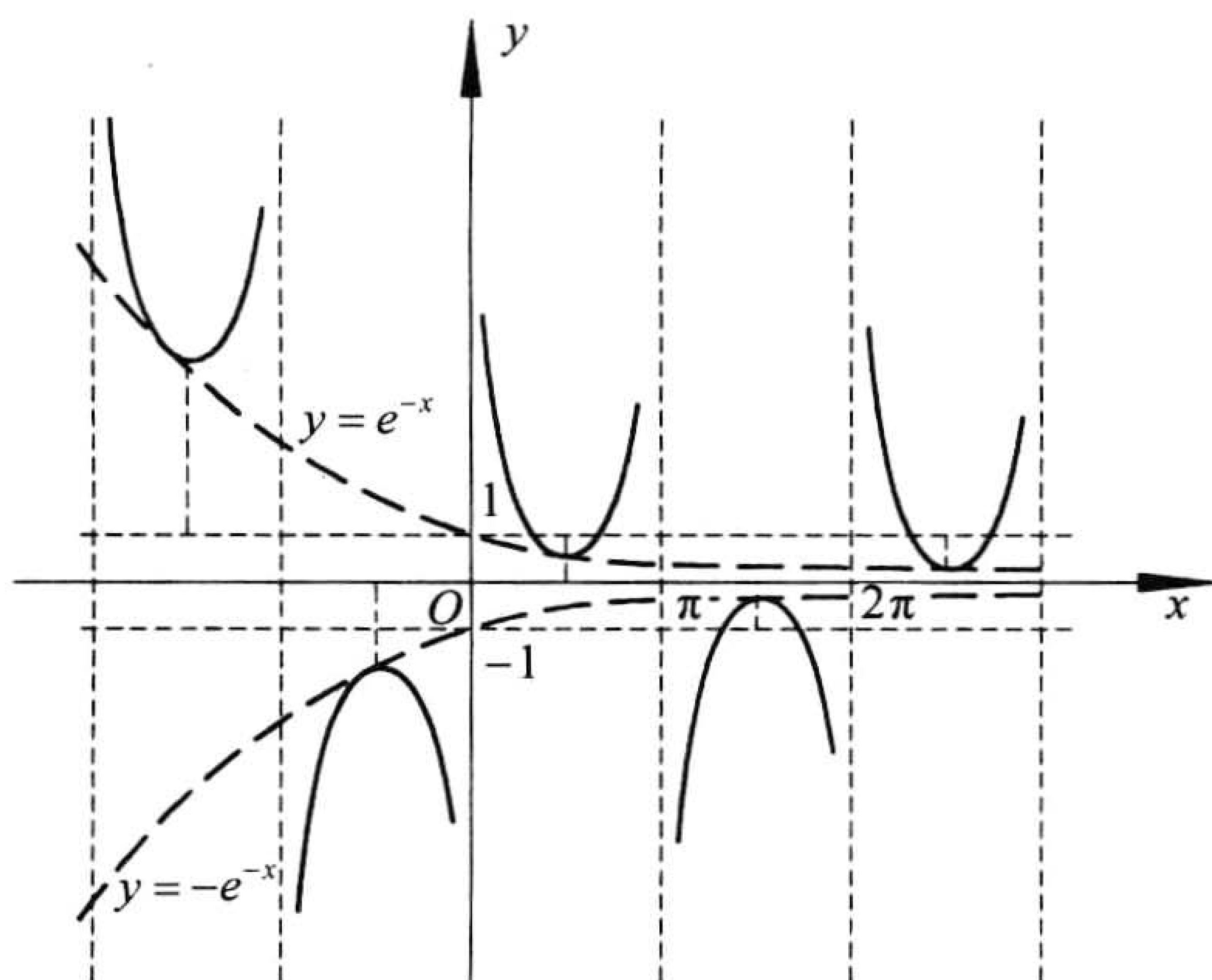


图 1.176

【356】 设 $f(u)=\begin{cases}-1, & -\infty<u<-1,\\ u, & -1\leqslant u\leqslant 1,\\ 1, & 1<u<+\infty.\end{cases}$

作复合函数 $y=f(u)$ 的图像，其中 $u=2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x-k\pi|\leqslant\dfrac{\pi}{6}$ 时，$y=2\sin x$；

当 $\dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$y=(-1)^k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

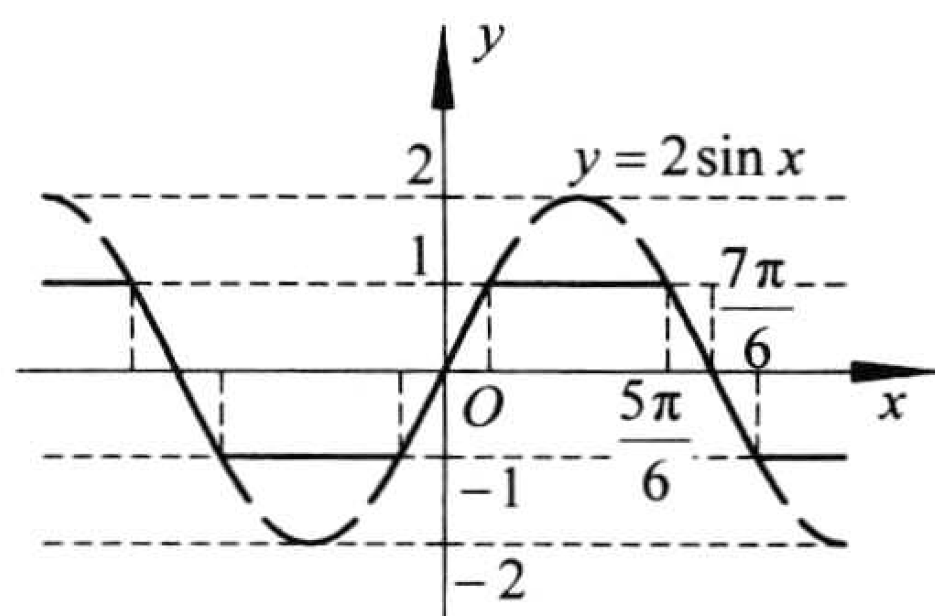


图 1.177

【357】 设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$ 和 $\psi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 作下列函数的图像：

(1) $y=\varphi[\varphi(x)]$； (2) $y=\varphi[\psi(x)]$； (3) $y=\psi[\varphi(x)]$； (4) $y=\psi[\psi(x)]$.

解 (1) $\varphi(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

(2) $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 如图 1.179 所示.

(3) $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 如图 1.179 所示.

(4) $\psi[\psi(x)]=\begin{cases}x^4, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ 如图 1.180 所示.

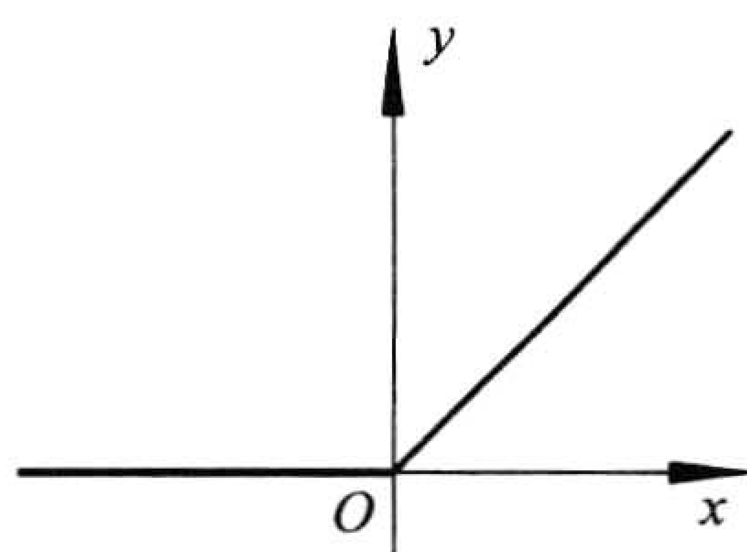


图 1.178

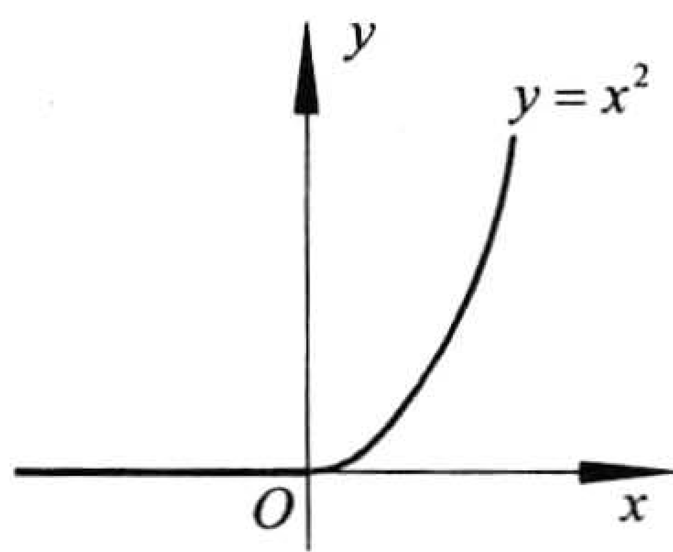


图 1.179

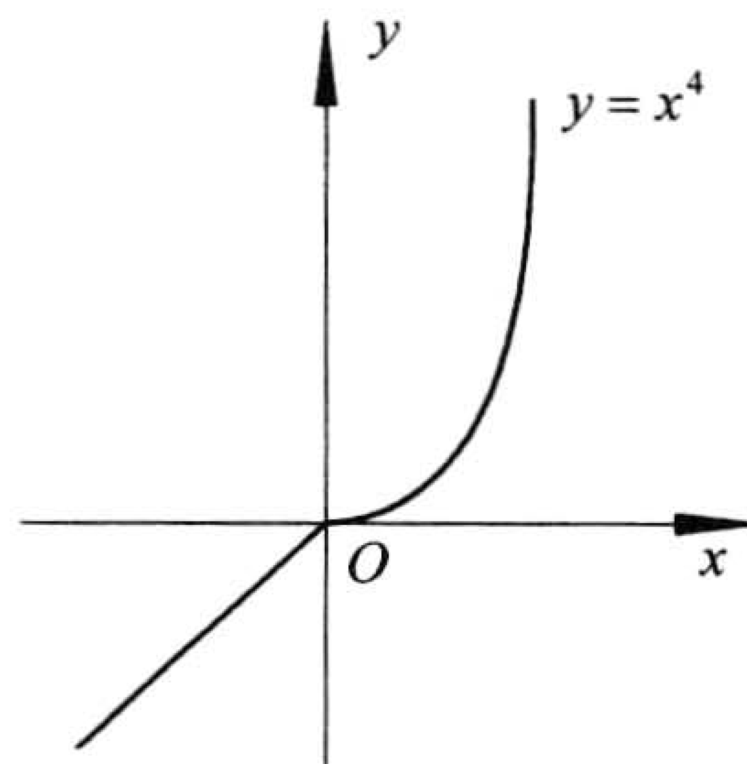


图 1.180

【358】 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases} \quad \text{及} \quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$$

作函数：

(1) $y=\varphi[\varphi(x)]$；(2) $y=\varphi[\psi(x)]$；(3) $y=\psi[\varphi(x)]$；(4) $y=\psi[\psi(x)]$

的图像.

提示 (2)图像关于 Oy 轴对称. 分别就 $0\leqslant x<1$, $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 及 $x>2$ 加以讨论.

解 (1) $\varphi[\varphi(x)]=1$. 如图 1.181 所示.

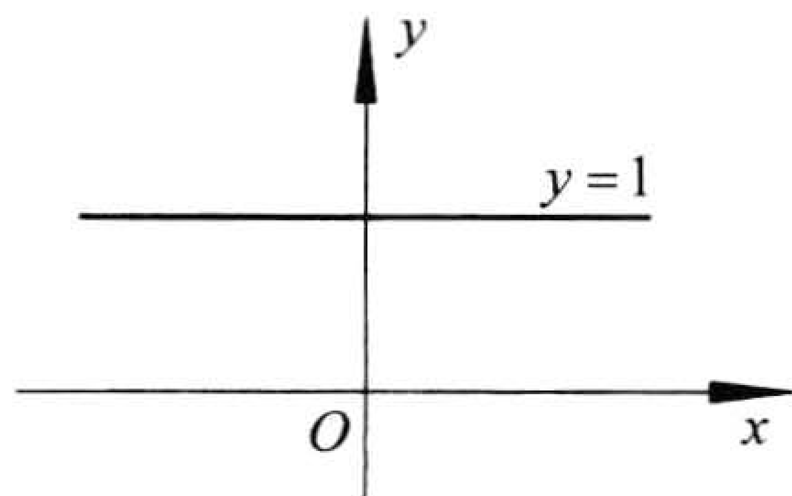


图 1.181

(2) $\varphi[\psi(x)]=\varphi[\psi(-x)]$，故图像关于 Oy 轴对称.

当 $0\leqslant x<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $1<2-x^2\leqslant 2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1$，所以，$\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $-2\leqslant 2-x^2<-1$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $x>2$ 时，$\psi(x)=2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

如图 1.182 所示.

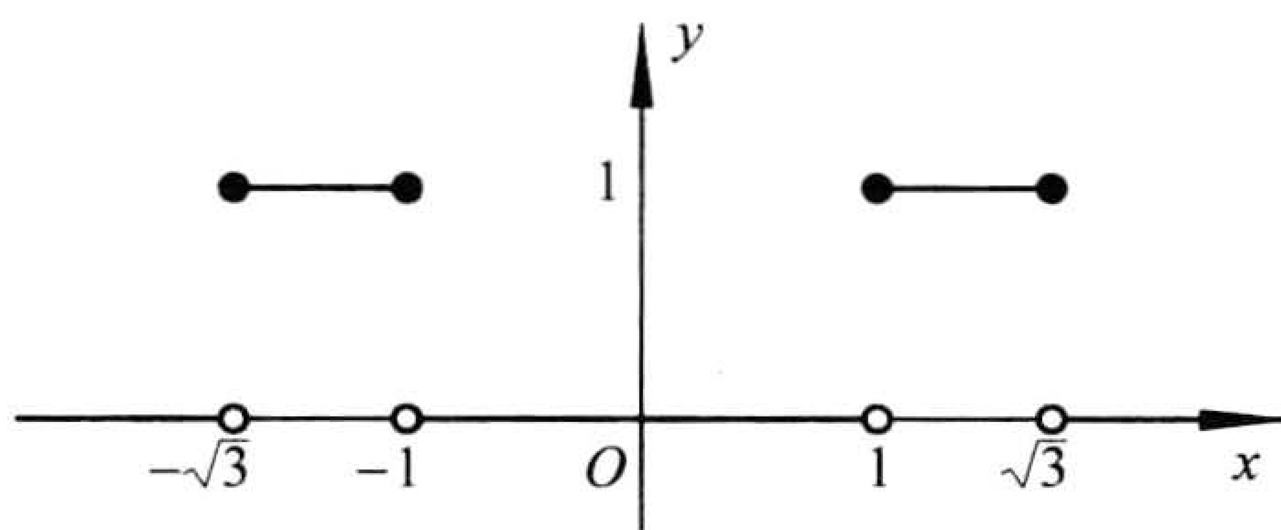


图 1.182

(3) $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 如图 1.183 所示.

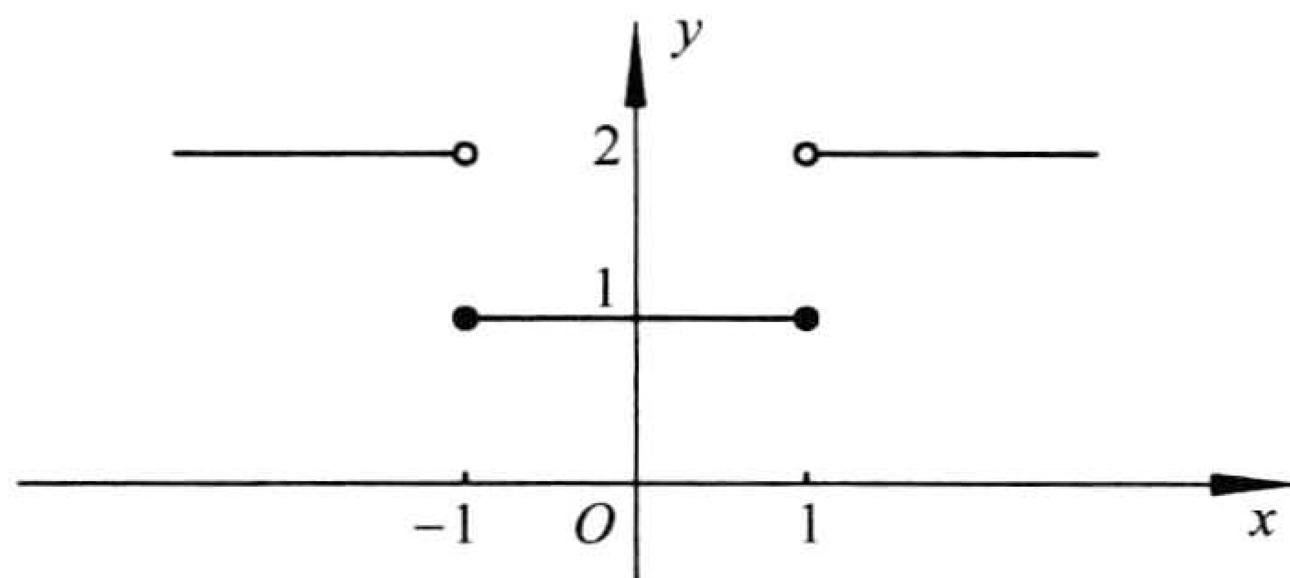


图 1.183

(4) $\psi[\psi(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\leqslant 2,\\ -2, & |x|>2.\end{cases}$ 如图 1.184 所示.

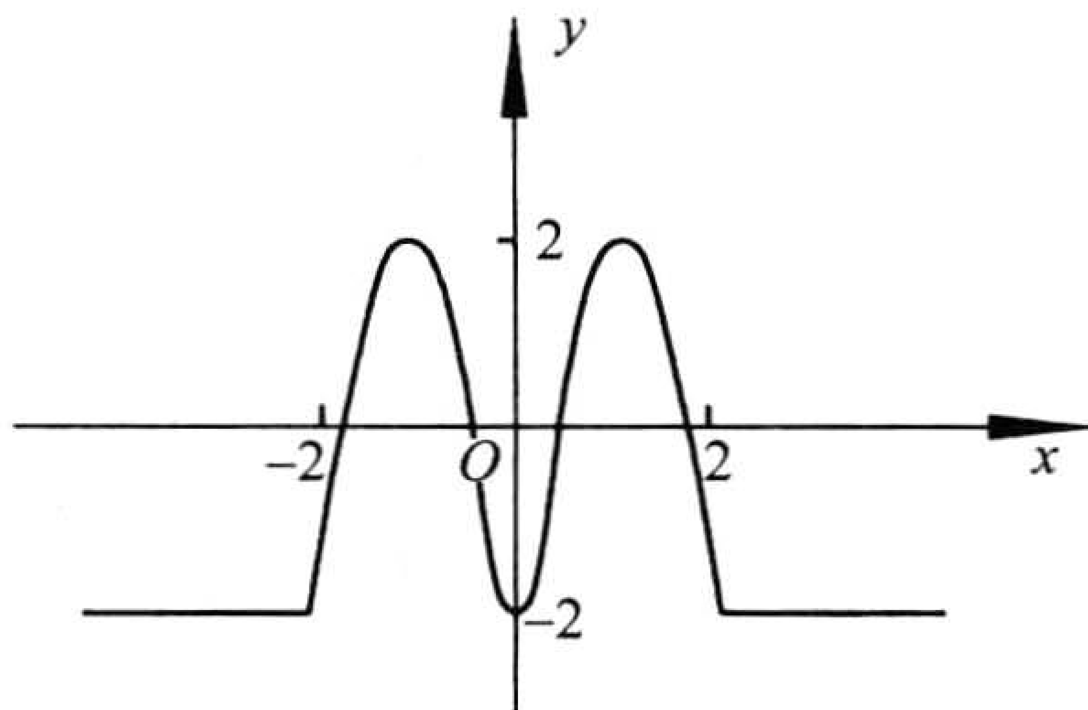


图 1.184

【359】 把定义于正数区域 $x>0$ 的函数 $f(x)$ 延拓到负数区域 $x<0$，使所得的函数为：(ⅰ)偶函数；(ⅱ)奇函数，并分别作出所得函数的图像：

(1) $f(x)=1-x$；　(2) $f(x)=2x-x^2$；　(3) $f(x)=\sqrt{x}$；

(4) $f(x)=\sin x$；　(5) $f(x)=e^x$；　(6) $f(x)=\ln x$.

解　(1)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=1+x$,则 $f(x)$在整个数轴上为偶函数.

(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-(1+x)$,则 $f(x)$在整个数轴上为奇函数.

如图 1.185 所示.

(2)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-2x-x^2$ 即行;(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=2x+x^2$ 即行.

如图 1.186 所示.

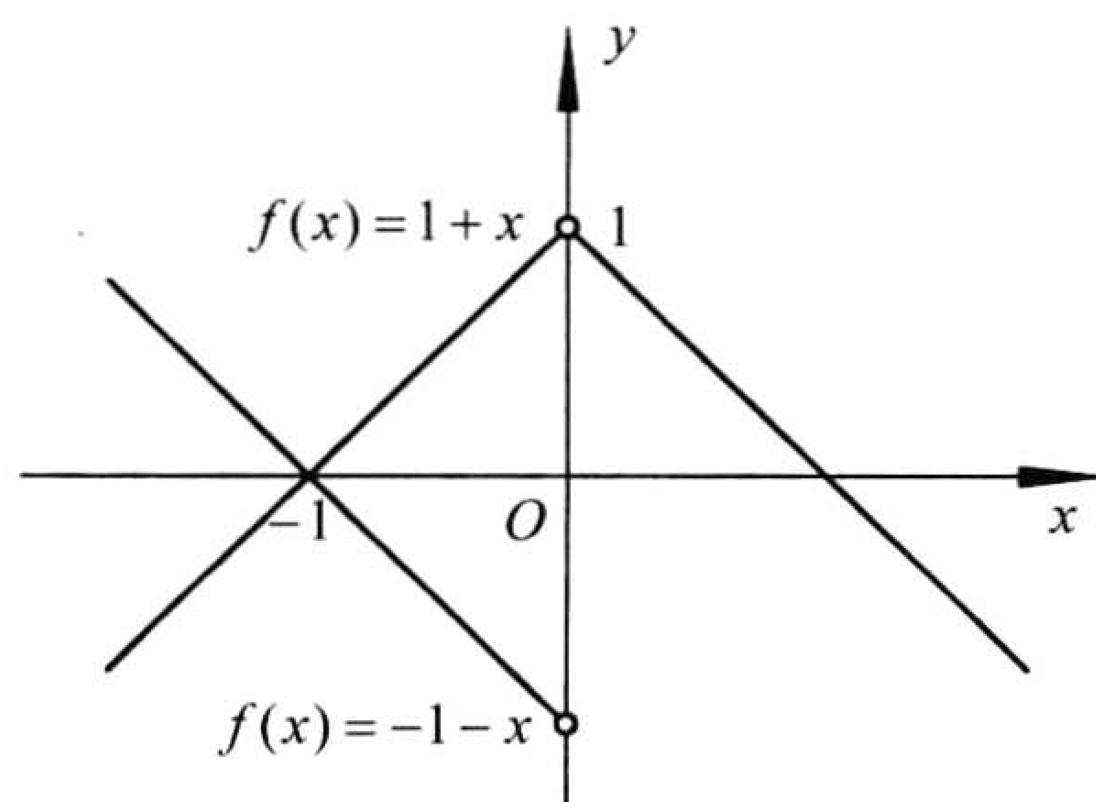


图 1.185

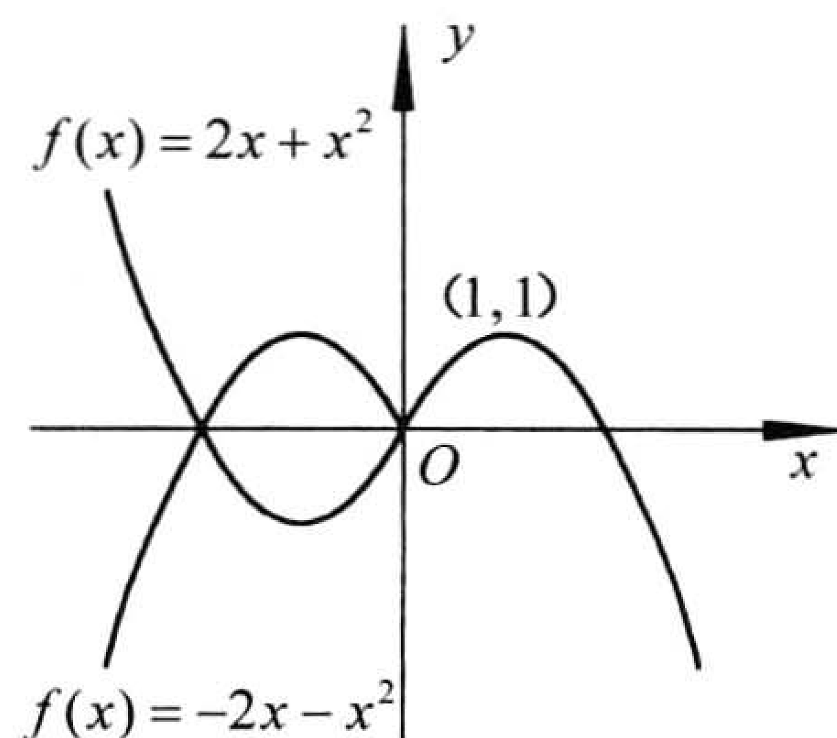


图 1.186

(3)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\sqrt{-x}$即行;(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\sqrt{-x}$即行.

如图 1.187 所示.

(4)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\sin x=|\sin x|$即行;(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

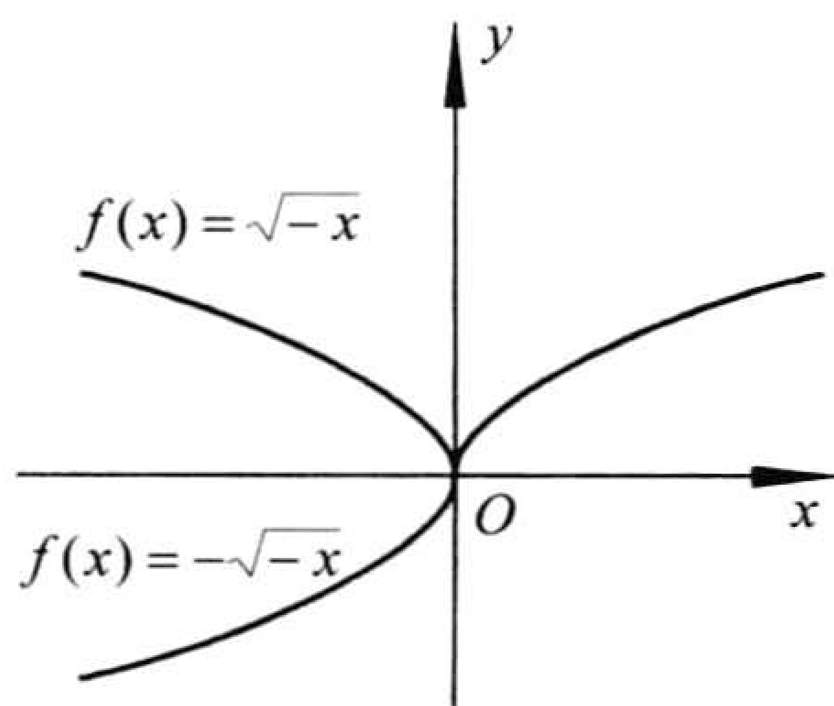


图 1.187

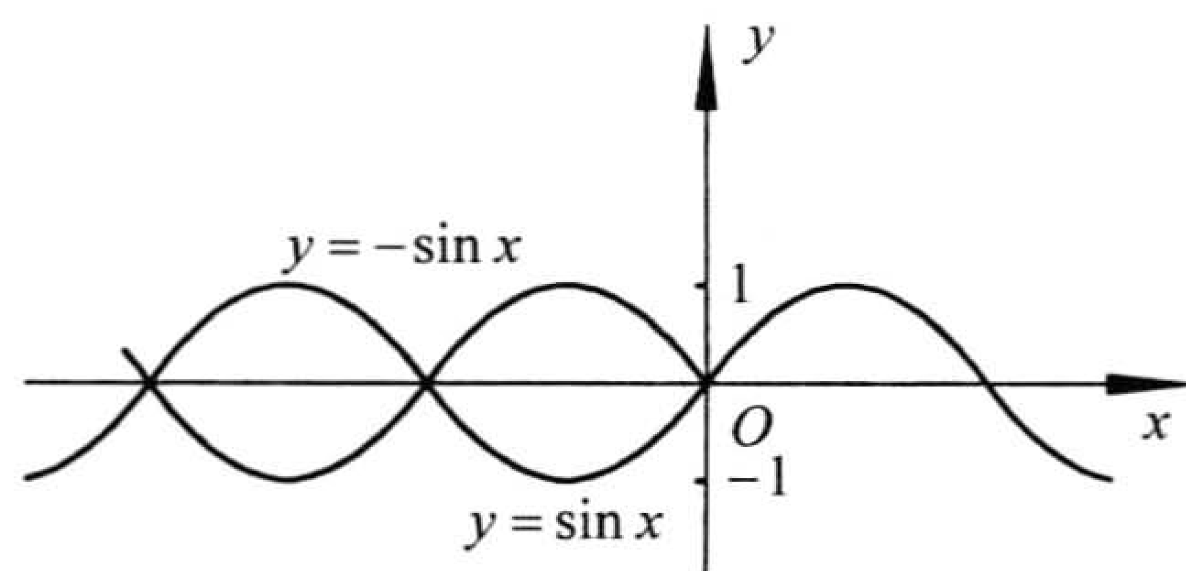


图 1.188

(5)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=e^{-x}$即行;(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-e^{-x}$即行.

如图 1.189 所示.

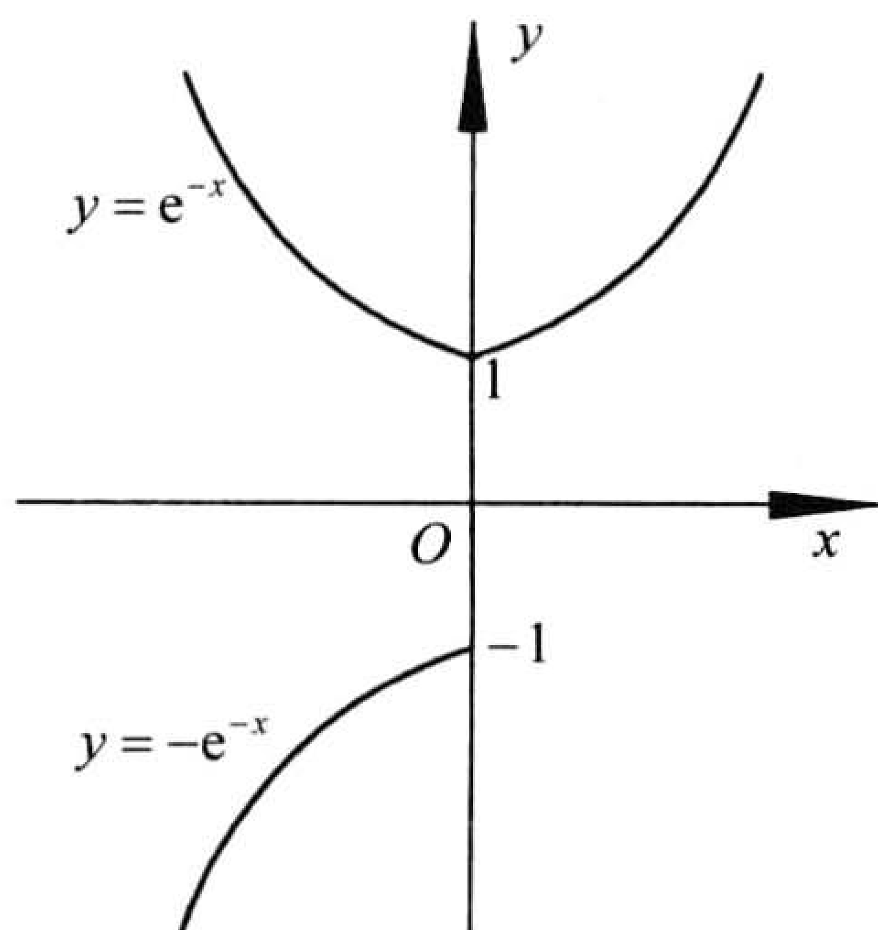


图 1.189

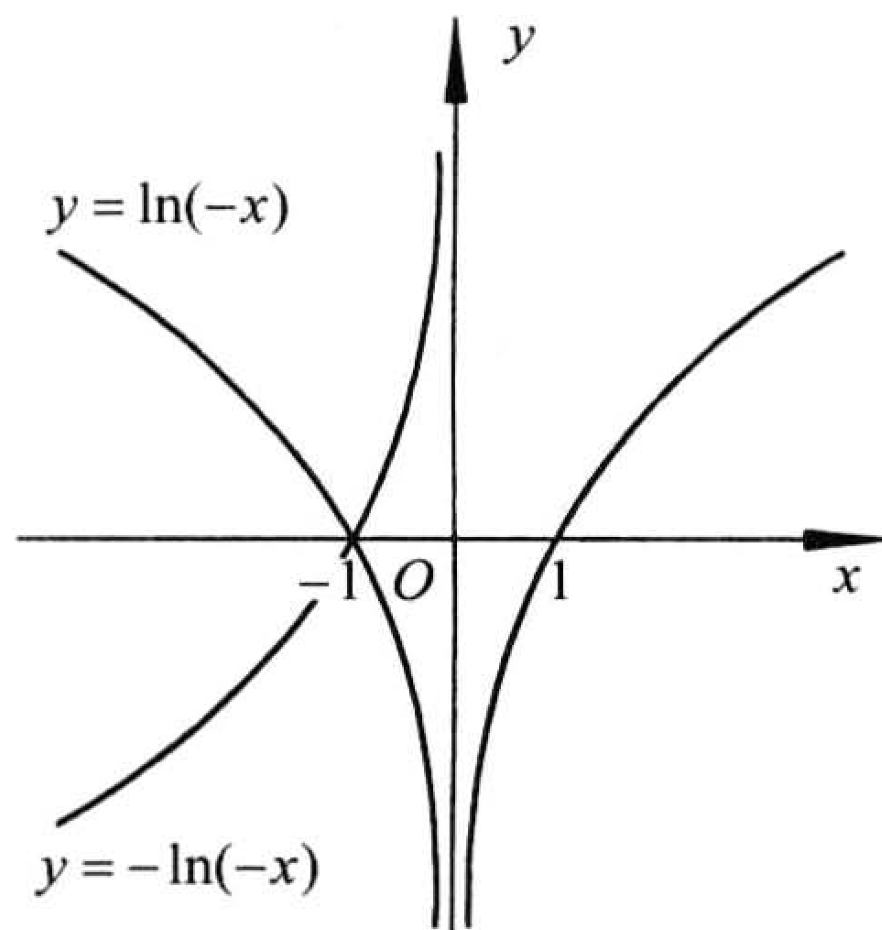


图 1.190

(6)(ⅰ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\ln(-x)$即行;(ⅱ)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\ln(-x)$即行.

如图 1.190 所示.

【360】 确定下列函数的图像在竖直方向上的对称轴：

(1) $y=ax^2+bx+c$；　　(2) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$；

(3) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}\quad(0<a<b)$；　　(4) $y=a+b\cos x$.

解 (1) $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. 它关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称.

(2) 显然图像对于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称.

(3) 显然图像对于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

(4) 对于直线 $x=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 对称.

【361】 确定下列函数的图像的对称中心：

(1) $y=ax+b$；　　(2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$；　　(3) $y=ax^3+bx^2+cx+d$；

(4) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$；　　(5) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

解 (1) 显然对称中心为 (x_0, ax_0+b)，x_0 为任意实数.

(2) 设对称中心为 (x_0, y_0)，则对充分大的 x，有 y 使

$$y+y_0=\frac{a(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d},\quad -y+y_0=\frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d},$$

由此易得 $x_0=-\frac{d}{c}$，$y_0=\frac{a}{c}$.

(3) 用类似于(2)的方法，可得对称中心为 (x_0, y_0)，其中

$$x_0=-\frac{b}{3a},\quad y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d.$$

(4) 类似于(2)，可得对称中心为(2,0).

(5) 类似于(2)，可得对称中心为(2,1).

【362】 作周期函数的图像：

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\operatorname{sgn}\cos x$；

(3) $y=f(x)$，其中 $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$，假设 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 和 $f(x+2l)\equiv f(x)$；

(4) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$；　　(5) $y=(x)$，此处 (x) 为从数 x 至与它最近的整数间的距离.

解 (1) 如图 1.191 所示，周期 π.

(2) 如图 1.192 所示. 周期 2π.

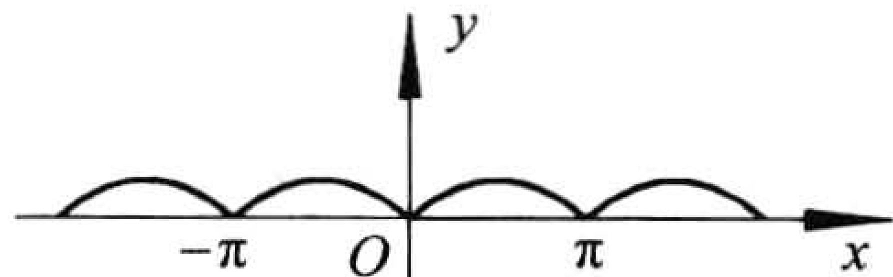


图 1.191

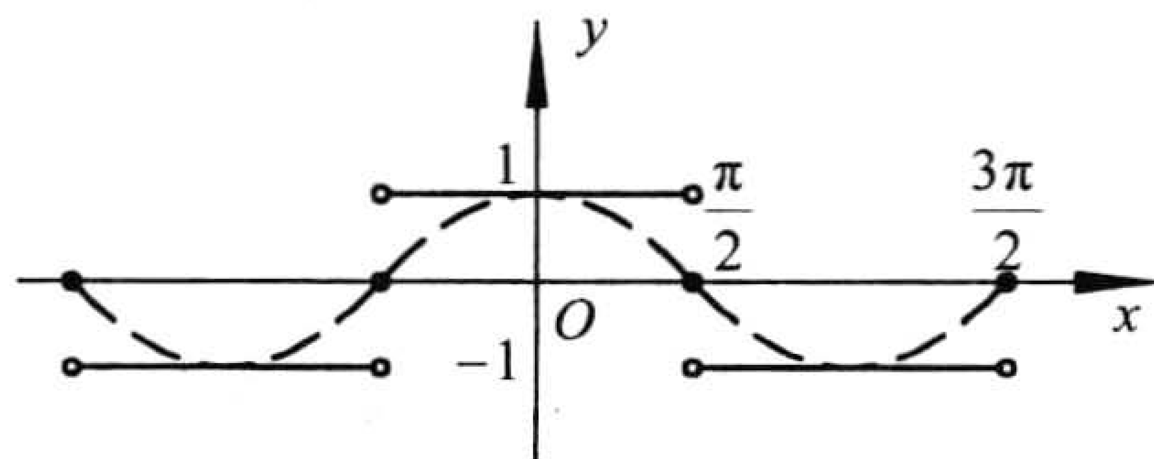


图 1.192

(3) 当 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 时，由 $f(x)$ 的定义易得

$$f(x+2kl)=f(x)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数，它在 $[0,2l]$ 内的图像为一抛物线，顶点为 (l,A). 如图 1.193 所示.

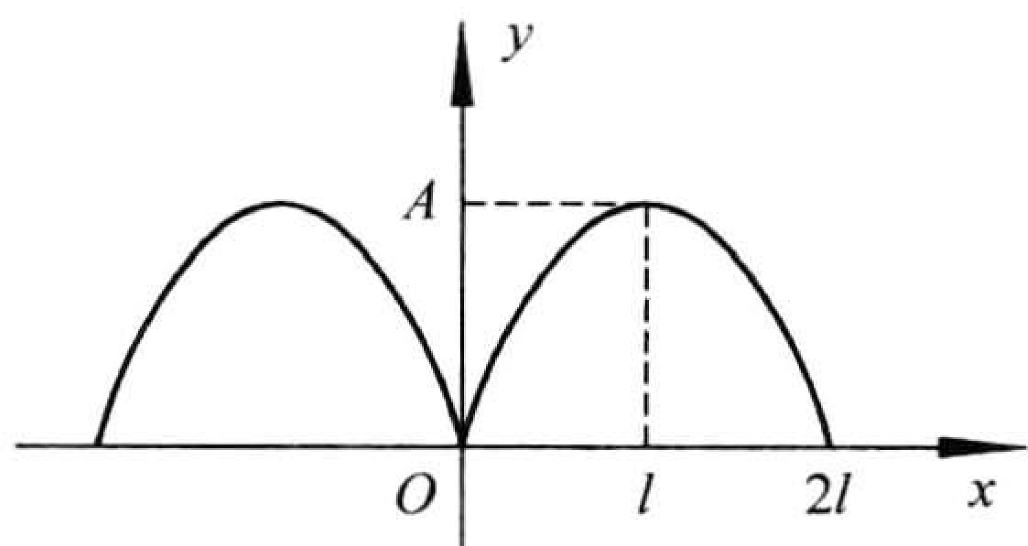


图 1.193

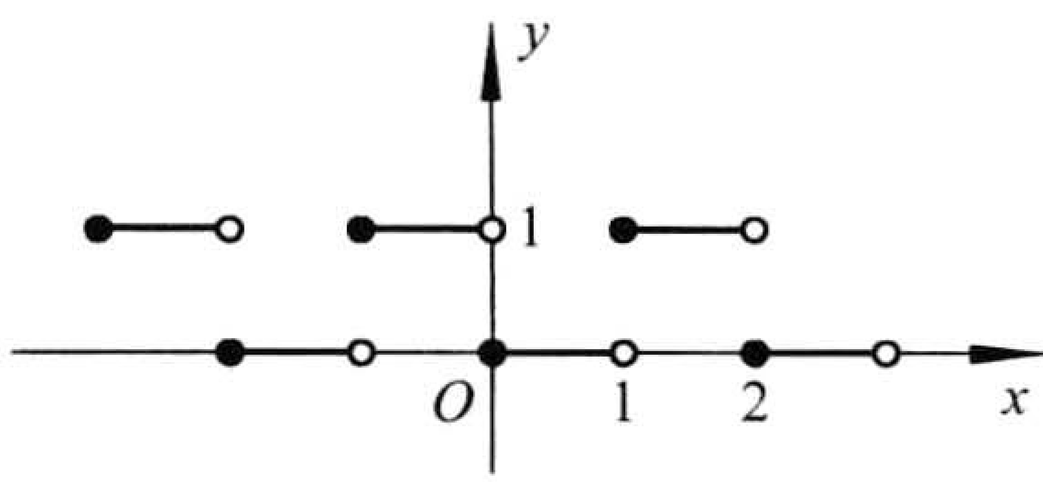


图 1.194

(4)周期为 2*),如图 1.194 所示.

*) 原本该题为 $y=|x|-2\left[\frac{x}{2}\right]$,当 $x\geqslant 0$ 时,它是以 2 为周期函数.

(5)周期为 1,如图 1.195 所示.

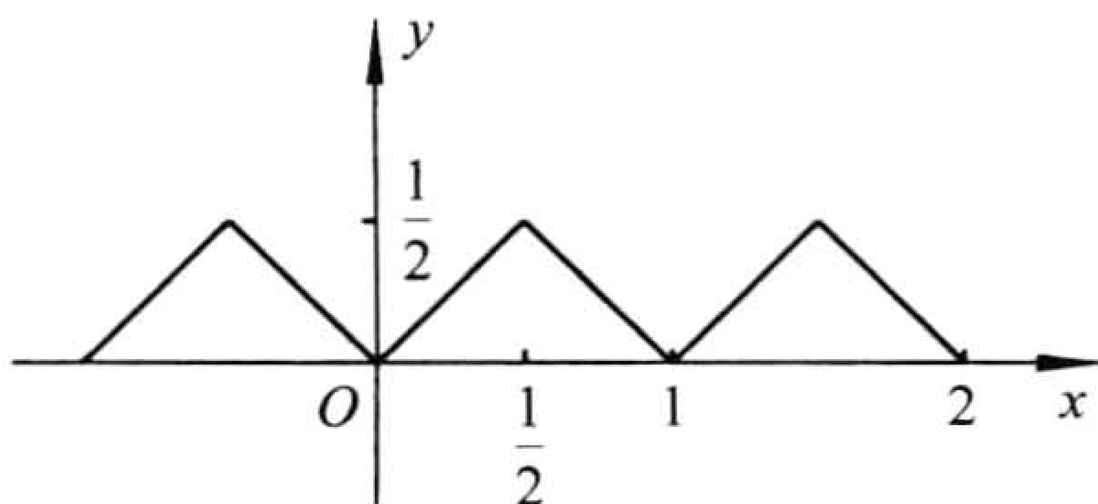


图 1.195

【363】 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于竖直方向上的两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证明思路 设 $x\in R$,则有 $f(a+x)=f(a-x)$,$f(b+x)=f(b-x)$,在前一等式中将 x 换成 $x+(b-a)$,可得 $f(b-x)=f(2a-b-x)$.再依次将 $b-x$ 换成 x 及 x 换成 $2(b-a)+x$,即知周期 $T=2(b-a)$.

证 设 x 为任一实数,则按假设有

$$f(a+x)=f(a-x) \quad \text{及} \quad f(b+x)=f(b-x).$$

在 $f(a+x)=f(a-x)$ 中将 x 换成 $x+(b-a)$,则得

$$f(x+b)=f(a-x-b+a)=f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b)=f(b-x)$,所以,

$$f(b-x)=f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x,则得 $f(x)=f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$,即得

$$f(x+2(b-a))=f(x),$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 周期的周期函数.如图 1.196 所示.

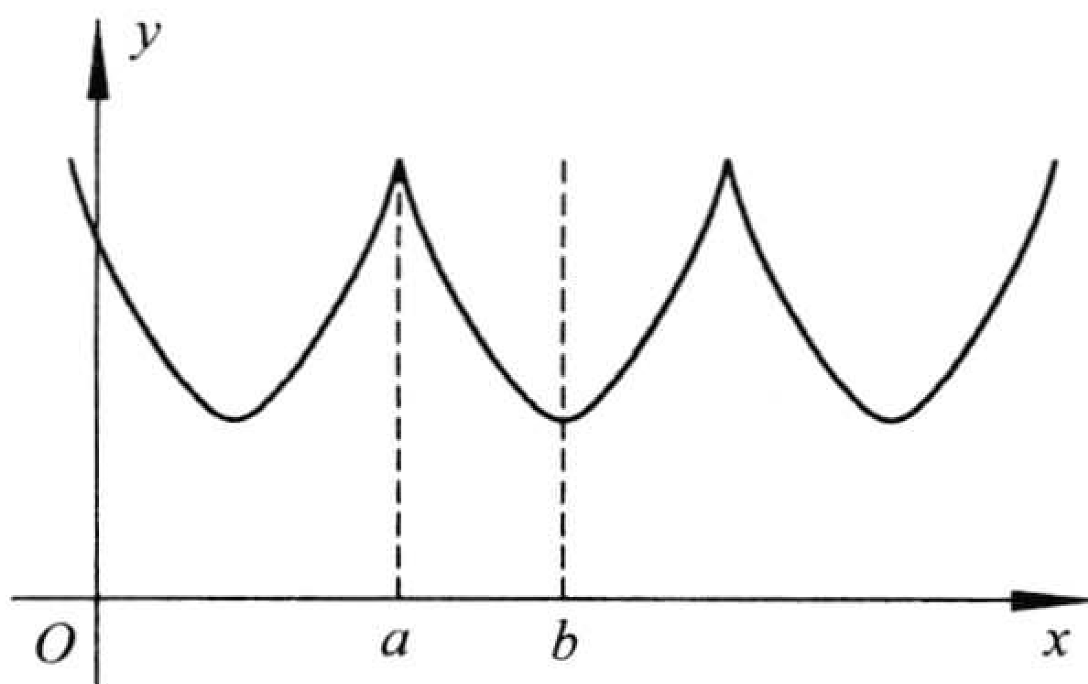


图 1.196

【364】 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于两点 $A(a,y_0)$ 和 $B(b,y_1)(b>a)$ 对称,则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和.特别是,若 $y_0=y_1$,则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证明思路 设 $x\in R$,则有 $f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x)$,$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x)$.在前一等式中,将 x 换成 $x+(b-a)$,可得 $f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x)$.再依次将 $b-x$ 换成 x 及 x 换成 $2(b-a)+x$,又可得 $f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x]$.

令 $f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x)$，可证 $\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]$.

证 设 x 是任一实数，按假设有：

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$

$$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x). \tag{2}$$

在(1)中，将 x 换成 $x+(b-a)$ 则得

$$f(b+x)-y_0=y_0-f(2a-b-x). \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1-f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x). \tag{4}$$

在(4)中，将 $b-x$ 换成 x，则得

$$f(x)=2(y_1-y_0)+f(2a-2b+x). \tag{5}$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$，则得

$$f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x]. \tag{6}$$

令

$$f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x). \tag{7}$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上，由(7)式我们有

$$f[x+2(b-a)]=-\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)]+\varphi[x+2(b-a)],$$

$$f(x)-f[x+2(b-a)]=2(y_0-y_1)+\varphi(x)-\varphi[x+2(b-a)].$$

因此，由(6)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可知，$f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$，则由(7)式和(8)式可知，$f(x)$ 是一个周期函数.

【365】 证明：若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于点 $A(a,y_0)$ 和直线 $x=b$ $(b\neq a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证明思路 设 $x\in R$，则有 $f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$. 在前一等式中，依次将 x 换成 $x+(b-a)$，$b-x$ 换成 x 及 x 换成 $2b-2a+x$，可得 $f(2b-2a+x)=f(2a-2b+x)$. 若再将 x 换成 $2b-2a+x$，即知 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

证 设 x 为任一实数，按假设则有

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \quad f(b+x)=f(b-x). \tag{1}$$

在(1)的前一等式中，将 x 换成 $x+(b-a)$，则得

$$f(b+x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x). \tag{2}$$

在(2)中，将 $b-x$ 换成 x，则得

$$f(x)=2y_0-f(2a-2b+x). \tag{3}$$

在(3)中，将 x 换成 $2b-2a+x$，则得

$$f(2b-2a+x)=2y_0-f(x). \tag{4}$$

由(3)、(4)得 $f(2a-2b+x)=f(2b-2a+x)$，再将 x 换成 $2b-2a+x$，即得

$$f(x)=f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

【366】 设 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x)$，作函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，图像为一抛物线，顶点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，只要将纵标放大 2 倍，余类推. 如图 1.197 所示.

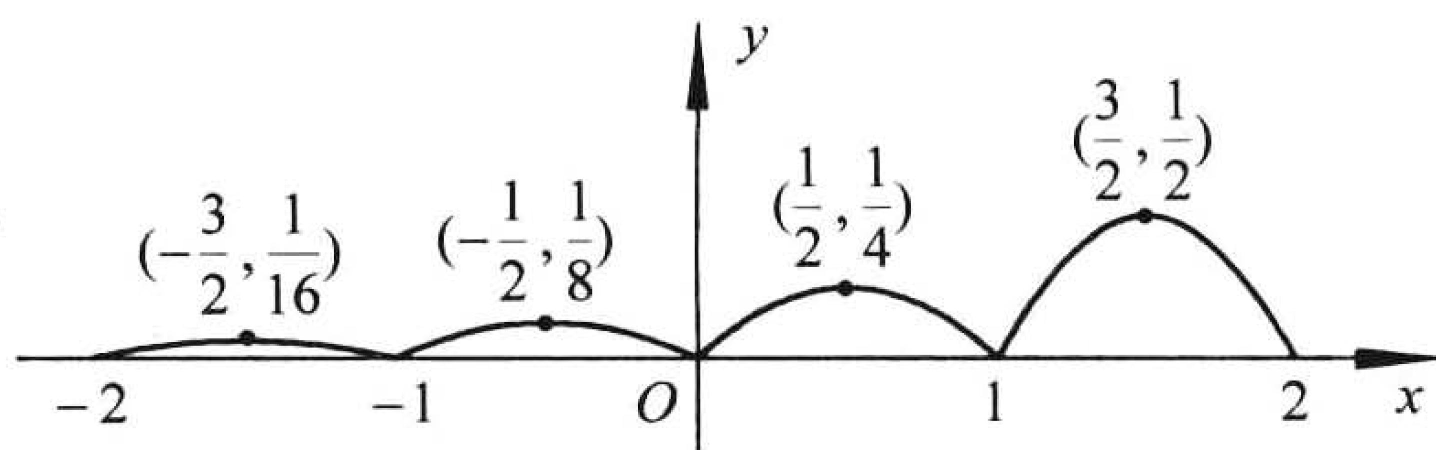


图 1.197

当 $x=\frac{2n+1}{2}$ 时，$y=\frac{2^n}{4}=2^{n-2}$，因而当 $n\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $n\to-\infty$ 时，$y\to 0$.

【367】 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，且当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=0$. 作函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像.

解 由题设知：当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=0$；

当 $\pi<x\leqslant 2\pi$ 时，设 $0<x_1\leqslant\pi$，则有 $f(x)=f(x_1+\pi)=f(x_1)+\sin x_1=\sin x_1$；

当 $2\pi<x\leqslant 3\pi$ 时，设 $\pi<x_2\leqslant 2\pi$，则有 $f(x)=f(x_2+\pi)=f(x_2)+\sin x_2=0$；

余类推. 周期为 2π. 如图 1.198 所示.

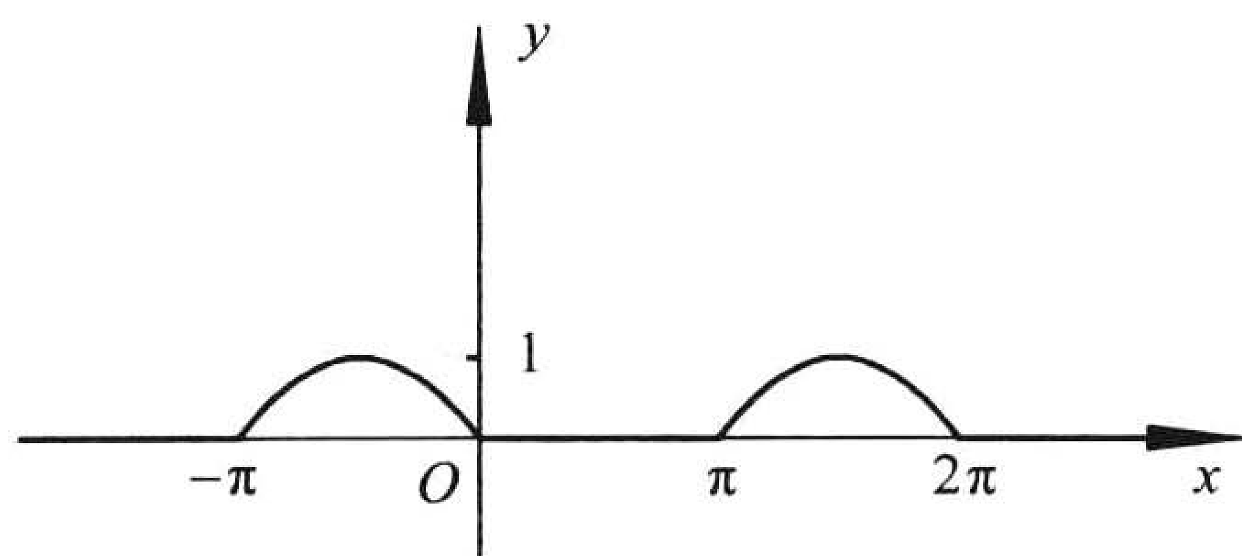


图 1.198

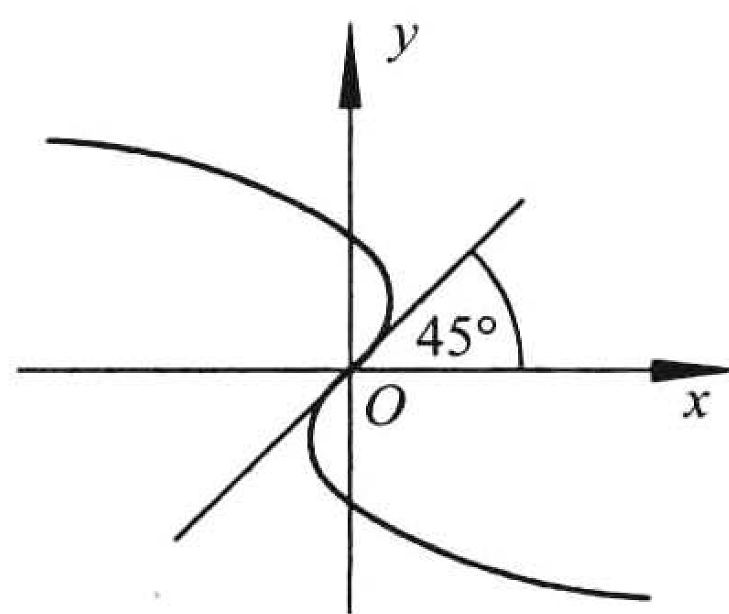


图 1.199

【368】 作函数 $y=y(x)$ 的图像，设：

(1) $x=y-y^3$； (2) $x=\frac{1-y}{1+y^2}$； (3) $x=y-\ln y$； (4) $x^2=\sin y$.

解 (1)如图 1.199 所示. (2)如图 1.200 所示. (3)如图 1.201 所示. (4)如图 1.202 所示.

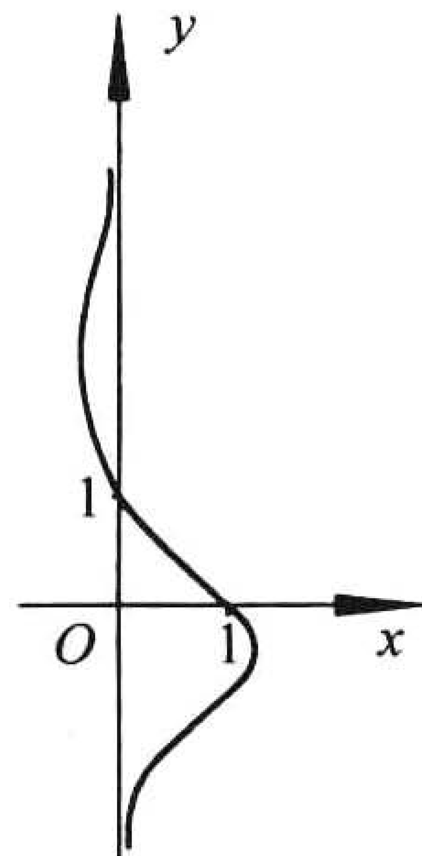


图 1.200

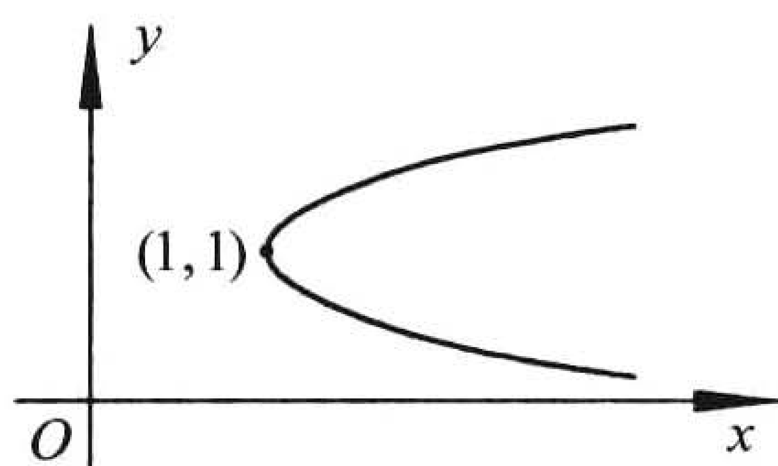


图 1.201

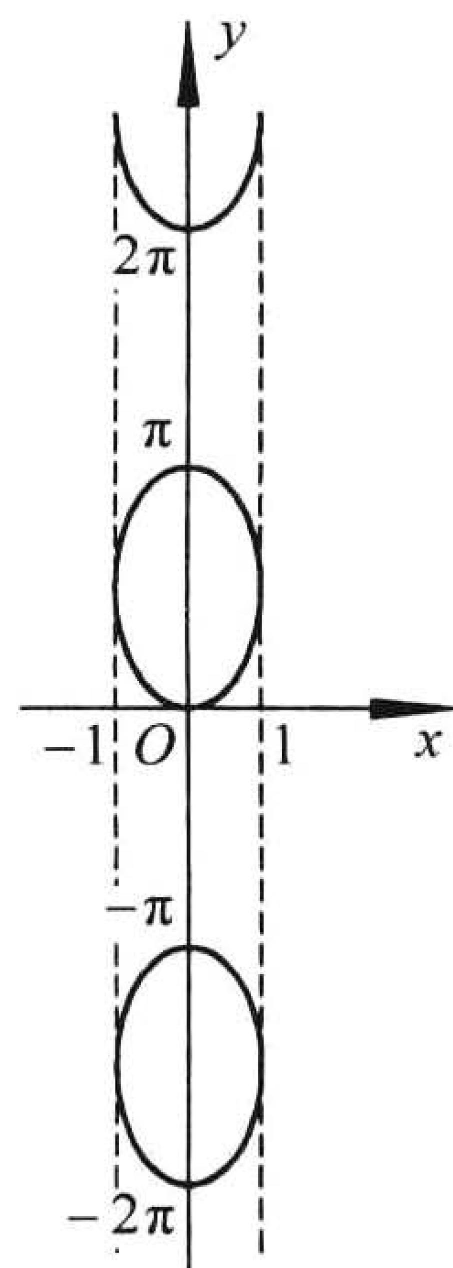


图 1.202

【369】 作出下列用参数形式表示的函数的图像，设：

(1)$x=1-t$，$y=1-t^2$；　　(2)$x=t+\frac{1}{t}$，$y=t+\frac{1}{t^2}$；

(3)$x=10\cos t$，$y=\sin t$（椭圆）；　　(4)$x=\operatorname{ch} t$，$y=\operatorname{sh} t$（双曲线）；

(5)$x=5\cos^2 t$，$y=3\sin^2 t$；

(6)$x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$（摆线）；

(7)$x=\sqrt[t+1]{t}$，$y=\sqrt[t]{t+1}$ $(t>0)$.

解 (1)$y-1=-(x-1)^2$. 如图 1.203 所示.

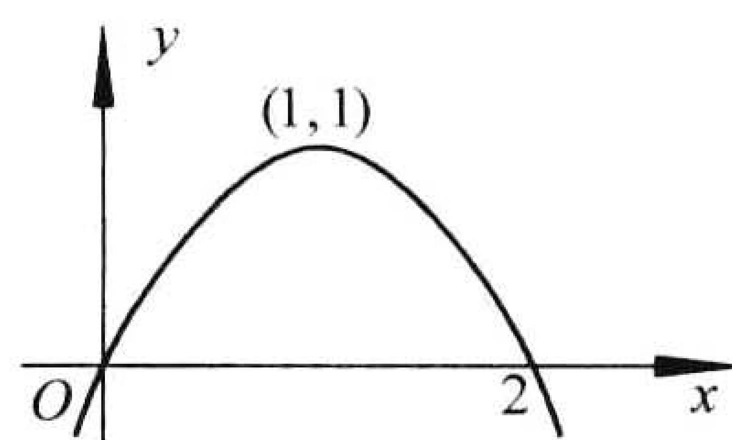


图 1.203

(2)如图 1.204 所示.

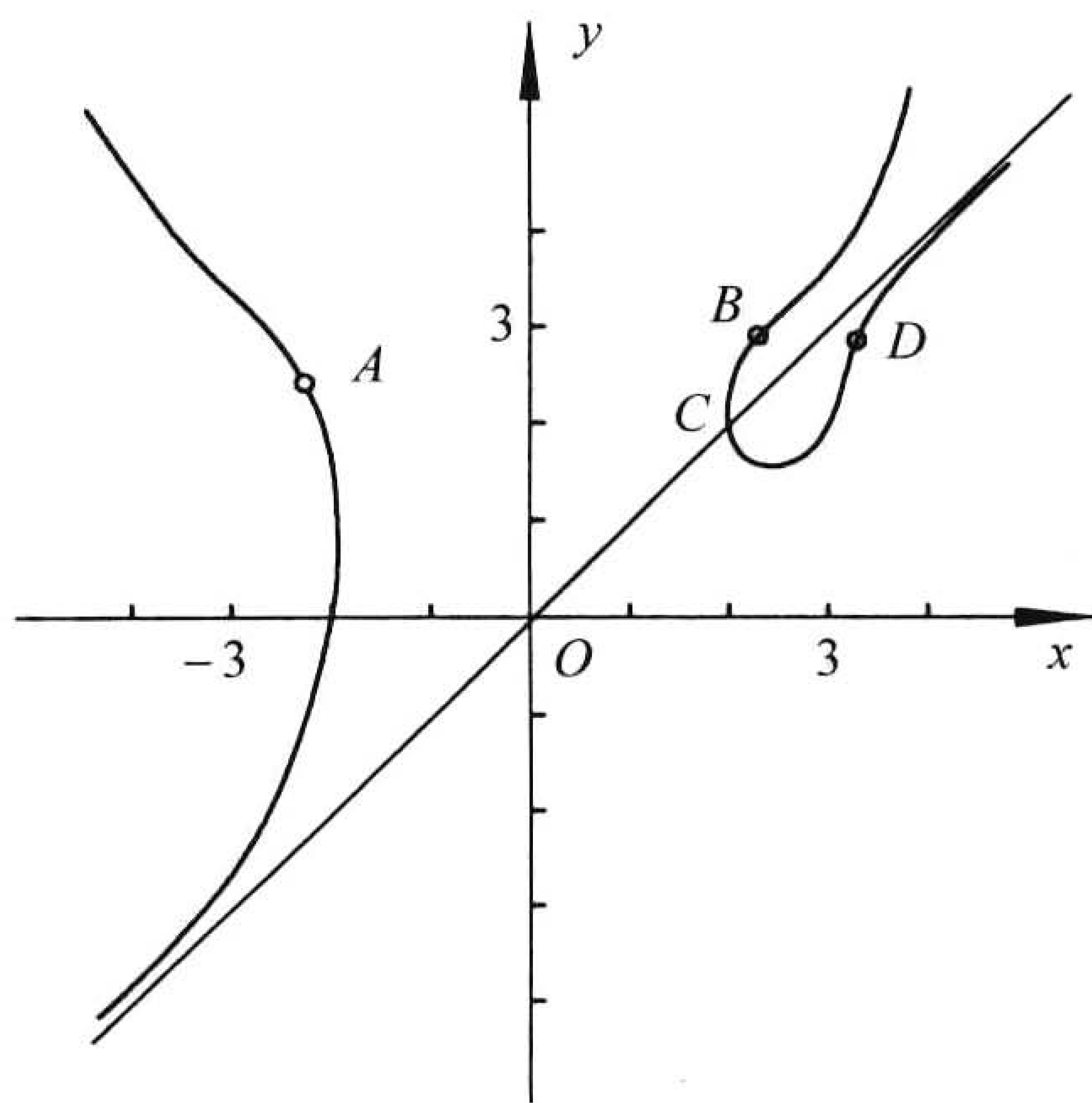


图 1.204

(3)$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$. 如图 1.205 所示.

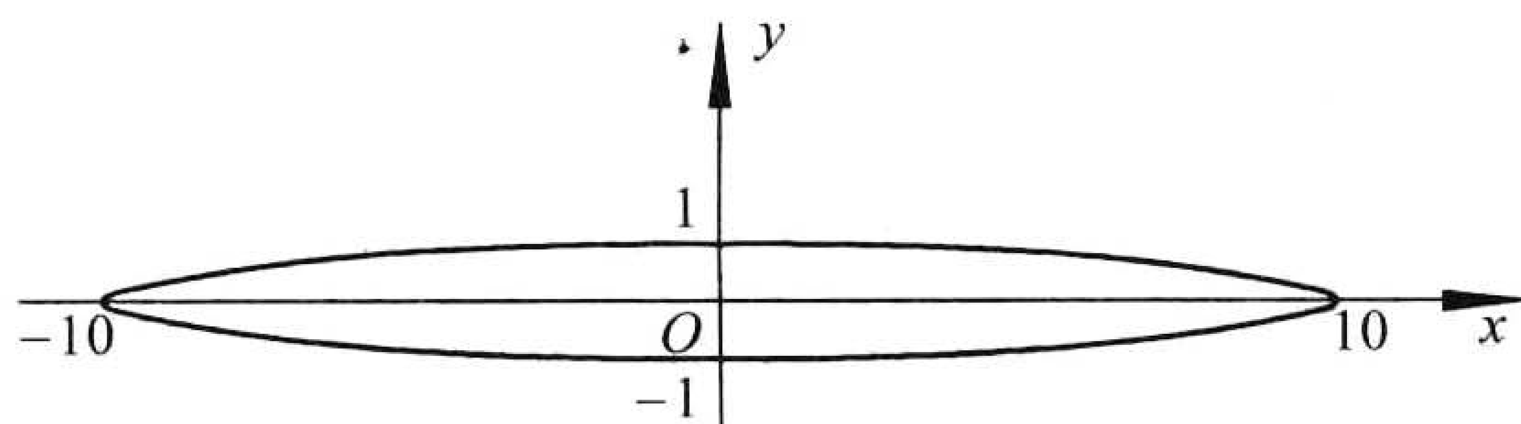


图 1.205

(4)$x^2-y^2=1$. 如图 1.206 所示.

(5)$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$，且 $0\leqslant x\leqslant 5$，$0\leqslant y\leqslant 3$. 如图 1.207 所示.

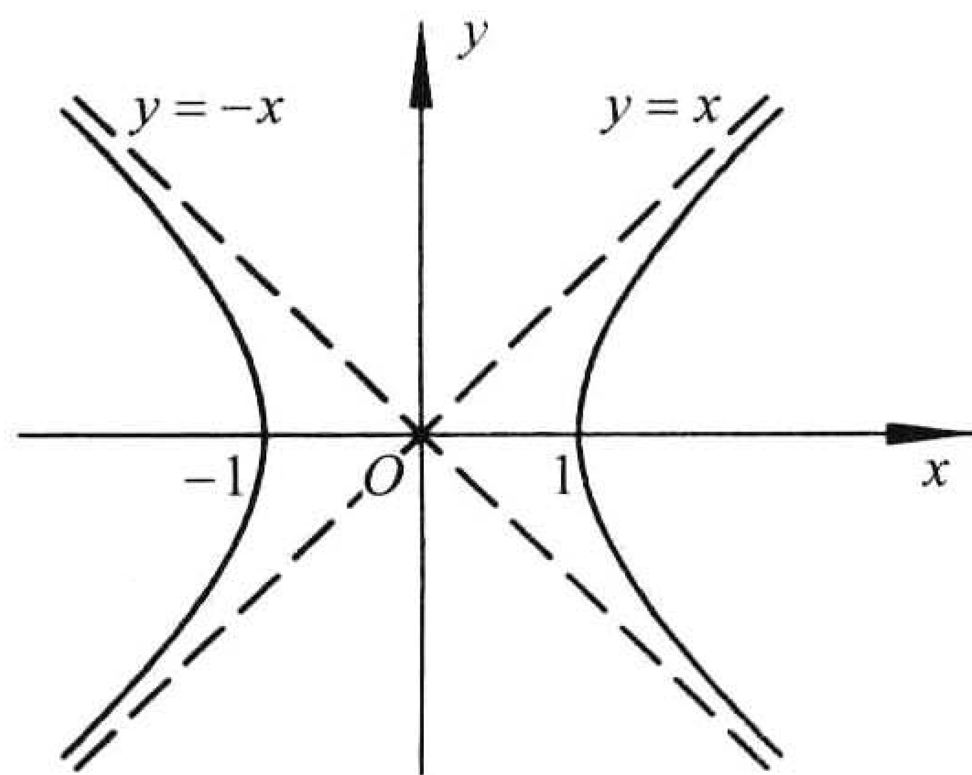


图 1.206

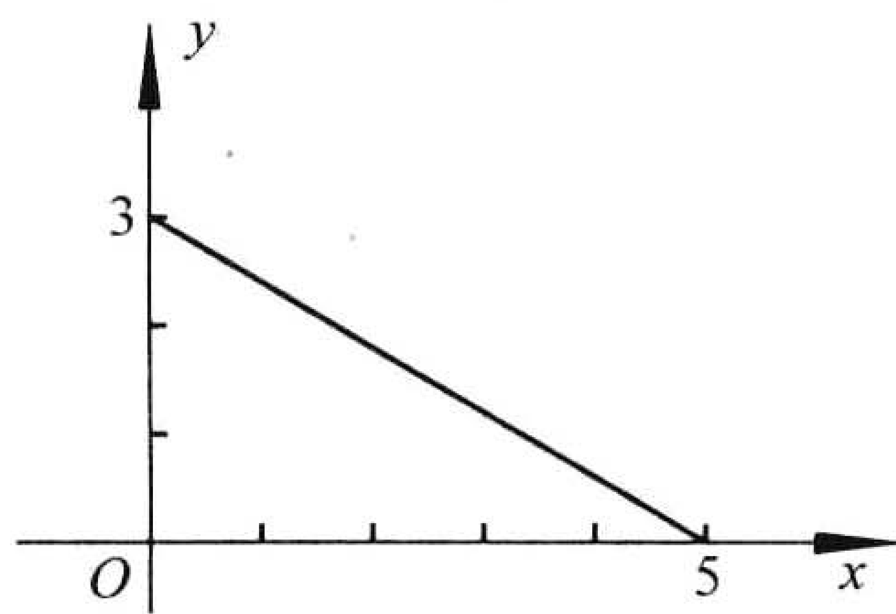


图 1.207

(6)如图 1.208 所示.

(7)如图 1.209 所示.

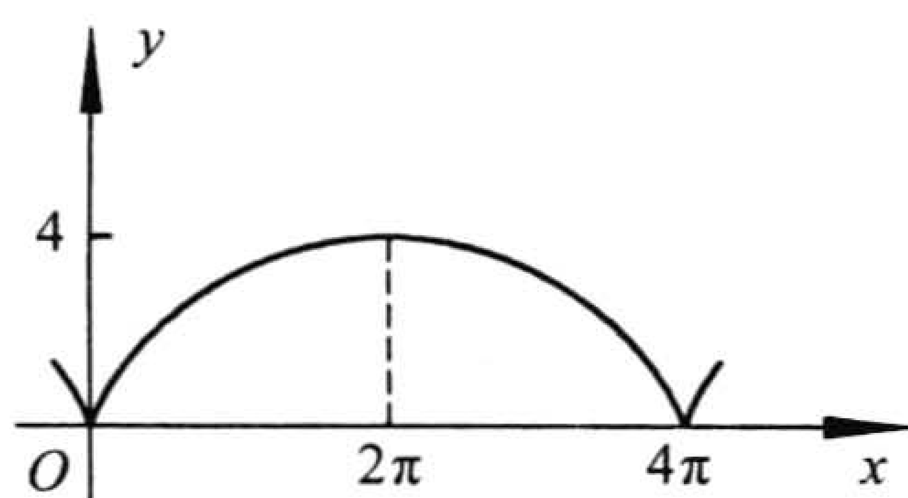


图 1.208

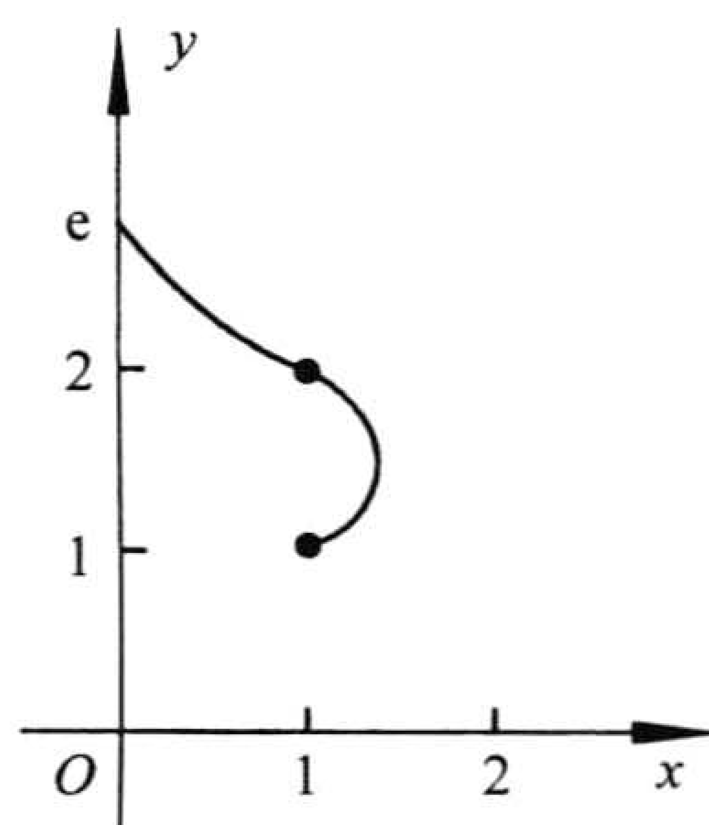


图 1.209

【370】 作下列隐函数的图像:

(1)$x^2-xy+y^2=1$(椭圆);　(2)$x^3+y^3-3xy=0$(笛卡儿叶形线);

(3)$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$(抛物线);　(4)$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$(星形线);

(5)$\sin x=\sin y$;　(6)$\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$;

(7)$x^y=y^x\ (x>0, y>0)$;　(8)$x-|x|=y-|y|$.

解 (1)将坐标轴按正向绕原点旋转 45°,得新坐标系$Ox'y'$,则由旋转公式得

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{\frac{2}{3}}=1.$$

如图 1.210 所示.

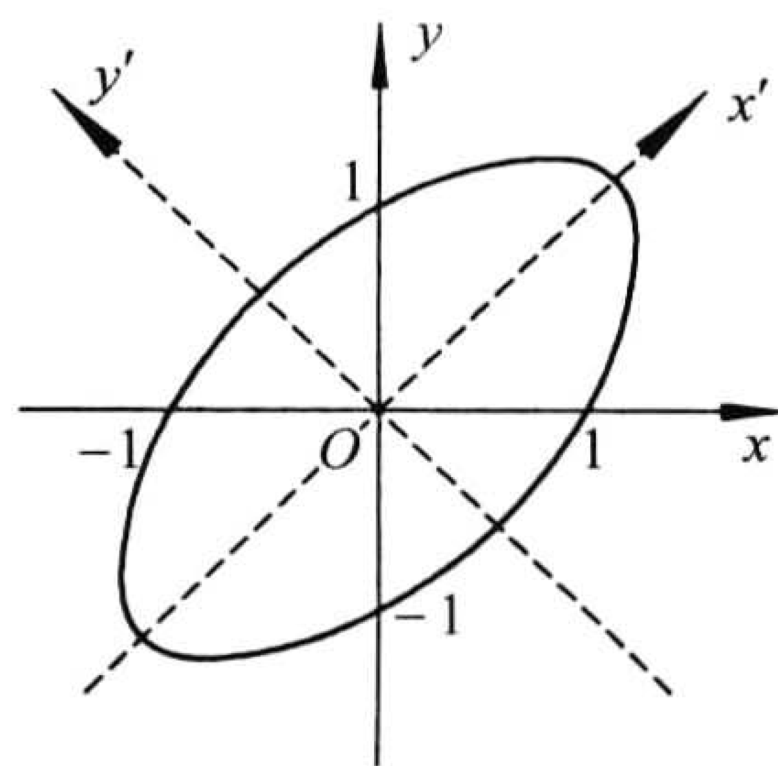


图 1.210

(2)渐近线为 $x+y+1=0$. 如图 1.211 所示.

(3)如图 1.212 所示.

(4)如图 1.213 所示.

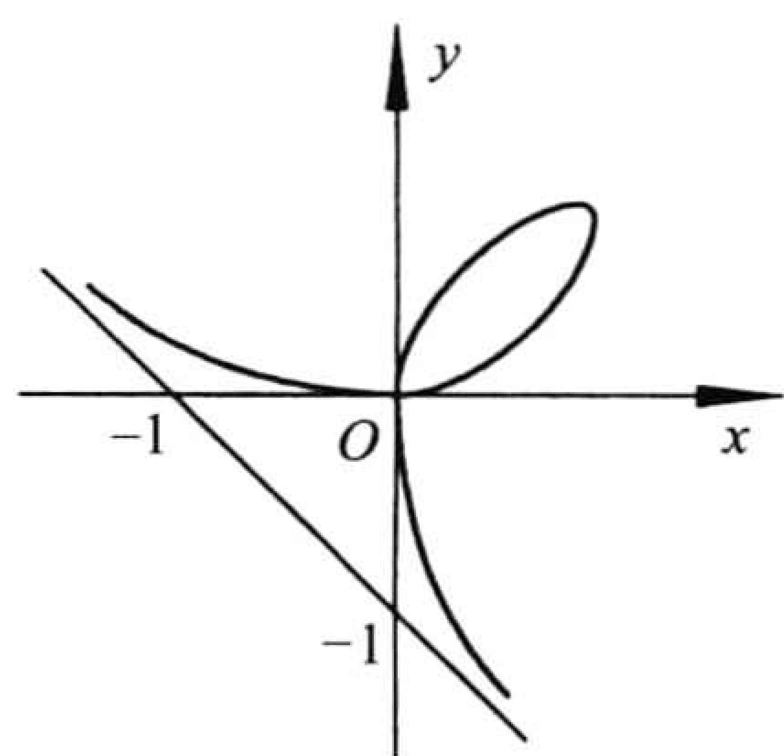


图 1.211

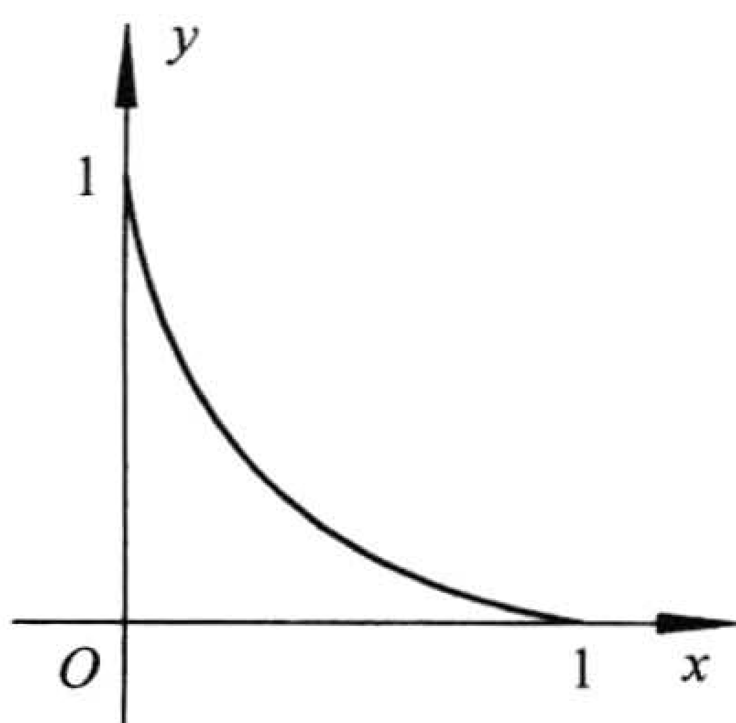


图 1.212

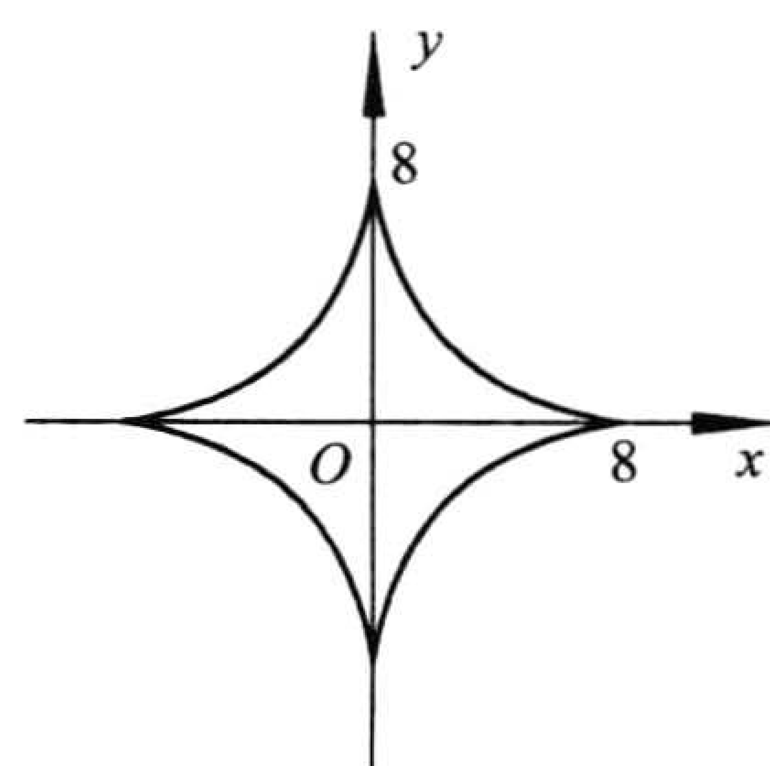


图 1.213

(5)$y=x+2k\pi$ 或 $y=(2k+1)\pi-x\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 如图 1.214 所示.

(6)$y=x^2+2k$ 或 $y=2k-x^2\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 如图 1.215 所示.

(7)如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(8)如图 1.217 所示. 图像包括第一象限阴影部分(连同边界): $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ 以及第三象限的黑粗线部分: $y=x, x<0, y<0$.

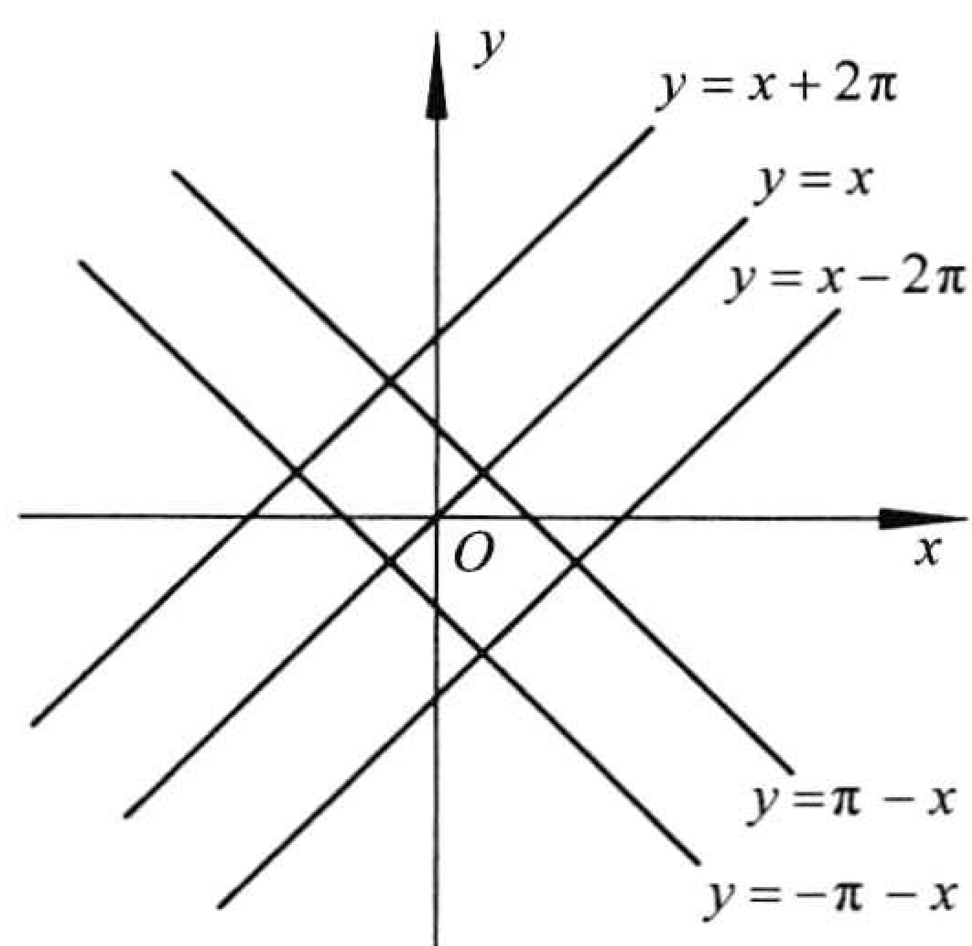


图 1.214

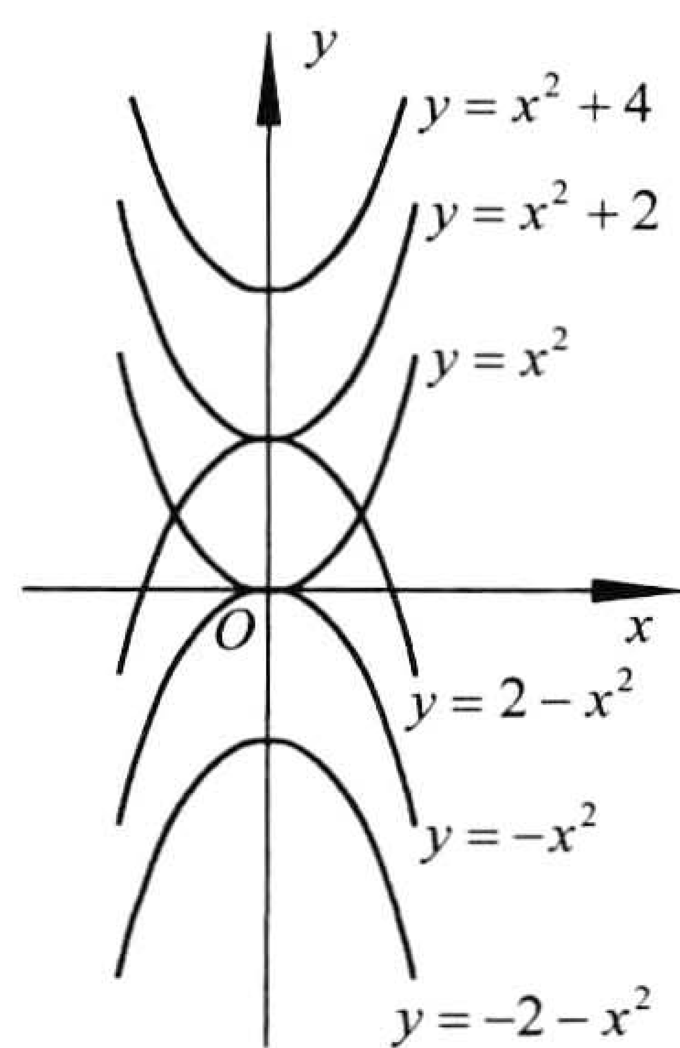


图 1.215

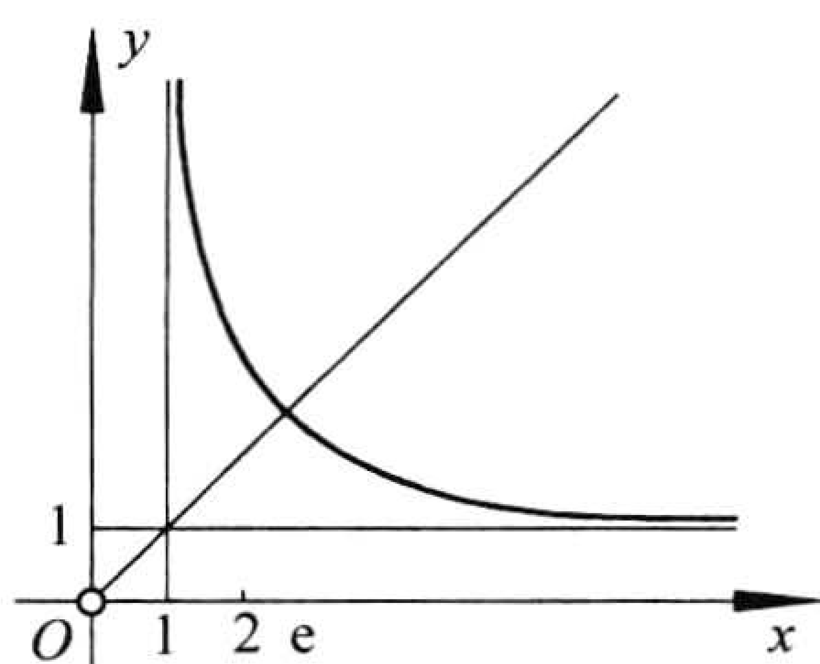


图 1.216

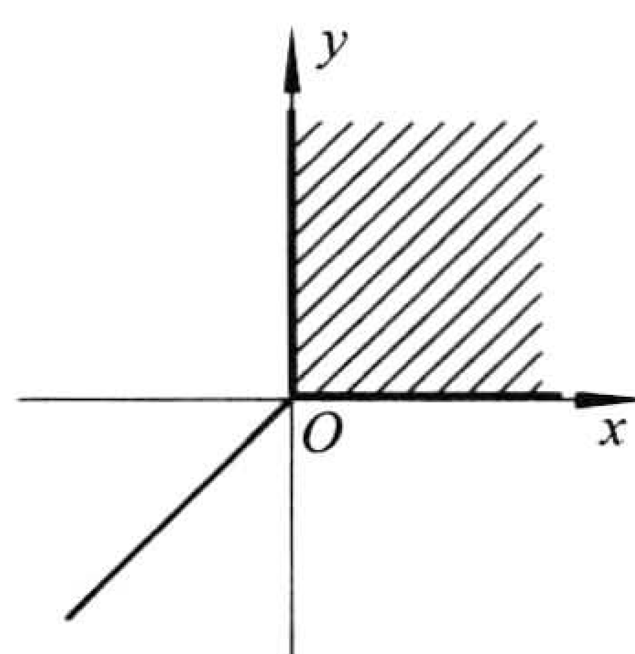


图 1.217

【371】 在极坐标系(r,φ)中作出下列函数$r=r(\varphi)$的图像：

(1)$r=\varphi$（阿基米得螺线）；　　(2)$r=\dfrac{\pi}{\varphi}$（双曲螺线）；

(3)$r=\dfrac{\varphi}{\varphi+1}$ $(0\leqslant\varphi<+\infty)$；　　(4)$r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$（对数螺线）；

(5)$r=2(1+\cos\varphi)$（心脏线）；　　(6)$r=10\sin3\varphi$（三瓣玫瑰线）；

(7)$r^2=36\cos2\varphi$（伯努利双纽线）；　　(8)$\varphi=\dfrac{r}{r-1}$ $(r>1)$；

(9)$\varphi=2\pi\sin r$.

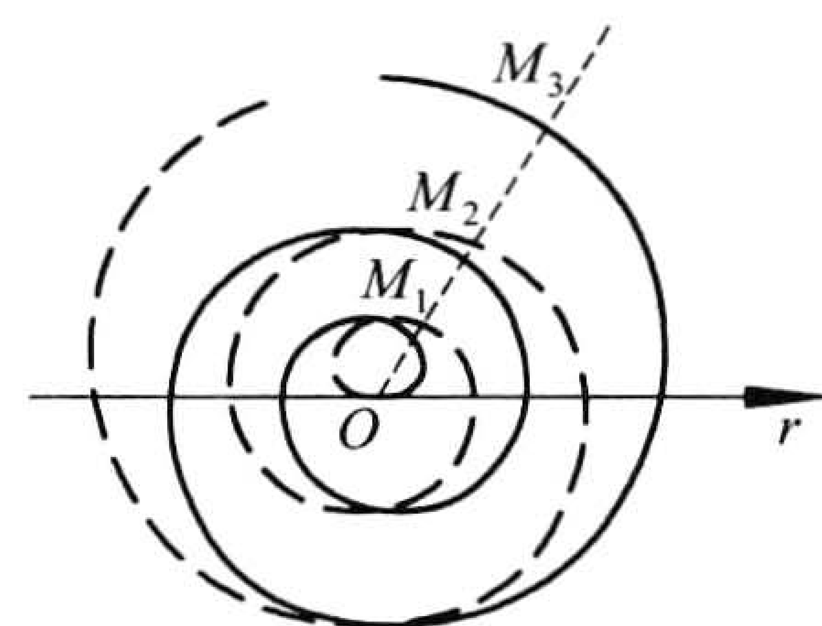


图 1.218

解　(1)如图 1.218 所示. $M_1M_2=M_2M_3=\cdots=2\pi$.

(2)如图 1.219 所示.

(3)如图 1.220 所示.

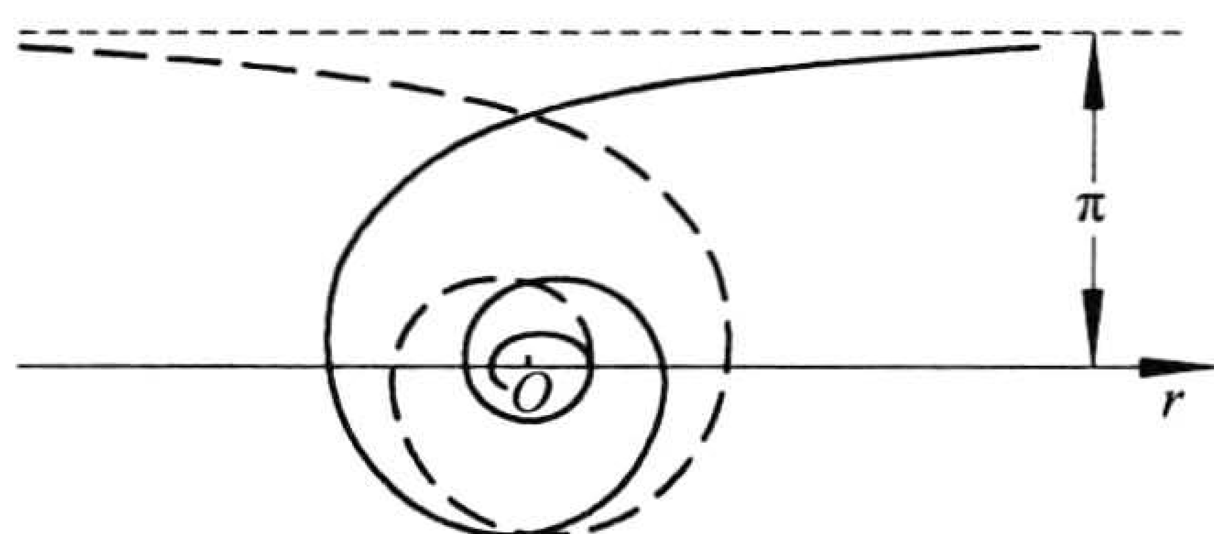


图 1.219

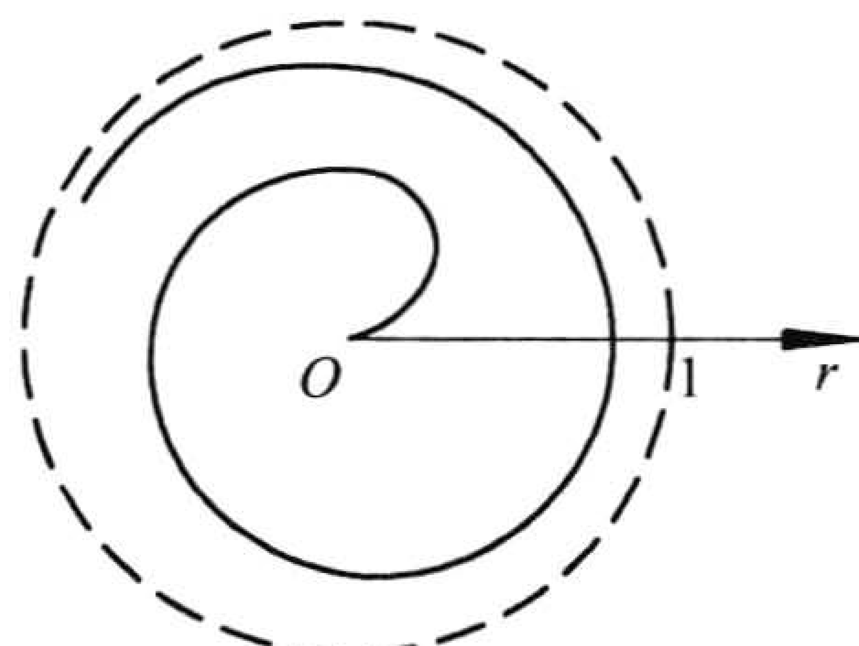


图 1.220

(4)如图 1.221 所示.

(5)如图 1.222 所示.

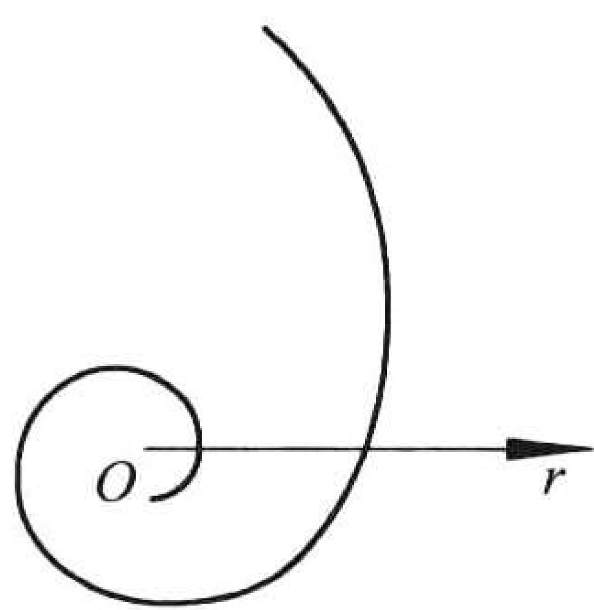


图 1.221

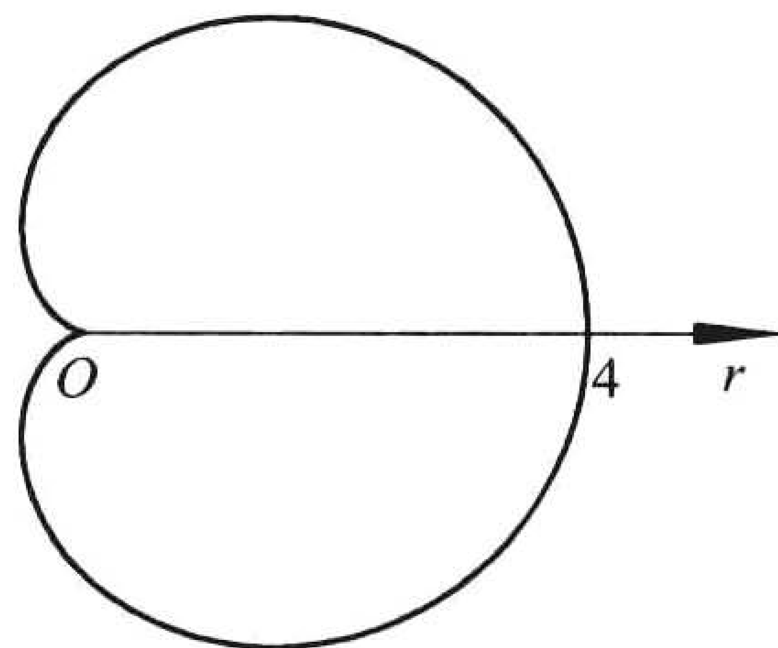


图 1.222

(6)如图 1.223 所示.

(7)如图 1.224 所示.

(8)如图 1.225 所示.

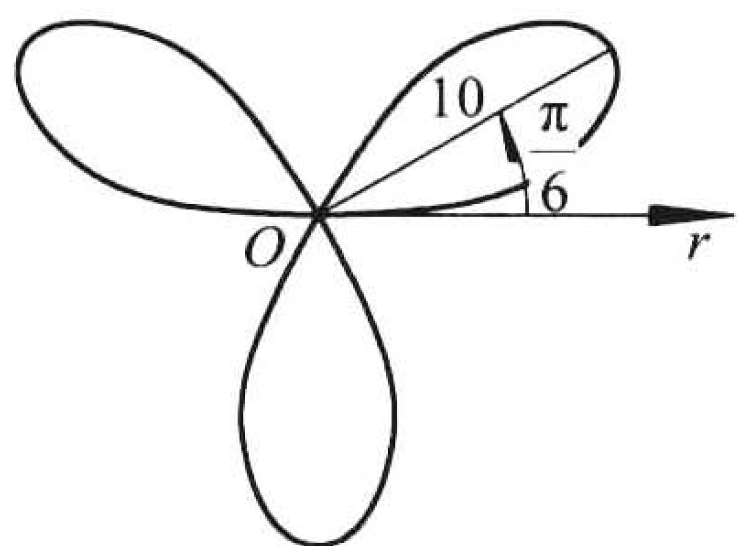


图 1.223

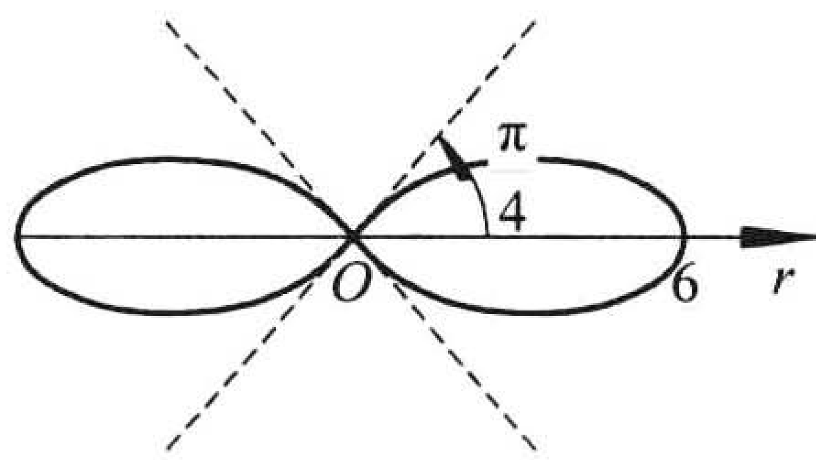


图 1.224

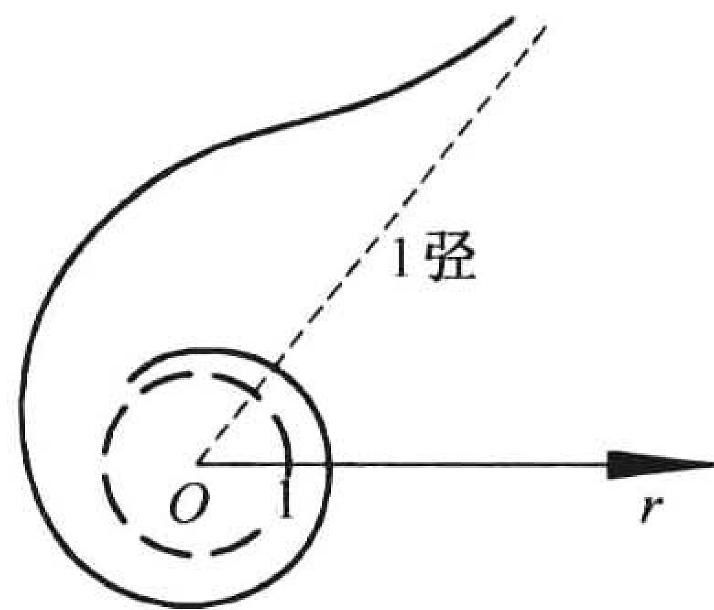


图 1.225

(9)如图 1.226 所示.

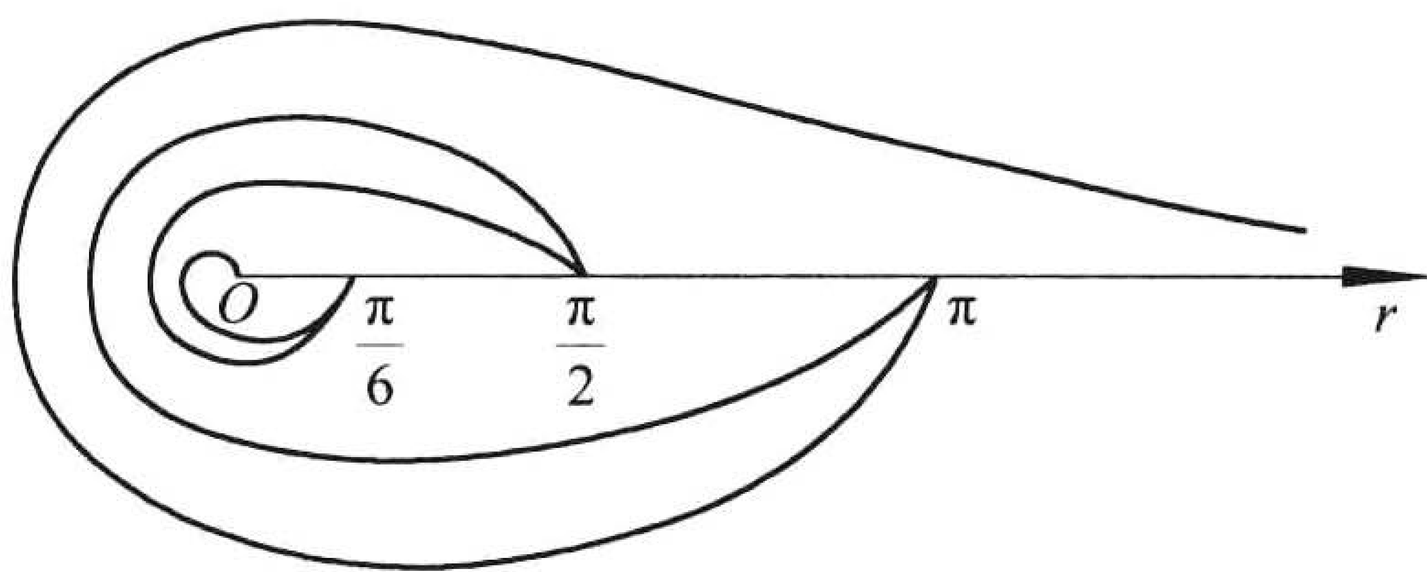


图 1.226

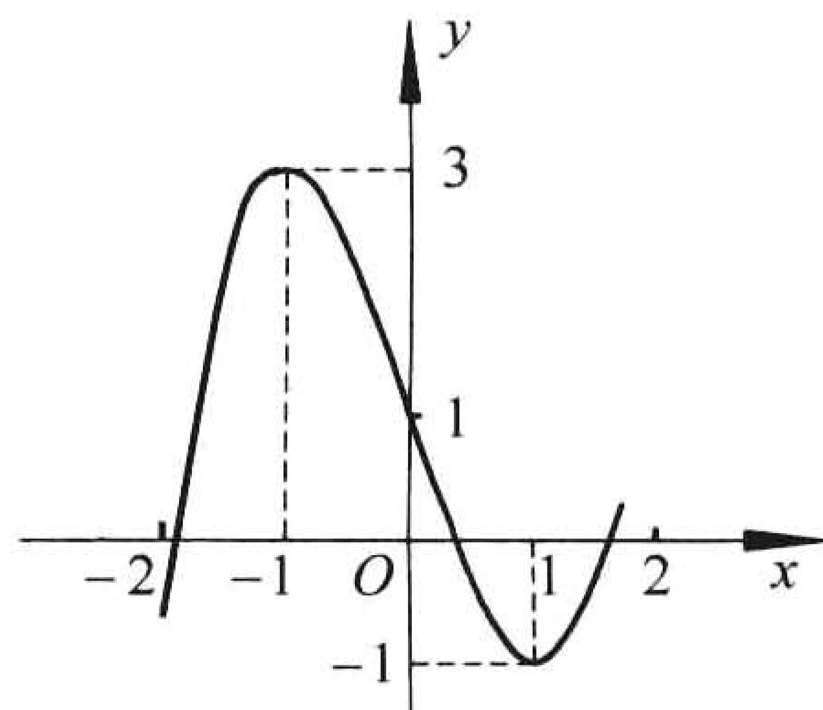


图 1.227

【372】 利用函数 $y=x^3-3x+1$ 的图像近似地求解方程 $x^3-3x+1=0$.

解 如图 1.227 所示.因

$$y\Big|_{x=0}=1>0,\quad y\Big|_{x=0.4}=-0.136,$$

所以,在 0 与 0.4 之间有一实根,约为 0.35.

同法可求得其他二根为 1.53 及 −1.88.

用图解法解下列方程:

【373】 $x^3-4x-1=0$.

解题思路 作函数 $y=x^3$ 及 $y=4x+1$ 的图像,它们的交点的横坐标 x_0 即所求之根.必须注意在 x_0 的邻近研究函数 $f(x)=x^3-4x-1$ 的符号,若 $f(x_0-\delta)f(x_0+\delta)<0$,则根 x_0 介于 $x_0-\delta$ 及 $x_0+\delta$ 之间,其中 δ 为一很小的某个正数.

下列各题的思路相同.

解 作函数 $y=x^3$ 及 $y=4x+1$ 的图像,它们的交点的横坐标即所求之根(图 1.128).

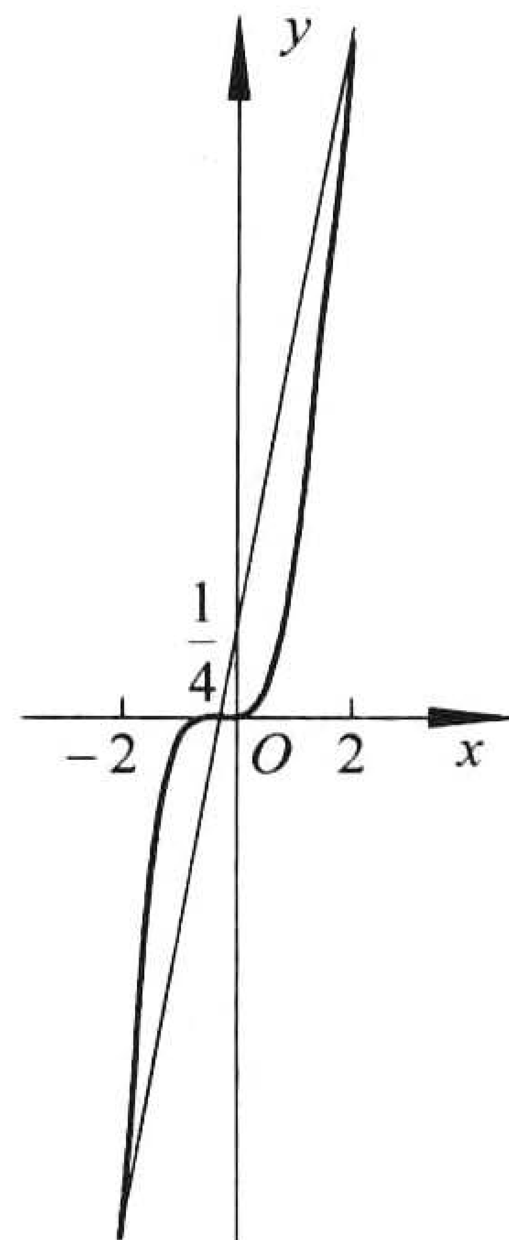


图 1.228

在图示的根 x_0 邻近研究函数 $f(x)=x^3-4x-1$,若 $f(x_0-\delta)f(x_0+\delta)<0$,则根 x_0 界于 $x_0-\delta$ 及 $x_0+\delta$ 之间,其中 δ 为很小的某个正数.

经判别,根的近似解为 −1.86; −0.25; 2.11.

【374】 $x^4-4x+1=0$.

解 作函数 $y=x^4$ 及 $y=4x-1$ 的图像.如图 1.229 所示.交点的横坐标即所求之根,其近似值为0.25;1.49.

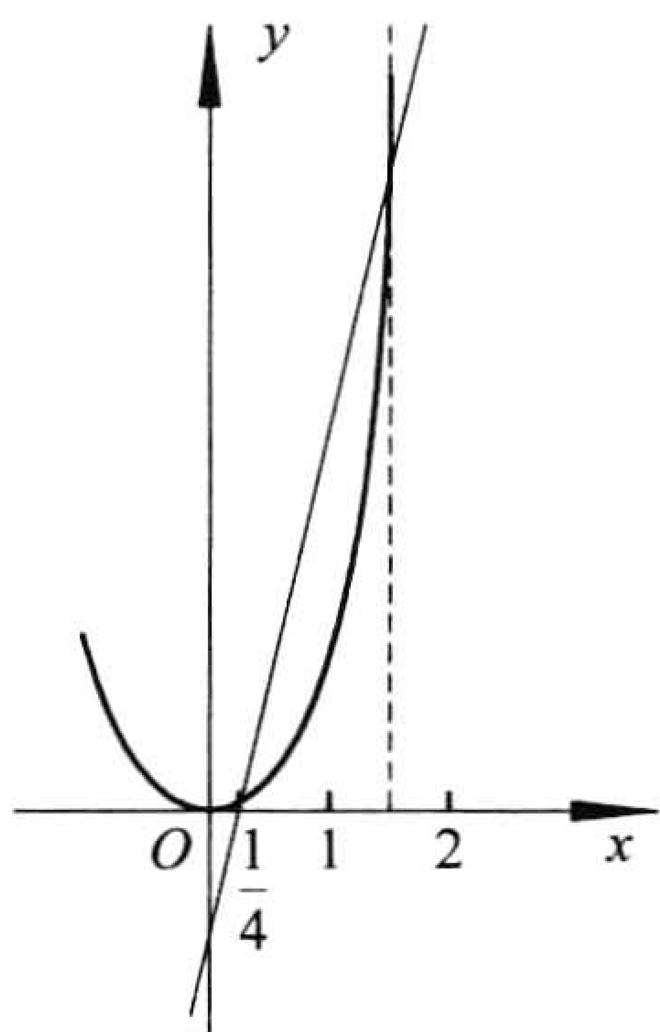


图 1.229

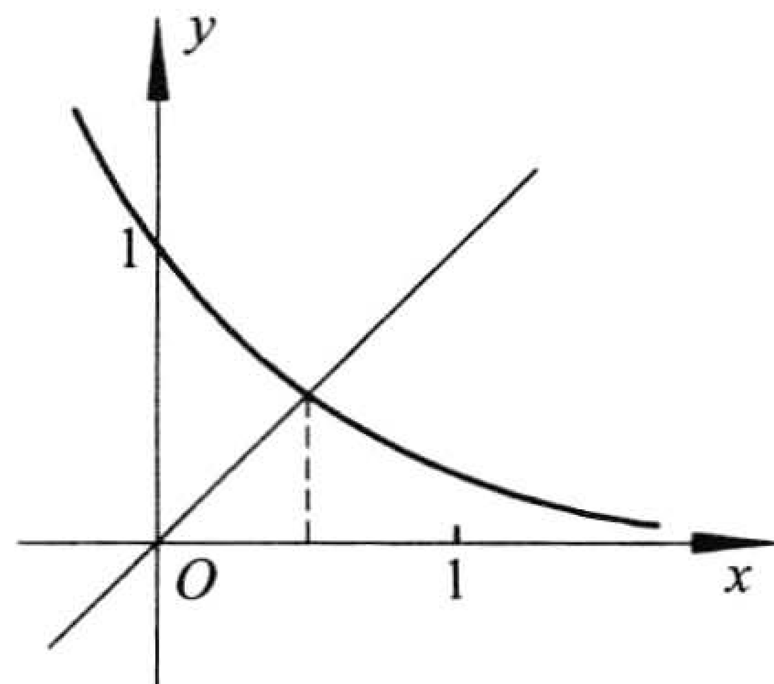


图 1.230

【375】 $x=2^{-x}$.

解 作函数 $y=2^{-x}$ 及 $y=x$ 的图像,如图 1.230 所示.交点的横坐标为 0.64,此即所求之根的近似值.

【376】 $\lg x=0.1x$.

解 作函数 $y=\lg x$ 及 $y=0.1x$ 的图像,如图 1.231 所示.

交点的横坐标为 1.37 及 10,此即所求之根,前者为近似值,后者为精确值.

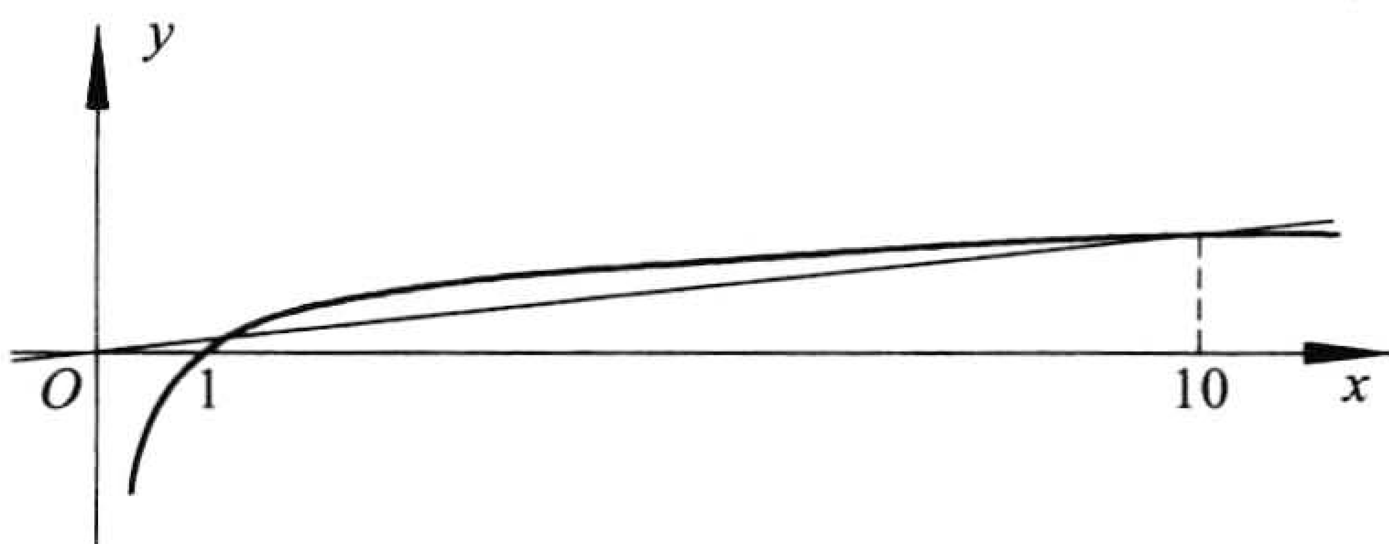


图 1.231

【377】 $10^x=x^2$.

解 作函数 $y=10^x$ 及 $y=x^2$ 的图像,如图 1.232 所示.交点的横坐标为 -0.54,此即所求之根的近似值.

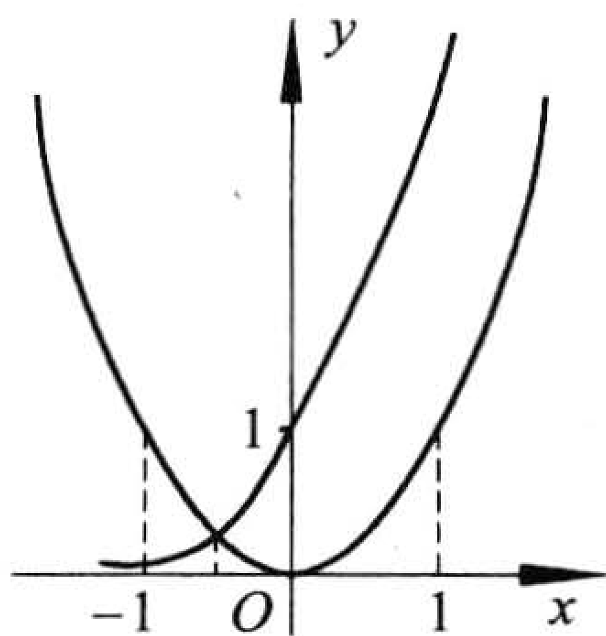


图 1.232

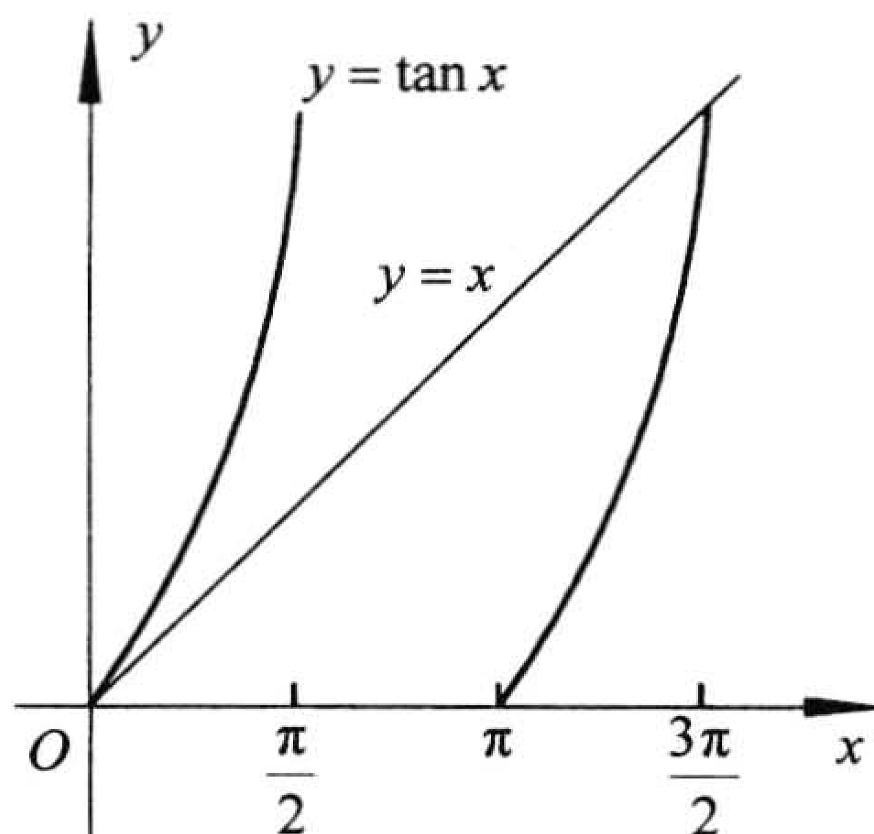


图 1.233

【378】 $\tan x=x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

解 作函数 $y=\tan x$ 及 $y=x$ 的图像,如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49,此即所求之根,前者为精确值,后者为近似值.

用图解法解下列方程组：

【379】 $\begin{cases} x+y^2=1, \\ 16x^2+y=4. \end{cases}$

解 作函数 $y^2=1-x$ 及 $-y+4=16x^2$ 的图像，如图 1.234 所示.

交点为点 A,B,C 及 D，它们的一对坐标即所求之解（近似值）：

$$x_1=-0.42,\quad y_1=1.19(A\text{ 点});$$
$$x_2=0.45,\quad y_2=0.74(B\text{ 点});$$
$$x_3=0.54,\quad y_3=-0.68(C\text{ 点});$$
$$x_4=-0.57,\quad y_4=-1.26(D\text{ 点}).$$

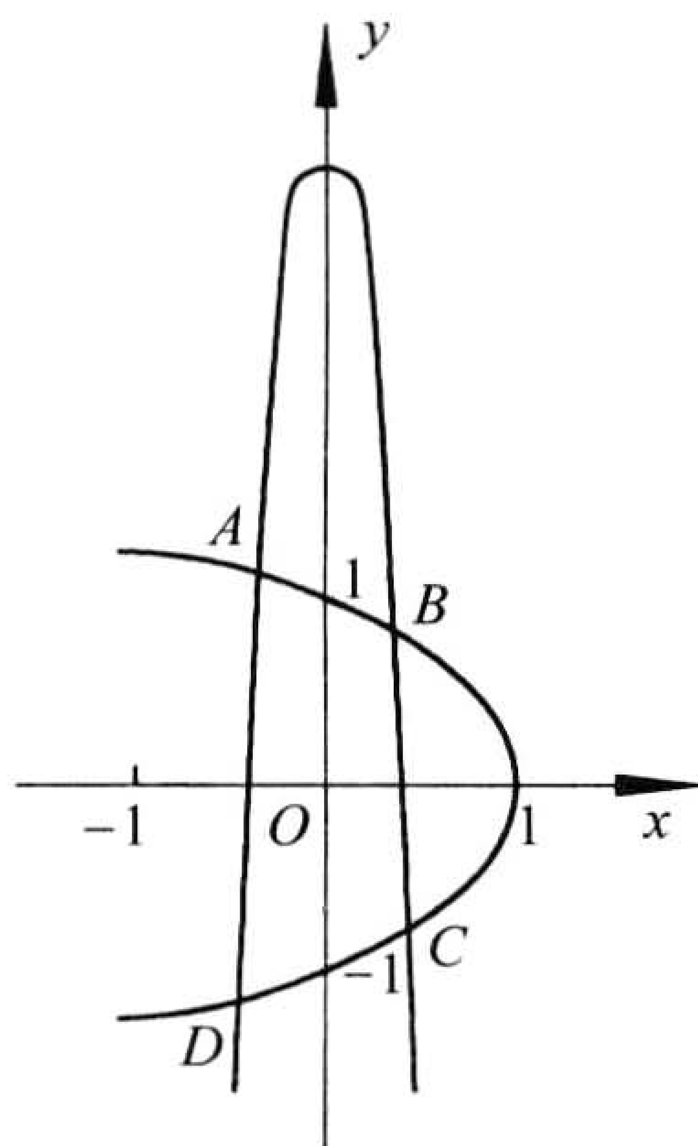


图 1.234

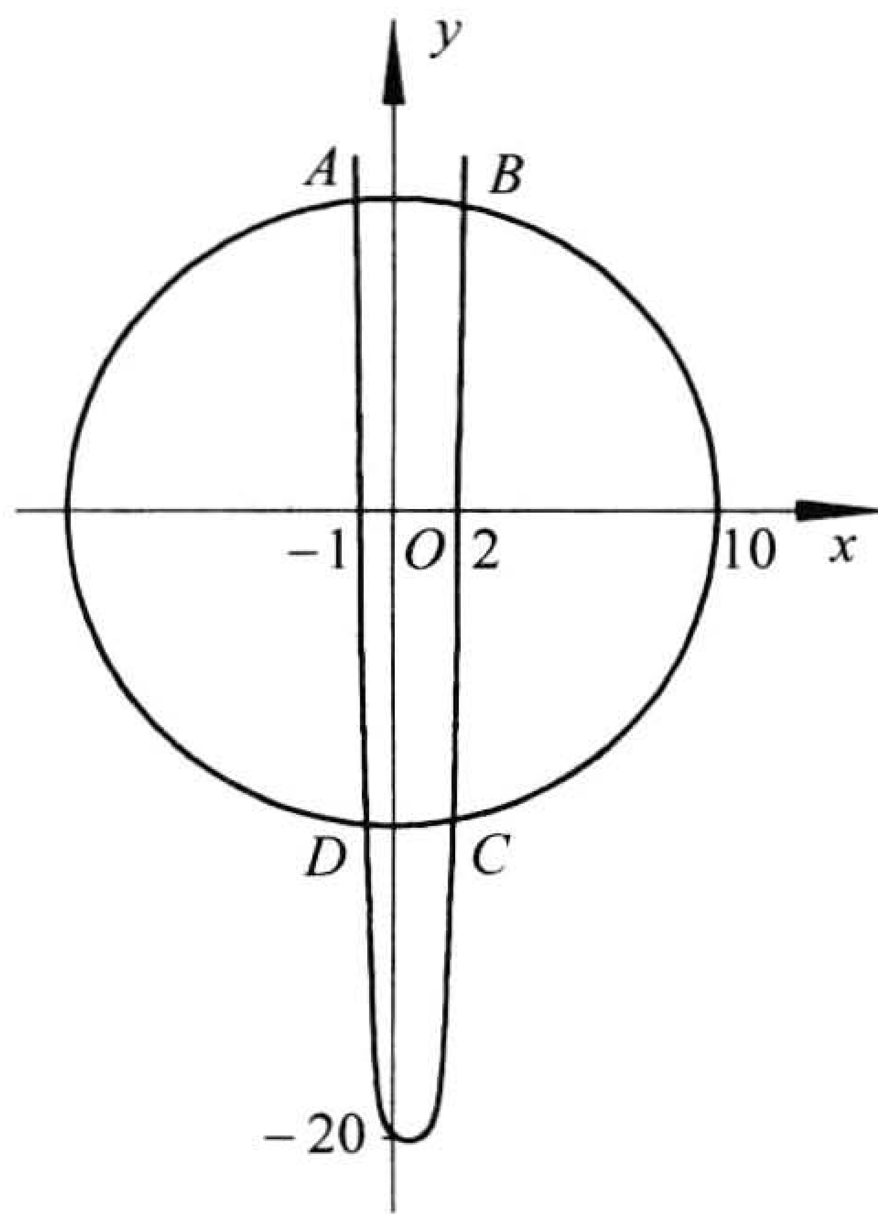


图 1.235

【380】 $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ y=10(x^2-x-2). \end{cases}$

解 作函数

$$x^2+y^2=100 \quad \text{及} \quad y=10(x^2-x-2)$$

的图像，如图 1.235 所示.

交点为点 A,B,C 及 D，它们的一对坐标即所求之解（近似值）：

$$x_1=-1.30,\quad y_1=9.92(A\text{ 点});$$
$$x_2=2.30,\quad y_2=9.73(B\text{ 点});$$
$$x_3=1.62,\quad y_3=-9.87(C\text{ 点});$$
$$x_4=-0.62,\quad y_4=-9.98(D\text{ 点}).$$

§5. 函数的极限

1° **函数的有界性** 设存在某两数 m 和 M，使得当 $x\in(a,b)$ 时，

$$m<f(x)<M,$$

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上为有界的.

数 $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的下确界，而数 $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的上确界.

差 M_0-m_0 称为函数在区间 (a,b) 上的振幅.

2° **函数在某一点的极限** 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X=\{x\}$ 上，且该集合以 a 为聚点. 记号

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \tag{1}$$

表示,对于任一个数 $\varepsilon>0$,都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对于满足条件$0<|x-a|<\delta$,并使 $f(x)$有意义的一切 x,下列不等式成立:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的充分必要条件是:对于每一个数列$x_n\to a$ $(n=1,2,\cdots)$,下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

有两个著名的极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; (2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

柯西准则. 函数 $f(x)$在 a 点的极限存在的充分必要条件是:对于每一个 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得只要

$$0<|x'-a|<\delta \quad 和 \quad 0<|x''-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

式中 x'和 x''属于函数 $f(x)$的定义域.

3° **单侧极限** 若对于任何 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得

当 $0<a-x<\delta(\varepsilon)$时,有 $|A'-f(x)|<\varepsilon$,则称数 A'为函数 $f(x)$在 a 点的*左极限*:

$$A'=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0).$$

类似地,若当 $0<x-a<\delta(\varepsilon)$时,有 $|A''-f(x)|<\varepsilon$,则称数 A''为函数 $f(x)$在 a 点的*右极限*:

$$A''=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0).$$

函数 $f(x)$在 a 点的极限存在的充分必要条件为:

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4° **无穷极限** 约定记号

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

表示,对于任何的 $E>0$,只要 $0<|x-a|<\delta(E)$,则有

$$|f(x)|>E.$$

5° **子列极限** 若对于某数列 $x_n\to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$

则称数(或符号∞)B 为函数 $f(x)$在 a 点的*子列极限*(有限的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) \quad 和 \quad \overline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$在 a 点的*下极限*和*上极限*.

等式

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x)=\overline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

为函数 $f(x)$在 a 点有极限(有限的或无穷的)的充分必要条件.

【381】 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\dfrac{m}{n}(m 和 n 为互素的整数,且 n>0), \\ 0 & x 为无理数, \end{cases}$$

在每一点 x 为有限的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

提示 *任给 $x_0>0$,注意在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内总有无限多个有理数. 只要证明对任给的 $\delta>0$,$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内无界. 用反证法.*

证 任给 $x_0>0$,当 x_0 固定时,$f(x_0)$值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密,故在 x_0 的任何邻域

$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内总有无限多个有理数.下面证明对于任给的$\delta>0$,函数$f(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内是无界的.若不然,存在$M>0$,使当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,

$$|f(x)|\leqslant M.$$

于是,在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中的有理数只能表示成$\frac{k}{1}$, $\frac{k}{2}$, …, $\frac{k}{[M]}$,其中k是与分母互素的整数,$[M]$为M的整数部分.由于这些有理数都在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中,故有

$$(x_0-\delta)[M]<k<(x_0+\delta)[M],$$

上式表明在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中的有理数仅为有限个,这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是,本题所定义的函数$f(x)$在每一点x(有限)的任何邻域中是无界的.

【382】 若函数$f(x)$在:(1)开区间,(2)闭区间内的每一点有定义且局部有界,则此函数在该开区间内或闭区间内是否为有界的?举出适当的例子.

解 (1)一般地说,不一定.例如,函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内每一点有定义且有界,但它在$(0,1)$内无界.

(2)是有界的.事实上,若$f(x)$在$[a,b]$无界,则存在$x_n\in[a,b]$使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.取子列$x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$.显然,$f(x)$在$x_0$无界(即在$x_0$的任何邻域中无界),矛盾.

【383】 证明:函数$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$在区间$-\infty<x<+\infty$中是有界的.

证 当$|x|\leqslant1$时,$|f(x)|<\frac{1+1}{1}=2$.当$|x|>1$时,$|f(x)|<\frac{1+x^4}{1+x^4}=1$.

因而,当$-\infty<x<+\infty$时,$|f(x)|<2$.即函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

【384】 证明:函数$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在点$x=0$的任何邻域内是无界的,但当$x\to0$时不成为无穷大.

证 当$x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$时,$f(x)=0$;而当$x=\frac{1}{k\pi}$时,$f(x)=(-1)^kk\pi$.于是,当$k\to\infty$时,点$\frac{2}{(2k+1)\pi}$及$\frac{1}{k\pi}$均在点$x=0$的任何邻域内.由于$|(-1)^kk\pi|\to+\infty$ $(k\to+\infty)$,故函数$f(x)$在点$x=0$的任何邻域内是无界的.然而当$k\to\infty$时,$f(x)$不断地与Ox轴相交,即$f(x)=0$(这样的数x的集合是无限的).因而,当$x\to0$时,$f(x)$又不成为无穷大.

【385】 研究函数$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$在区间$0<x<\varepsilon$内的有界性.

解 上方有界,它小于$|\ln\varepsilon|$.下方无界.

【386】 证明:函数$f(x)=\frac{x}{1+x}$在域$0\leqslant x<+\infty$内有下确界$m_0=0$和上确界$M_0=1$.

证明思路 注意,当$0\leqslant x<+\infty$时,$0\leqslant f(x)<1$,且$f(x)$单调上升趋近于1,命题即获证.

证 $0\leqslant f(x)<1$,且$f(x)$单调上升趋近于1,所以,$m_0=0$, $M_0=1$.

【387】 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义且单调上升,则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

解 $m_0=f(a)$, $M_0=f(b)$,其中m_0及M_0代表下确界及上确界,以下各题均采用此符号.

求函数的下确界和上确界:

【388】 $f(x)=x^2$在$(-2,5)$内.

解 $m_0=0$, $M_0=25$.

【389】 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内.

解 $m_0=0$, $M_0=1$.

【390】 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$在$(0,+\infty)$内.

解 由于$f(x)$在$(0,1)$内为增函数,而在$(1,+\infty)$内为减函数,且$f(1)$存在,所以,

$$m_0=0, \quad M_0=f(1)=1.$$

【391】 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内.

提示 注意,当$0<x<+\infty$时,$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,即获解.

解 由$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$知$m_0=f(1)=2$,又$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$,故知$M_0=+\infty$.

【392】 $f(x)=\sin x$在$(0,+\infty)$内.

解 $m_0=-1$, $M_0=1$.

【393】 $f(x)=\sin x+\cos x$在$[0,2\pi]$内.

解 由$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$知$m_0=-\sqrt{2}$, $M_0=\sqrt{2}$.

【394】 $f(x)=2^x$在$(-1,2)$内.

解 $m_0=f(-1)=\dfrac{1}{2}$, $M_0=f(2)=4$.

【395】 $f(x)=[x]$:(1)在$(0,2)$内;(2)在$[0,2]$内.

解 (1)$m_0=0$, $M_0=1$;

(2)$m_0=0$, $M_0=2$.

【396】 $f(x)=x-[x]$在$[0,1]$内.

解 $m_0=0$, $M_0=1$.

【397】 求函数$f(x)=x^2$在下列区间内的振幅:

(1) $(1, 3)$; (2) $(1.9, 2.1)$; (3) $(1.99, 2.01)$; (4) $(1.999, 2.001)$.

解 (1)振幅以ω表示之. $\omega=M_0-m_0$. 因为$m_0=1$, $M_0=9$, 所以,$\omega=8$.

(2)$m_0=(1.9)^2$, $M_0=(2.1)^2$,$\omega=(2.1)^2-(1.9)^2=0.8$,

(3)$\omega=(2.01)^2-(1.99)^2=0.08$,

(4)$\omega=(2.001)^2-(1.999)^2=0.008$.

【398】 求函数$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$在下列区间内的振幅:

(1) $(-1, 1)$; (2) $(-0.1, 0.1)$; (3) $(-0.01, 0.01)$; (4) $(-0.001, 0.001)$.

解 (1)$\omega=\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$; (2)$\omega=\pi$;

(3)$\omega=\pi$; (4)$\omega=\pi$.

【399】 设$m[f]$和$M[f]$分别为函数$f(x)$在区间(a,b)内的下确界和上确界.

证明:若$f_1(x)$和$f_2(x)$为定义于(a,b)内的函数,则

$$m[f_1+f_2]\geqslant m[f_1]+m[f_2] \quad 及 \quad M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

举出函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的例子,使上述两个关系式为:(1)等式;(2)不等式.

提示 利用上、下确界定义且注意$m[f]\leqslant f\leqslant M[f]$,命题易获证.

证 因为

$$m[f_1]\leqslant f_1\leqslant M[f_1] \quad 及 \quad m[f_2]\leqslant f_2\leqslant M[f_2],$$

所以,

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant f_1+f_2,$$

从而有

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant m[f_1+f_2].$$

又因

$$f_1+f_2\leqslant M[f_1]+M[f_2],$$

所以,

$$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

(1) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a,b) 内具有相同的单调性，且 m 及 M 均为有限时，取等式.

(2) $f_1(x)=x^2, f_2(x)=-x^2$ 在区间 $(-1,1)$ 内

$$m[f_1]=0,\quad M[f_1]=1;$$
$$m[f_2]=-1,\quad M[f_2]=0.$$

又因为 $f_1+f_2=0$，所以，

$$m[f_1+f_2]=M[f_1+f_2]=0.$$

此时

$$m[f_1+f_2]>m[f_1]+m[f_2],\quad M[f_1+f_2]<M[f_1]+M[f_2].$$

取不等式.

【400】 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a,+\infty)$ 内，并且在每一个闭区间 $[a,b]$ 上是有界的. 令

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi).$$

作函数 $y=m(x)$ 和 $y=M(x)$ 的图像，设：

(1) $f(x)=\sin x$； (2) $f(x)=\cos x$.

解 (1) 如图 1.236 所示. (2) 如图 1.236 所示.

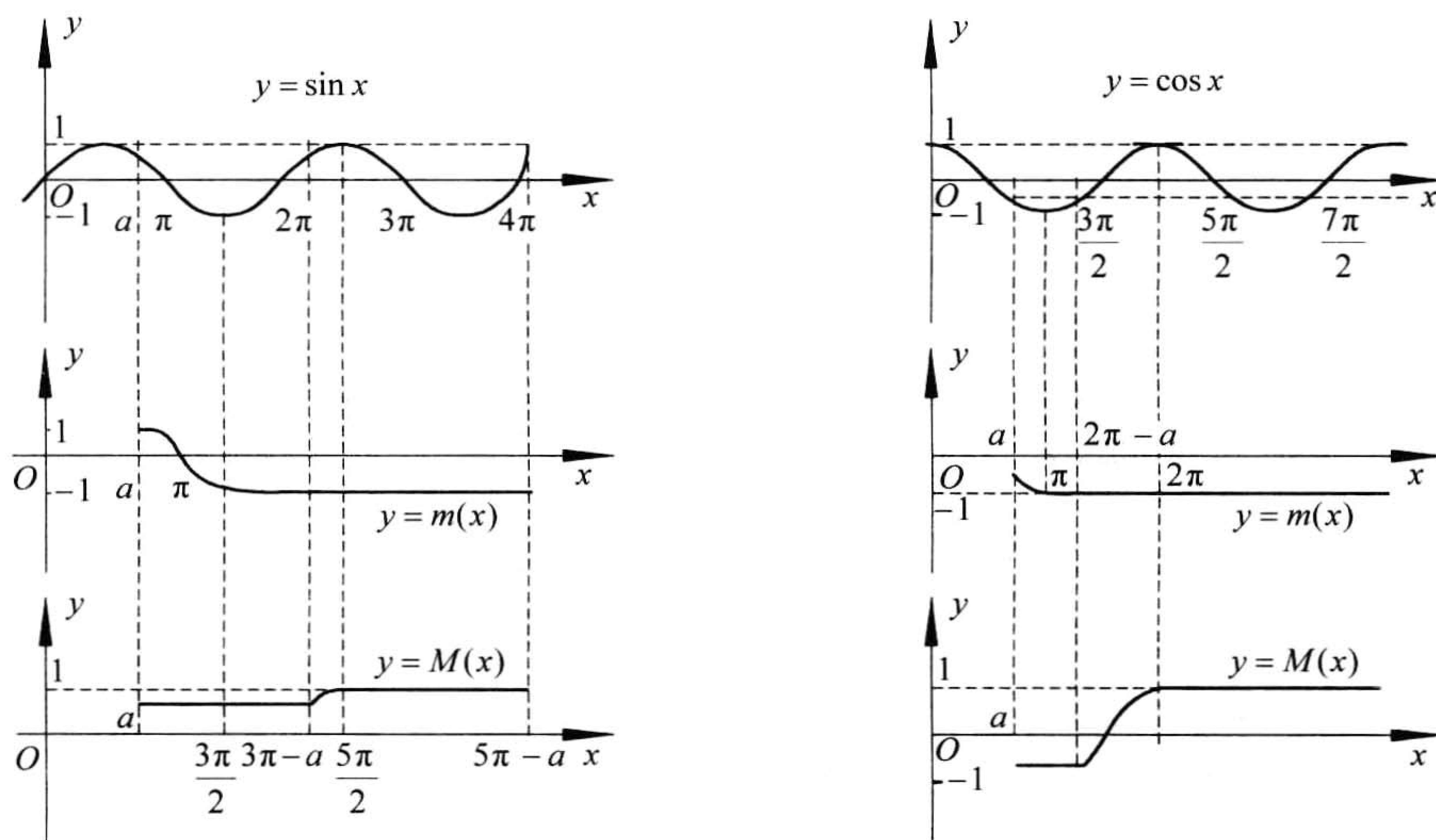


图 1.236

【401】 利用《$\varepsilon-\delta$》语言，证明：$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$.

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

证 $|x^2-4|=|x-2||x+2|$.

先限制 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，则

$$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|,$$

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$. 于是，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|x^2-4|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	…

【402】 利用《$E-\delta$》语言,证明:$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

填下表:

E	10	100	1000	10000	…
δ					

证 任给 $E>0$,要使 $\dfrac{1}{|1-x|^2}>E$,只要 $0<|x-1|<\dfrac{1}{\sqrt{E}}$,又只要 $0<|x-1|<\dfrac{1}{E}$ $(E>1,)$,取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{1}{E}\right\}$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$\left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right|>E$,所以,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

E	10	100	1000	10000	…
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

【403】 利用不等式表示下列各式:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$; (2) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$; (3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$.

举出适当的例子.

解 (1)对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

例如,$f(x)=x+1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$.

例如,若 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant1,\\ 2, & x>1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=2$.

(3) 对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$.

例如本题(2)之例,即有 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2$.

利用不等式表示下列结论,并举出适当的例子:

【404】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$.

解 (1) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

(3) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$|f(x)-b|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$.

例如,对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,即有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

【405】 (1)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; (2)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$; (3)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$; (5) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$; (6) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$;

(7) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$; (8) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$; (9) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$.

解 (1)任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,即有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$.

(2) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$,即有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-\infty$.

(3) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$,即有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

(4) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\infty$.

(5) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$.

(6) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=+\infty$.

(7) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{x-1}\right]}}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\infty$.

(8) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\infty$.

(9) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=+\infty$.

【406】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$;　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$;　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$;　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$;　(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

解 (1) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=x^3$,则有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

(2) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=-x^2$,即有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

(3) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=x^2$,即有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

(4) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=(-1)^{[x^2]}x$,即有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$.

(5) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=x$,即有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(6) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=-x$,即有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

(7) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$|f(x)|>E$,此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

例如,$f(x)=(-1)^{[x]}x^2$,即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

(8) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=-x$,即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

(9) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=x$ 即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

【407】 命 $y=f(x)$.利用不等式表示下列结论:

(1) 当 $x\to a$ 时,$y\to b-0$;　(2) 当 $x\to a-0$ 时,$y\to b-0$;

(3) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b-0$； (4) 当 $x\to a$ 时，$y\to b+0$；

(5) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b+0$； (6) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b+0$；

(7) 当 $x\to\infty$时，$y\to b-0$； (8) 当 $x\to-\infty$时，$y\to b-0$；

(9) 当 $x\to+\infty$时，$y\to b-0$； (10) 当 $x\to\infty$时，$y\to b+0$；

(11) 当 $x\to-\infty$时，$y\to b+0$； (12) 当 $x\to+\infty$时，$y\to b+0$；

举出适当的例子.

解 (1) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b-0$,或当 $x\to a$ 时,$y\to b-0$.

例如,$y=-|x|$,即有当 $x\to 0$ 时,$y\to 0-0$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b-0$.

例如,$y=x$,即有当 $x\to 0-0$ 时,$y\to 0-0$.

(3) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即，当 $x\to a+0$ 时,$y\to b-0$.

例如,$y=-x$,即有当 $x\to 0+0$ 时,$y\to 0-0$.

(4) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|a-x|<\delta$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to a$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=|x|$,即有当 $x\to 0$ 时,$y\to 0+0$.

(5) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to a-0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=-x$,即有当 $x\to 0-0$ 时,$y\to 0+0$.

(6) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to a+0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=x$,即有当 $x\to 0+0$ 时,$y\to 0+0$.

(7) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即,当 $x\to\infty$时,$y\to b-0$.

例如,$y=-\dfrac{1}{|x|}$,即有当 $x\to\infty$时,$y\to 0-0$.

(8) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即,当 $x\to-\infty$时,$y\to b-0$.

例如,$y=\dfrac{1}{x}$,即有当 $x\to-\infty$时,$y\to 0-0$.

(9) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$0<b-y<\varepsilon$,此即,当 $x\to+\infty$时,$y\to b-0$.

例如,$y=-\dfrac{1}{x}$,即有当 $x\to+\infty$时, $y\to 0-0$.

(10) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to\infty$时,$y\to b+0$.

例如,$y=\dfrac{1}{|x|}$,即有当 $x\to\infty$时, $y\to 0+0$.

(11) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to-\infty$时,$y\to b+0$.

例如,$y=-\dfrac{1}{x}$,即有当 $x\to-\infty$时, $y\to 0+0$.

(12) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $x>N$ 时,$0<y-b<\varepsilon$,此即,当 $x\to+\infty$时,$y\to b+0$.

例如,$y=\dfrac{1}{x}$,即有当 $x\to+\infty$时, $y\to 0+0$.

【408】 设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,式中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$为实数.

证明:$\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$.

证 不妨设 $a_0\neq 0$,则

$$|p(x)|\geqslant|a_0|\cdot|x^n|\cdot\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|,$$

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^i}=0\ (i=0,1,2,\cdots,n)$,故存在 $E_1>0$,使当 $|x|>E_1$ 时,恒有

$$\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|>\frac{1}{2},$$

从而有 $|p(x)|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n$.

任给 $M>0$,设 $E_2=\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$. 取 $E=\max(E_1,E_2)$,则当 $|x|>E$ 时,恒有 $|p(x)|>M$,故

$$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty.$$

【409】 设 $R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, 式中 $a_0\neq0$, $b_0\neq0$.

证明:

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

提示 分子及分母同除以 x^m,命题即可获证.

证 分子分母同除以 x^m,得 $R(x)=\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+\cdots+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_mx^{-m}}$.

当 $n>m$ 时,分子趋于无穷,分母趋于 b_0,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\infty$.

当 $n=m$ 时,分子趋于 a_0,分母趋于 b_0,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}$.

当 $n<m$ 时,分子趋于 0,分母趋于 b_0,所以,$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$.

【410】 设 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$,式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式,且 $P(a)=Q(a)=0$.

表达式 $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可能取何值?

解 若 a 仅为 $P(x)=0$ 及 $Q(x)=0$ 的一重根,则极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x)=0$ 的 n 重根,而为 $Q(x)=0$ 的 m 重根,则当 $n>m$(n,m 均大于 1)时,此极限为 0;当 $n<m$ 时,此极限为 ∞;当 $n=m$ 时,此极限为一不等于零的值.

总之,极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为 0,或为 ∞,或为不等于零的值.

求下列各式之值:

【411】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

【412】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x)=1+6x+11x^2+6x^3$,于是,

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to0}(6+11x+6x^2)=6.$$

【413】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{x^3+1}=10$.

【414】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ （m 与 n 为正整数）.

提示 将$(1+mx)^n$ 及$(1+nx)^m$ 展开即易获解.

解 $\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\frac{\left[1+nmx+\frac{1}{2!}n(n-1)m^2x^2+\cdots+m^nx^n\right]}{x^2}+\frac{-\left[1+mnx+\frac{1}{2!}m(m-1)n^2x^2+\cdots+n^mx^m\right]}{x^2}$$

$$=\frac{n}{2}(n-1)m^2-\frac{m}{2}(m-1)n^2+o(x)^{*)}=\frac{1}{2}mn(n-m)+o(x),$$

于是，$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m)$.

*） $o(x)$表示当 $x\to0$ 时的无穷小量.

【415】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

提示 利用 409 题的结果.

解 分子的最高次方为 5 次，分母的最高次方也为 5 次，因而当 $x\to\infty$时，此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比，于是，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}=\frac{1}{5^5}.$$

【416】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

提示 利用 409 题的结果.

解 分子与分母的最高次方相同，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

【417】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

提示 分子与分母的的最高次方均为$\frac{n(n+1)}{2}$，并利用 409 题的结果.

解 分子的最高次方为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，它与分母的最高次方相同，所以，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

【418】 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}$.

【419】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

提示 注意分子及分母分解因式后，有

$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$， $x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}=\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}$.

【420】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}$ *）.

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$.

*) 原书 419 题与 420 题相同.

【421】 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

【422】 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}$.

【423】 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

提示 仿 419 题的解法,将分子及分母分解因式,且注意 $x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\dfrac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$.

【424】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

提示 $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$.

解 $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$

$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$.

于是,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$$

$$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【425】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$($m$ 和 n 为正整数).

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\dfrac{m}{n}$.

【426】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n 为正整数).

提示 令 $x=a+y$,则当 $x\to a$ 时,$y\to 0$. 将 $(a+y)^n$ 展开.

解 设 $x=a+y$,则当 $x\to a$ 时,$y\to 0$. 代入,得

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{(a+y)^n-a^n-na^{n-1}y}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n}{2!}(n-1)a^{n-2}+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y+\cdots+y^{n-2}\right]=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

【427】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n 为正整数).

提示 仿 426 题的解法,令 $x=1+y$.

解 设 $x=1+y$,则当 $x\to 1$ 时,$y\to 0$. 代入,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{n+1}-(n+1)(1+y)+n}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n(n+1)}{2!}+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y+\cdots+y^{n-1}\right]=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【428】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$($m$ 和 n 为正整数).

解题思路 当 $m\neq n$ 时,不失一般性,设 $m<n$,且令 $m+l=n$ ($l\in\mathrm{N}$). 通分后求极限,所得结果对于 $m=n$的情况仍适用.

解 当 $m=n$ 时,此极限显然为零.

当 $m\neq n$ 时,不失一般性,假设 $m<n$,且 $m+l=n$. 此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l+1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}-\frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}.$$

于是,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=-\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)]+l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn}$$

$$=-\frac{\frac{ml(l-1)}{2}+\frac{ml(m+1)}{2}}{mn}=-\frac{ml(m+l)}{2mn}=\frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时,上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之,不论 m 及 n 为任何的正整数,均有 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$.

【429】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x+\frac{a}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(x+\frac{a}{2}\right)=x+\frac{a}{2}.$$

【430】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right].$

提示 利用 2 题的结果.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{2ax}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]+\frac{a^2}{n^2}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{n-1}{1}ax+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}a^2\right\}=x^2+ax+\frac{a^2}{3}.$$

【431】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}.$

提示 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$.

解 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$, $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)}=1$.

【432】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right).$

提示 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right]^{*)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\frac{1}{2}.$

*) 利用 3 题及 1 题的结果.

【433】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}.$

解题思路　令 $1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n$ 及 $[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n$，则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$.

利用 143 题的结果.

解　令　　$1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n$，　$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n$，

则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$，由于

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2}+\frac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)}\to 3\quad(n\to\infty).$$

利用 143 题的结果，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}=3$.

【434】　把由抛物线 $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$，$Ox$ 轴及直线 $x=a$ 所围成的曲边三角形 OAM（图 1.237）的面积，当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n\to\infty$ 的极限值，求此面积.

提示　先求各内接矩形的面积和.

解　底的 n 个分点为　$0,\ \frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a$；

它们所对应的高为

$$0,\ b\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ b\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

于是，得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当 $n\to\infty$ 时，它趋向于 $\frac{ab}{3}$，即面积 $OAM=\frac{ab}{3}$.

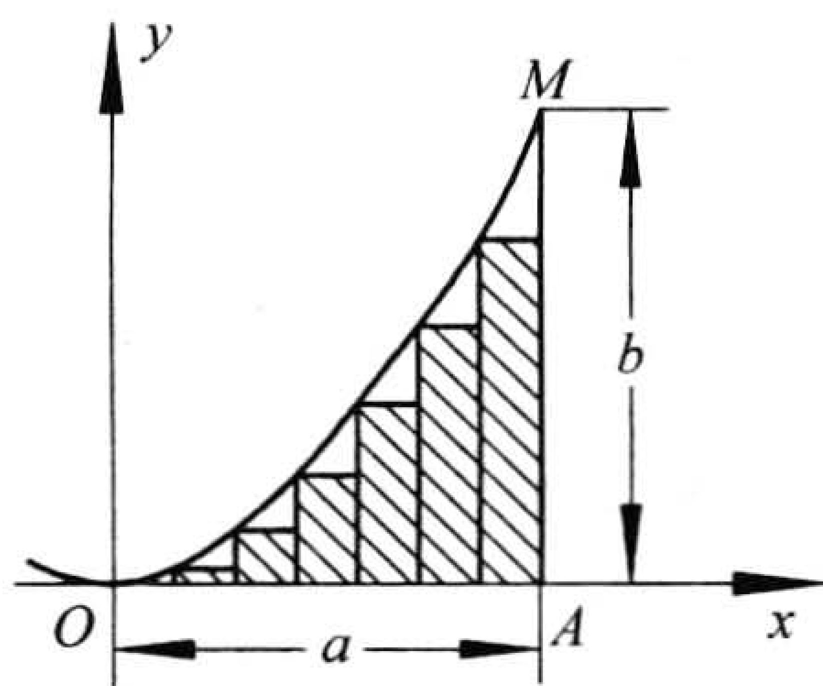


图 1.237

求极限：

【435】　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

解　分子分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

【436】　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

提示　分子分母同除以 $\sqrt{x}$.

解　分子分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【437】　$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

提示　分子分母同乘以它们的共轭因式.

解　分子分母同乘以它们的共轭因式，得

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

【438】 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

提示 分子及分母同乘以式$(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})$.

解 $$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(2+\sqrt[3]{x})(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(8+x)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=-\lim_{x\to-8}\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}+3}=-2.$$

【439】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

提示 分子及分母同乘以式$(\sqrt{x}+\sqrt{a})$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\quad(a>0).$$

【440】 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

解 $$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{16}.$$

【441】 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

解 $$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}=\frac{1}{144}.$$

【442】 $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

解 $$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

【443】 $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

解 $$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=2\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

【444】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ （n 为整数）.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1}=\frac{1}{n}.$$

【445】 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x-x^2}-1-x)(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x}=-2.$$

【446】 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)}{(x+x^2)}\cdot\frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}=\frac{1}{4}.$$

【447】 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})}{(x+2\sqrt[3]{x^4})}\cdot\frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}=\frac{2}{27}.$$

【448】 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\cdot\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}.$$

【449】 $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

解 $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

$$=\lim_{x\to 7}\left[\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[4]{x+9}-2)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}\right]$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{[(x+2)^3-(x+20)^2](\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+2)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}}}$$

$$=\frac{189\cdot 4\cdot 8}{3^5+3^4\cdot 3+3^3\cdot 3^2+3^2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+3^5}=\frac{6048}{1458}=4\frac{4}{27}.$$

【450】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^4}-\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\left(1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}{\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{7}{12}+\frac{23x}{48}+\frac{229x^2}{1728}+\frac{x^3}{81}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}}+\cdots+\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right)}=\frac{7}{36}.$$

【451】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt[5]{(1+5x)^4}+\sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x)+\cdots+(1+x)^4\right)}{(1+5x)-(1+x)^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4}+\sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x)+\cdots+(1+x)^4}{-10-10x-5x^2-x^3}=-\frac{1}{2}.$$

【452】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解题思路 分三种情况:(1)m 及 n 均为正整数;(2)m 及 n 均为负整数,可令 $m=-m'$,$n=-n'$,其中 m' 及 n' 为正整数;(3)m 及 n 中有一个为正整数,另一个为负整数.

解 如果 m 及 n 为正整数,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x\left(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(n\alpha-m\beta)+(C_n^2\alpha^2x+\cdots+\alpha^nx^{n-1}-C_m^2\beta^2-\cdots-\beta^mx^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}}$$

$$=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 为负整数.设 $m=-m'$,$n=-n'$,其中 m' 及 n' 为正整数,则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于1,于是利用本题前半段的结果,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{x}=\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{m'}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数,另一个为正整数,则同法可证上述结论仍然成立.因此,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq 0).$$

【453】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ （m 及 n 为整数）.

提示 仿452题的解法.

解 与452题相同,先设 m 及 n 为正整数.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha x)^n(1+\beta x)^m-1}{x(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}\cdot(1+\beta)^{m(mn-1)}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{n\alpha+m\beta+o(x)}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}(1+\beta x)^{m(mn-1)}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{n\alpha+m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 为负整数，则此结果仍然成立. 事实上，只需设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数. 于是，

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1=\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

再利用前半段的结果，即得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x})}=-\frac{\alpha}{m'}-\frac{\beta}{n'}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中有一个为负整数，则同法可证上述结论仍然成立. 因而，当 m 及 n 为整数时，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq0).$$

【454】 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，又 m 为整数，求证：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}}+\cdots+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}}+\cdots+1}=\frac{a_1}{m}.$

求下列极限：

【455】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ （m 及 n 为整数）.

提示 仿 452 题的解法.

解 当 m 及 n 为正整数，我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+1}\to\frac{n}{m}\quad(x\to1).$$

若 m 及 n 为负整数时，设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数，于是

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{1-\sqrt[m']{x}}{1-\sqrt[n']{x}}\cdot\frac{\sqrt[n']{x}}{\sqrt[m']{x}}\to\frac{n'}{m'}=\frac{n}{m}\quad(x\to1).$$

当 m 及 n 中只有一个为负整数，上述结伦仍然成立. 因此，当 m 及 n 为整数时，有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{n}{m}\quad(m\neq0).$$

【456】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

提示 令 $x=t^{n!}$.

解 设 $x=t^{n!}$，则

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{(1-t^{3\cdot4\cdot\cdots\cdot n})(1-t^{2\cdot4\cdot5\cdot\cdots\cdot n})\cdots(1-t^{2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)})}{(1-t^{n!})^{n-1}}$$

$$=\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{3}-1})\cdots(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\cdots+t^{n!-1})^{n-1}}$$

当 $x\to1$ 时，$t\to1$. 于是，上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2}\cdot\frac{n!}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}}=\frac{1}{n!},$$

即 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}$.

【457】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}}=\frac{a+b}{2}$.

【458】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{1+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=\frac{1}{2}$.

【459】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

提示 令 $x=\frac{1}{t}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$,则

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}$$

$$=\frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.$$

当 $x\to+\infty$时,$t\to0$. 于是,上式趋向于$-\frac{1}{4}$,即

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=-\frac{1}{4}.$$

【460】 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)-\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$=2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+x\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}=1.$$

【461】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}=\frac{2}{3}.$$

【462】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^8(x^2-2x)^3}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15}}}=2.$$

【463】 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]\cdot[(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{4}{3}.$$

【464】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

【465】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right)x^{n-1}+\cdots+\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}.$$

【466】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ （n 为正整数）.

提示 分子及分母同除以式 x^n.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)^n+\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)^n\right]=2^n.$

【467】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ （n 为正整数）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}[(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}+(x+\sqrt{1+x^2})^{n-2}(\sqrt{1+x^2}-x)+\cdots+(\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}]=2n.$$

【468】 设二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a 趋于零，系数 b 与 c 为常数，且 $b\neq 0$，试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质.

解 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$， $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

不失一般性，假设 $b>0$，于是，有

$$\lim_{a\to 0}x_2=\infty$$

及

$$\lim_{a\to 0}x_1=\lim_{a\to 0}\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=-2c\lim_{a\to 0}\frac{1}{b+\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{c}{b}.$$

【469】 从条件

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

求常数 a 和 b.

解 $\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}$.

按假设，上式的极限为零的必要条件是

$$1-a=0 \quad 及 \quad a+b=0,$$

解之，得 $a=1$，$b=-1$.

【470】[+] 从条件

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$$

求常数 a_i 和 $b_i(i=1,2)$.

解题思路 将式子 $\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1$ 化为 $\dfrac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}$，求得其极限为零的必要条件是 $a_1=\pm 1, b_1=\mp\dfrac{1}{2}$. 分别就 $a_1=1, b_1=-\dfrac{1}{2}$ 及 $a_1=-1, b_1=\dfrac{1}{2}$ 检验 $\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1$ 的极限（当 $x\to-\infty$ 时），并与条件比较，决定取舍，最后得 $a_1=-1, b_1=\dfrac{1}{2}$. 同理可得 $a_2=1, b_2=-\dfrac{1}{2}$.

解 $$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}, \tag{1}$$

上式极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0 \quad 及 \quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之，得 $a_1=\pm 1, b_1=\mp\dfrac{1}{2}$.

当 $a_1=1, b_1=-\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}=\frac{x^2-x+1-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1}-(x-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}}\to 0$$

（当 $x\to-\infty$ 时），

从而，由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to+\infty \quad (当\ x\to-\infty 时),$$

此与假定不符合，故舍弃 $a_1=1, b_1=-\frac{1}{2}$.

当 $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$ 时，显然有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}\to+\infty \quad (当\ x\to-\infty 时),$$

从而，由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to 0 \quad (当\ x\to-\infty 时),$$

此与假定符合，故得 $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$.

同理可得 $a_2=1, b_2=-\frac{1}{2}$.

求下列极限：

【471】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$.

【472】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

提示 利用"有界函数与无穷小之积仍为无穷小"这一结果.

解 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小量，而 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

【473】 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

提示 令 $x=\pi+y$.

解 设 $x=\pi+y$，则当 $x\to\pi$ 时，$y\to 0$. 于是，

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}=(-1)^{m-n}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\cdot\frac{m}{n}\right)=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

【474】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

提示 注意 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

【475】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

提示 利用三角变换将原式变形，再求极限.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【476】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

提示 利用和差化积将原式变形，再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x=2$.

【477】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cos x=4$.

【478】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\dfrac{px}{2}+\sin px}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\dfrac{px}{2}\left(\sin\dfrac{px}{2}+\cos\dfrac{px}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{\dfrac{px}{2}}{\sin\dfrac{px}{2}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{px}{2}+\cos\dfrac{px}{2}}\right)=\frac{1}{p}\quad(p\neq 0).$$

【479】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos 2y\sin y}{\sin 2y\cos y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos 2y}{2\cos^2 y}=\dfrac{1}{2}$,

其中 $x=\dfrac{\pi}{4}+y$.

【480】 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

提示 令 $x=1-y$.

解 设 $x=1-y$,则

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}y\cot\frac{\pi y}{2}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\dfrac{\pi y}{2}}{\sin\dfrac{\pi y}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi y}{2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

【481】 证明等式:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; (2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; (3) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ $\left(a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi;n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$.

证 (1) $|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\dfrac{x+a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|$.

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$,只要 $|x-a|<\varepsilon$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.
此即 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\lim\limits_{x\to a}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\tan a$.

其中 $a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi$; $n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

求下列极限:

【482】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

提示 仿 476 题的解法,并利用结果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a$.

【483】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{-\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\sin\dfrac{x+a}{2}\right)=-\sin a$.

【484】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}=\dfrac{1}{\cos^2 a}$ $\left(a\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【485】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cot x-\cot a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cot x-\cot a}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\dfrac{1}{\sin x\sin a}=-\dfrac{1}{\sin^2 a}$ $(a\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【486】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos a-\cos x}{(x-a)\cos x\cos a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x+a}{2}}{\cos x\cos a}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\right)$

$=\dfrac{\sin a}{\cos^2 a}$ $\left(a\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【487】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\csc x-\csc a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\csc x-\csc a}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\dfrac{1}{\sin x\sin a}\right)=-\dfrac{\cos a}{\sin^2 a}$ *) $(a\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

*） 利用 482 题的结果.

【488】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

提示 注意

$$\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a=[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a],$$

并仿 476 题的解法.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}-2\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\left[\cos\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\sin(a+x)\right]=-\sin a$.

【489】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

提示 仿 488 题的解法.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\cos(a+2x)-\cos(a+x)]-[\cos(a+x)-\cos a]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}+2\sin\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\left[\sin\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)-\sin\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cos(a+x)\right]=-\cos a$.

【490】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$.

提示 仿 488 题的解法.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\tan(a+2x)-\tan(a+x)]-[(\tan(a+x)-\tan a)]}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\dfrac{\sin(a+2x)\cos(a+x)-\cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2}+\frac{\dfrac{-\cos a\sin(a+x)+\cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x[\cos(a+x)\cos a-\cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2\cos a\cos(a+2x)\cos^2(a+x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2\sin(a+x)}{\cos a\cos(a+2x)\cos(a+x)}\right]$$

$$=\frac{2\sin a}{\cos^3 a}\quad\left(a\neq\frac{2k+1}{2}\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【491】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x\sin(a+x)[\sin a-\sin(a+2x)]}{x^2\sin a\sin^2(a+x)\sin(a+2x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{2\cos(a+x)}{\sin a\cdot\sin(a+x)\sin(a+2x)}\right]=\frac{2\cos a}{\sin^3 a}\quad(a\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【492】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}[\cos x-\cos(2a+3x)]-\sin^2 a}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(2a+3x)-(1-\cos 2a)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}+\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\frac{3\sin\left(2a+\frac{3x}{2}\right)}{2}\right]=\frac{3}{2}\sin 2a.$$

【493】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

提示 注意分子及分母分解因式后,有

$$2\sin^2 x+\sin x-1=(2\sin x-1)(\sin x+1),\quad 2\sin^2 x-3\sin x+1=(2\sin x-1)(\sin x-1).$$

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3.$

【494】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解题思路 注意 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x=\dfrac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)$ 及 $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$,将原式变形后利用重要极限.

解 因为

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=1-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\cos 2x=1-\frac{1}{2}\cos 4x\cos 2x-\frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$=1-\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 2x)-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x),$$

所以,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(4+16+36)=14.$$

【495】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

提示　令 $x=\frac{\pi}{3}+y$.

解　设 $x=\frac{\pi}{3}+y$,则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\sin\frac{y}{2}+\sqrt{3}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

【496】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\cdot\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}{-\frac{1}{2}\cos^2 x}=-24.$$

【497】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\tan a+\tan x}{1-\tan a\tan x}\right)\left(\frac{\tan a-\tan x}{1+\tan a\tan x}\right)-\tan^2 a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(\tan^4 a-1)}{x^2(1-\tan^2 a\tan^2 x)}=\tan^4 a-1$$

$$=\frac{-\cos 2a}{\cos^4 a}\quad\left(a\neq\frac{2k+1}{2}\pi;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

【498】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{2\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-\cos^3 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}{2\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}=\frac{3}{4}.$$

【499】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

提示　分子分母同乘以式 $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\right]=\frac{1}{4}.$$

【500】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

【501】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sqrt[3]{\cos x}(1-\sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}\right]$

$=-\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}\right]=-\dfrac{1}{12}.$

【502】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x^2}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2\right]=\sqrt{2}.$

【503】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\dfrac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\dfrac{x}{1+\sqrt{\cos x}}\right]=0.$

【504】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$

解 不妨令 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$,则

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x})}=3.$

【505】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$

提示 注意 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$,及

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0,$$

并仿 472 题的解法.

解 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.$

因为 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to0\ (x\to+\infty)$,所以,$\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\to0\quad(x\to+\infty)$.

又因 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant1$,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$

【506】 (1)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (2)$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (3)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\dfrac{1}{2}$;

(2)$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=1^0=1.$

【507】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}.$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=0.$

【508】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$

提示 注意当 $x\to\infty$ 时，有

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\frac{3}{2}\quad 及\quad \frac{x^3}{1-x}=\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty.$$

解 因为当 $x\to\infty$ 时

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\frac{3}{2}\quad 及\quad \frac{x^3}{1-x}=\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty,$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0.$

【509】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right).$

解 因为 $\left|\sin\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right|\leqslant 1$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}=0.$

【510】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}.$

解 因为当 $x\to\dfrac{\pi}{4}+0$ 时，

$$1<\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)<+\infty\quad 及\quad \tan 2x\to-\infty,$$

所以，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}=0.$

【511】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1.$

【512】+ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot 2+1}=e^2.$

【513】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1.$

【514】 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-2)}=e^{-2}.$

【515】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}.$

提示 注意

$$\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a},$$

并利用结果$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\mathrm{e}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}=\mathrm{e}^{2a}$.

【516】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x \quad (a_1>0,a_2>0)$.

提示 分别对 $a_1=a_2$，$a_1<a_2$ 及 $a_1>a_2$ 求极限.

解 $\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(\frac{x+\frac{b_1}{a_1}}{x+\frac{b_2}{a_2}}\right)^x=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right)-\frac{b_2}{a_2}}$.

(1)当 $a_1=a_2=a$ 时，

$$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(1+\frac{1}{\frac{x+\frac{b_2}{a}}{\frac{b_1-b_2}{a}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a}}{\frac{b_1-b_2}{a}}\left(\frac{b_1-b_2}{a}\right)-\frac{b_2}{a}}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\mathrm{e}^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$.

(2)当 $a_1<a_2$ 时，$0<\frac{a_1}{a_2}<1$，于是，$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\to 0 \quad (x\to+\infty)$，

而
$$\left(\frac{x+\frac{b_1}{a_1}}{x+\frac{b_2}{a_2}}\right)^x\to\mathrm{e}^{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}},$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=0$.

(3)当 $a_1>a_2$ 时，$\frac{a_1}{a_2}>1$. 于是，$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\to+\infty$，所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=+\infty$.

【517】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\cos^2 x}=\mathrm{e}$.

【518】 $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x}=\mathrm{e}^{-1}$.

【519】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}}=\mathrm{e}^0=1$.

【520】 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

提示 注意

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\left(1+\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}},$$

仿 515 题,并利用 482 题的结果 ($a\neq k\pi$; $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

解 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$

$=e^{\cot a}$ *) ($a\neq k\pi$; $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

*) 利用 482 题的结果.

【521】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

提示 注意

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}},$$

及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{3}{2}$,并仿 515 题的解法.

解 $\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$.

因为

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}(1+2\cos x)=\frac{1+2\cos x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{3}{2}\quad(x\to 0),$$

所以,$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}$.

【522】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{-2\tan x}{\tan x+1}}=e^{-1}$.

【523】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)^{-\frac{\tan x}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x}\cdot\frac{-\cot x}{2}}=e^0=1$.

【524】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}}\right)^{-\frac{1+\tan x}{2\tan x}\cdot\left(\frac{-2}{1+\tan x}\right)}=e^{-2}$.

【525】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 $\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$.

因为

$$x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2\sin\frac{1}{2x}\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}\cdot 2}\to 1\quad(x\to\infty),$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

【526】 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ *）.

解题思路 将式 $\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ 化为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln[\cos\sqrt{x}-1)+1]}$. 并利用 474 题的结果及 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(\cos\sqrt{x}-1+1)}{\cos\sqrt{x}-1}(\cos\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}\cdot2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}**)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

*） 原题为 $x\to0$，应改为 $x\to+0$.

**） 利用结果 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln\mathrm{e}=1$.

【527】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^{n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{x+1}}\right)^{\frac{n-1}{x+1}\cdot(x+1)+1}=\mathrm{e}^{x+1}$.

【528】 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

提示 $\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}}\cdot\left(\frac{\tan\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}}\right)^2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

【529】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.

【530】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln\mathrm{e}=1$.

【531】 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\quad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{a}{x-a}\cdot\frac{1}{a}}=\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}$.

【532】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

提示 $\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$

及 $\ln(x+1)-\ln x\to0\ (x\to+\infty)$.

解 $\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$.

因为

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\to0\quad(x\to+\infty),$$

所以，$\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\to0$；

又因 $\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}$ 为有界函数，所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=0$.

【533】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{10\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)}{10+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}=\dfrac{1}{5}$.

【534】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)=\lg\dfrac{1}{100}=-2$.

【535】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\ln(2e^{-3x}+1)}{2x+\ln(3e^{-2x}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x}\ln(2e^{-3x}+1)}{2+\dfrac{1}{x}\ln(3e^{-2x}+1)}=\dfrac{3}{2}$.

【536】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}$

$=\dfrac{3}{2}$.

【537】 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$ $(x>0)$.

解 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lg(x^2-h^2)-\lg x^2}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left[-\dfrac{1}{x^2}\lg\left(1-\dfrac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\dfrac{1}{x^2}\lg e$.

【538】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin bx}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{1}{\sin bx}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\dfrac{\sqrt{2}\sin ax}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sqrt{2}\sin ax}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\cdot\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}}=\ln e^{\frac{2a}{b}}=\dfrac{2a}{b}$.

【539】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\cos ax}{\cos ax-1}\cdot\dfrac{\cos bx-1}{\ln\cos bx}\cdot\dfrac{\cos ax-1}{\cos bx-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{2\sin^2\dfrac{bx}{2}}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

【540】$^+$ $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)=\ln1=0$.

【541】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

提示 令 $a^x-1=y$.

解 设 $a^x-1=y$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

【542】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

提示 $\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\cdot\dfrac{\left[a^{x-a}-\left(\dfrac{x}{a}\right)^a\right]}{x-a}=a^a\cdot\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\cdot\dfrac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\dfrac{x}{a}}\cdot\dfrac{a\ln\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)}{x-a}$. 并利用 541 题及 529 题的结果.

解 $$\frac{a^x-x^a}{x-a}=\frac{a^a\left[a^{x-a}-\left(\dfrac{x}{a}\right)^a\right]}{x-a}=a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\,\frac{\left(\dfrac{x}{a}\right)^a-1}{x-a}$$

$$=a^a\,\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\,\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\dfrac{x}{a}}\cdot\frac{a\ln\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)}{x-a},$$

当 $x\to a$ 时,等式第一项趋向 $a^a\ln a$,而第二项趋向 $a^a\cdot1\cdot1=a^a$,所以,

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

【543】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

解 $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\dfrac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\dfrac{x\ln x-a\ln a}{x-a}$.

而当 $x\to a$ 时,

$$\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\frac{x\ln x-x\ln a}{x-a}+\ln a=\frac{x}{a}\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)}{\dfrac{x-a}{a}}+\ln a\to1+\ln a=\ln ea.$$

又 $\dfrac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\to1$ $(x\to a)$,所以,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln ea$.

【544】 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}\cdot e^{-x}}=e\cdot e=e^2$.

【545】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\dfrac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1+x\cdot3^x}{x(2^x-3^x)}}\right)^{\frac{1+x\cdot3^x}{x(2^x-3^x)}\cdot\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot3^x)}}$.

因为

$$\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot3^x)}=\frac{1}{1+x\cdot3^x}\cdot\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)\to\ln2-\ln3^{*)}=\ln\frac{2}{3}\quad(x\to0),$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$.

*）利用 541 题的结果.

【546】 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2.$$

【547】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\beta x}[e^{(\alpha-\beta)x}-1]}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}\cdot\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}\cdot\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x}=\ln e^{*)}=1.$$

*）利用 541 题的结果.

【548】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

解 $$\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1}=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1}{\alpha\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{\beta\ln\frac{x}{a}}{e^{\beta\ln\frac{x}{a}}-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

当 $x\to a$ 时，$\ln\dfrac{x}{a}\to0$，于是上式趋向 $\dfrac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$，即

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}\quad(\beta\neq0).$$

【549】 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

提示 $\dfrac{a^x-a^b}{x-b}=a^b\cdot\dfrac{a^{x-b}-1}{x-b}$.

解 $$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=\lim_{x\to b}\left(a^b\cdot\frac{a^{x-b}-1}{x-b}\right)=a^b\ln a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

【550】 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

提示 $\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=a^{x-h}\left(\dfrac{a^h-1}{h}\right)^2$.

解 $$\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=\lim_{h\to0}\left(a^x\cdot\frac{a^h+a^{-h}-2}{h^2}\right)=\lim_{h\to0}\frac{a^x}{a^h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2=a^x\ln^2a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

【551】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}[2(a+b)]+(a+b)}}$$

$$=\frac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}.$$

【552】 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$.

提示 利用 541 题的结果.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}=\ln x^{*)}$.

*) 利用 541 题的结果.

【553】 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\quad(x>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n+1}}\left[x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\dfrac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}\right]$$

$=\ln x$.

【554】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}}\right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}\ln b}=\sqrt[a]{b}$.

【555】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\quad(a>0,\ b>0)$.

提示 注意 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\left[1+\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\right)\cdot n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}$，及

$$n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\left[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)\right],$$

仿 515 题，并利用 552 题的结果.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)^{*)}}=\sqrt{ab}$

$(a>0,\ b>0)$.

*) 利用 552 题的结果.

【556】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

提示 仿 555 题，并利用 541 题的结果.

解 利用 555 题的方法：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}=\sqrt[3]{abc}.$$

【557】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

解 利用 541 题的结果，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)}=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left(a\cdot\frac{a^x-1}{x}+b\cdot\frac{b^x-1}{x}+c\cdot\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$=\ln(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$,

因而，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1}\right)\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)}$$

$$=(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

【558】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a>0,\ b>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}\right)^{\frac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}\cdot\left[x\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right]\cdot\frac{1}{a^x+b^x}}$

$$=e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

【559】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}\quad (a>0,\ b>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{a^{x^2}-1}{x^2}-\dfrac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}\right)^2}\right]$

$$=(\ln a-\ln b)\cdot\frac{1}{(\ln a-\ln b)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

【560】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad (a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim\limits_{x\to a}\left(a^{x^a}\cdot\dfrac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}\right)=a^{a^a}\ln a.$

【561】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}\right]=1\cdot 1\cdot 0^{*)}=0.$

*) 利用 529 题的结果.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 3+\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+2^{-x})}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}.$

【562】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{3}{x}}\cdot\dfrac{x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)}{\dfrac{x}{3}}\right]=3\ln 2=\ln 8.$

【563】 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\lg_x 2.$

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\lg_x 2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln x}\cdot\ln 2=-\ln 2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}=-\ln 2.$ *)

*) 利用 529 题的结果.

【564】 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad (a>0,\ n>0).$$

证明思路 注意到当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使得 $k\leqslant x<k+1$. 于是，当 $n>0$ 时，有 $\dfrac{k^n}{a^{k+1}}<\dfrac{x^n}{a^x}<\dfrac{(k+1)^n}{a^k}$，利用 60 题的结果.

证 当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使

$$k\leqslant x<k+1.$$

于是当 $n>0$ 时，我们有

$$\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k} \quad 及 \quad \frac{x^n}{a^x}>\frac{k^n}{a^{k+1}}=\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}.$$

因为当 $x\to+\infty$时,$k\to+\infty$,所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^{k+1}}\cdot a=0\cdot a^{*)}=0$$

及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^{k+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}=0\cdot\frac{1}{a}^{*)}=0.$$

于是,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【565】 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0 \quad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

证明思路 令 $y=\log_a x$,则 $x=a^y$,且当 $x\to+\infty$时,$y\to+\infty$. 由$\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}=\left(\dfrac{y^{\frac{1}{\varepsilon}}}{a^y}\right)^\varepsilon$,并利用 564 题的结果,命题即获证.

证 设 $\log_a x=y$,则 $x=a^y$,且当 $x\to+\infty$时,$y\to+\infty$. 于是,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(a^y)^\varepsilon}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y^{\frac{1}{\varepsilon}}}{a^y}\right)^\varepsilon=0^{*)},$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0.$$

*) 利用 564 题的结果.

求下列极限:

【566】 (1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

解 (1)$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim_{x\to0}\frac{x+\ln(1+x^2e^{-x})}{2x+\ln(1+x^4e^{-2x})}=\lim_{x\to0}\frac{1+\dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x^2e^{-x}}\cdot xe^{-x}}{2+\dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x^4e^{-2x}}\cdot x^3e^{-2x}}=\frac{1}{2};$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x}}{2+\dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x}}=\frac{1}{2},$$

其中利用了结果 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^na^{-x}=0 \quad (n>0,\ a>1)$,因而,

$$x^2e^{-x}\to0 \quad 及 \quad x^4e^{-2x}\to0 \quad (x\to+\infty).$$

【567】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}\cdot xe^x}{\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to0}e^x\sqrt{1+x^2}=1.$$

【568】 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{(x+2)^{x+2}\cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2+2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+2}}=\ln\frac{e^2}{e^2}=0.$$

【569】 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]\quad(a>1).$

解 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+0}\ln\left(\dfrac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln x+\ln(\ln a)}$

$$=\lim_{x\to+0}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot 2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}=\ln e^{\ln a^2}=\ln a^2.$$

【570】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}{\ln^2\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left\{\ln\left[1+\dfrac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\right]^{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}}}\right\}\cdot\dfrac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}}{\ln^2\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]\left(\dfrac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{2(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}{2\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{8}.$$

【571】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}(1+\sqrt{1+x\sin x})}=\dfrac{1}{2}.$

【572】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{\dfrac{x(e^x+e^{-x})}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}}\cdot\frac{x^2(e^{4x}-1)}{4x^3e^{2x}}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\right)=-2.$$

【573】 $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)\right]^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)}}\right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1}\cdot\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}}=e^2.$$

【574】 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

解 $$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}[1+(-x+1)]^{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin\frac{\pi(x-1)}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

【575】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$　$(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{\sqrt{(1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x})(1-e^{\beta\cdot\ln\sin x})}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\ln\sin x}{1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\beta\cdot\ln\sin x}{1-e^{\beta\cdot\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\ln\sin x}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

注 其中 x 在 $\frac{\pi}{2}$ 的附近变化，故 $\sin x>0$.

【576】+ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$　（参见 340 题）.

解题思路 由 $\mathrm{sh}x$ 及 $\mathrm{ch}x$ 的定义，可得

$$\frac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}=\frac{(e^{2x}-1)^2}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]\cdot 4e^{2x}}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2\cdot\left(\frac{3x}{e^{3x}-1}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]}\cdot\frac{2}{9}e^x,$$

利用 541 题及 529 题的结果，即知所求极限为 $\frac{2}{9}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(e^{2x}-1)^2}{4e^{2x}}}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\cdot e^x}{\ln\left[1+\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\right]}\cdot\left(\frac{3x}{e^{3x}-1}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\right]=\frac{2}{9}.$$

【577】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{ch}x}$.

解 $$\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}=2\mathrm{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}.$$

因为

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\to 1\quad(x\to+\infty),$$

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x+e^{-x}}\to 1,$$

所以，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}=2\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

【578】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}[2x+\ln2-\ln(1+e^{2x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln2-\ln(e^{-2x}+1)]=\ln2.$$

【579】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\sin2x}-e^{\sin x})(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{e^{\sin2x}-1}{\sin2x}\cdot\frac{\sin2x}{2x}-\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\right)(e^{2x}+1)}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1}=1.$$

【580】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

解 $$\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=\left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}}{2\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}}\right)^{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\cos\frac{\pi}{n}}},$$

因为

$$n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)=n^2\left[(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}})^2+2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$=n^2\left[(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}})^2+4\sin^2\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}}-1}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2n}}-1}{-\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\to2\pi^2\quad(n\to\infty),$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=e^{\pi^2}$.

【581】 $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

【582】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

【583】 $\lim\limits_{x\to2}\arctan\frac{x-4}{(x-2)^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

【584】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arccot}(-1)=\dfrac{3}{4}\pi$.

【585】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\arctan\dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}}\cdot\dfrac{1}{1+x(x+h)}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}{}^{*)}$.

*） 其中利用了结果：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$.

【586】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\dfrac{2x}{1-x}}\cdot\dfrac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}}\cdot\dfrac{2-x^2}{1-x}\right]=2$.

【587】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\arctan\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\arctan\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\arctan\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}{\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}\cdot\frac{n}{n(x^2+1)+x}\cdot\left(1+\frac{1}{\dfrac{1-\tan\dfrac{x}{2n}}{2\tan\dfrac{x}{2n}}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{x}{2n}}{2\tan\frac{x}{2n}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\cdot\frac{x}{1-\tan\frac{x}{2n}}}\right]=\frac{e^x}{1+x^2}.$$

【588】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\arctan\dfrac{1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\arctan\dfrac{1}{2x+1}}{\dfrac{1}{2x+1}}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

【589】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1^{*)}$.

*） 其中利用了结果：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

【590】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\csc(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\csc(\pi\sqrt{1+n^2})}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{(-1)^n}{n\sin\pi\sqrt{1+n^2}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{-1}{n\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}\cdot\frac{1}{n(\pi\sqrt{1+n^2}-n\pi)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\pi n(n^2+1-n^2)}}=e^{\frac{2}{\pi}}\quad (n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}\to 0).$$

【591】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

提示　令 $y=\frac{1}{x}$,并利用564题的结果.

解　设 $y=\frac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^{100}}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}}=0^{*)}$.

*) 利用564题的结果.

【592】 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

提示　令 $y=\frac{1}{x}$,并利用565题的结果.

解　设 $y=\frac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y}=0^{*)}$.

*) 利用565题的结果.

【593】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$.

【594】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=-1;$$

*) 当 $x\to-\infty$ 时,$x=-\sqrt{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=1$.

*) 当 $x\to+\infty$ 时,$x=\sqrt{x^2}$.

【595】 (1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\arctan\frac{1}{1-x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 1+0}\arctan\frac{1}{1-x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\arctan\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1+0}\arctan\frac{1}{1-x}=-\frac{\pi}{2}$.

【596】 (1) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;　(2) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$;　(2) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

【597】 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\cdot\frac{e^x}{x}\right]=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1$.

【598】 证明：

(1)当 $x\to-\infty$时，$\frac{2x}{1+x}\to2+0$；

(2)当 $x\to+\infty$时，$\frac{2x}{1+x}\to2-0$.

证 (1)当 $x<0$ 时，及当$|x|$充分大以后，$\frac{2x}{1+x}>2$. 于是，当 $x\to-\infty$时，$\frac{2x}{1+x}\to2+0$；

(2)当 $x>0$ 时，$0<\frac{2x}{1+x}<2$. 于是，当 $x\to+\infty$时，$\frac{2x}{1+x}\to2-0$.

【599】 证明：

(1)当 $x\to-0$ 时，$2^x\to1-0$；

(2)当 $x\to+0$ 时，$2^x\to1+0$.

证 (1)当 $x<0$ 时，$0<2^x<1$. 于是，当 $x\to-0$ 时，$2^x\to1-0$；

(2)当 $x>0$ 时，$2^x>1$. 于是，当 $x\to+0$ 时，$2^x\to1+0$.

【600】 设 $f(x)=x+[x^2]$，求 $f(1)$，$f(1-0)$，$f(1+0)$.

解 $f(1)=2$；

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}(x+[x^2])=1+0=1$；

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1+0}(x+[x^2])=1+1=2$.

【601】 设 $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$，求 $f(n)$，$f(n-0)$，$f(n+0)$ $(n=0,\pm1,\cdots)$.

解 $f(n)=0$；

$f(n-0)=\lim\limits_{x\to n-0}\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^{n-1}$；

$f(n+0)=\lim\limits_{x\to n+0}\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^n$.

求：

【602】 $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

解 因为$\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$为有界函数，所以，$\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}=0$.

【603】 $\lim\limits_{x\to0}x[\frac{1}{x}]$.

提示 注意到当 $x\neq0$ 时，有 $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}$.

解 因为

$$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}\quad(x\neq0),$$

当 $x>0$ 时

$$1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant1,$$

当 $x<0$ 时

$$1-x>x[\frac{1}{x}]\geqslant1,$$

于是，$\lim\limits_{x\to0}x[\frac{1}{x}]=1$.

【604】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$.

【605】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+n})]=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\cos[2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]\right\}=1.$

【606】 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x.$

解 先设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，这时，$0\leqslant\sin x\leqslant x$，$0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x$，依次类推. 用数学归纳法，即可证得

$$0\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个}x,$$

这说明$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x$随着 n 的增大而单调减少，于是，由其有界性知极限

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=\mu$$

存在有限，且 $0\leqslant\mu\leqslant1$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=\sin(\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个}x)$$

即 $\sin\mu=\mu$，故 $\mu=0$.

同法可证，当 $\pi<x\leqslant2\pi$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性(周期为 2π)，得知对任一 x 值，均有

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=0.$$

【607】 设$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及$\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$，则由此是否可推出$\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$?

研究例子： $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(p,q\text{ 是互素的整数}),\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

并且 $x\to0$.

解 不一定. 例如，对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(p,q\text{ 是互素的整数}),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则有

$$\lim_{x\to0}\varphi(x)=0(=A)\quad 及\quad \lim_{x\to0}\psi(x)=1,$$

但是，极限$\lim\limits_{x\to0}\psi(\varphi(x))$却不存在. 事实上，当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时，有$\varphi(x_n)=0$，因此 $\psi(\varphi(x_n))=0(n=1,2,\cdots)$；而当 x 以一串有理数列 x_n' 趋近于零时，$\varphi(x_n')\neq0$，因此，$\psi(\varphi(x_n'))=1(n=1,2,\cdots)$.

由此可知，极限$\lim\limits_{x\to0}\psi(\varphi(x))$不存在.

【608】 证明柯西定理：若函数 $f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$，且在每一个有限的区间(a,b)内是有界的，则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$，

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant c>0)$，

假定等式右端的极限都存在.

证 (1)记$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$. 任给 $\varepsilon>0$，必存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是，恰有一个正整数 n(依赖于 x)，满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$，则 $0\leqslant\tau<1$，$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然

$$\begin{aligned}&\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|\\=&\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|\\\leqslant&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|<\frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

由假定，$f(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 X_1，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(0\leqslant\tau<1);$$

另外，显然存在正数 X_2，使当 $x>X_2$ 时，恒有

$$\left|\frac{(X_0+1)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$. 于是，当 $x>X$ 时，必有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$. 故(1)获证.

(2)由假定，$f(x)\geqslant c>0$. 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A'$. 显然 $A'\geqslant0$. 下证 $A'>0$. 事实上，若 $A'=0$，则存在正数 X_0，使当 $x\geqslant X_0$ 时，必 $0<\frac{f(x+1)}{f(x)}<\frac{1}{2}$. 于是，

$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}=\frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)}\cdot\frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)}\cdot\cdots\cdot\frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(X_0+n)=0$，此显然与 $f(x)\geqslant c>0$ 矛盾，因此，有 $A'>0$.

由于 $f(x)\geqslant c>0$ 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内有界，故函数 $\ln f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内也有界，并且

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}=\ln A'.$$

于是，将(1)的结果用于函数 $\ln f(x)$，即知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\ln A'.$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}=e^{\ln A'}=A'$.

证毕.

【609】 证明：若(1)函数 $f(x)$ 定义于区域 $x>a$ 内；(2)在每一个有限的区域 $a<x<b$ 内是有界的；(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ (或 $-\infty$)*)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\quad(\text{或}-\infty).$$

证 只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形，这时要证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$(对于 $-\infty$ 的情形，只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形). 任给 $G>0$. 必存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(X_0+1)$. 仿 608 题(1)的证明，恰有一个正整数 n(依赖于 x)，满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x$

$-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$. 由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$,故 $n>X_0+1>X_0+\tau$. 从而,$2n>x$,即

$$\frac{n}{x}>\frac{1}{2}.$$

又,我们有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x};$$

显然

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]>\frac{1}{n}\cdot 4nG=4G,$$

故

$$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定,$f(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故存在正数 X_1,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(X_0+1),X_1\}$,则当 $x>X$ 时,恒有 $\frac{f(x)}{x}>G$. 由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$,结论误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$. 例如,按下式定义 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}2n, & 2n\leqslant x<2n+1,\\ 0, & 2n+1\leqslant x<2n+2,\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

则显然 $f(x)$ 满足原题的条件(1)和(2)(这时 $a=0$),并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$;但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\neq\infty$(实际 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在,$\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,$\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$).

【610】 证明:若(1)函数 $f(x)$ 定义于区域 $x>a$ 内;(2)在每一个有限的区域 $a<x<b$ 内是有界的;(3)存在着有限的或无穷的(带确定符号的无穷,即 $+\infty$ 和 $-\infty$)*) 极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}$.

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广)若:(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于区域 $x>a$ 内;(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限区域 $a<x<b$ 内有界,并且 $g(x)$ 当 $x>a$ 时满足 $g(x+1)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l\quad(l\text{ 为有限数或为}+\infty\text{或为}-\infty);$$

则必 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

证如下:

先证 l 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$. 存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),使 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \cdot \left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],$$

而

$$\left|\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)>g(X_0+\tau+n-2)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而,

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0(k=1,2,\cdots,n);$$

由此可知

$$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0-\tau)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right] \cdot \left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故必有正数 $X_1>a$ 存在,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}, \quad \left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是,当 $x>X$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, l 为有限数获证.

下设 $l=+\infty$(若 $l=-\infty$,则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l=+\infty$ 的情形). 任给 $G>0$,存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4G.$$

当 $x>X_0+1$ 时,仿前一段之证,有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\sum_{k=1}^{n} \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \cdot \frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}$$

从而,

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>4G \sum_{k=1}^{n} \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right] \cdot \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

根据 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 以及 $f(x)$,$g(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上的有界性,可取正数 $X_1>a$,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}, \quad \left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<G.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是,当 $x>X$ 时,恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2} \cdot 4G-G=G.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题，在一般性定理中取$g(x)=x^{n+1}$. 显然此$g(x)$满足一般性定理的条件，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\cdot\frac{1}{(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)nx^{-1}+\cdots+(n+1)x^{-n+1}+x^{-n}}\right]=\frac{l}{n+1}.$$

由此，根据此一般性定理，即得$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{n+1}$.

证毕.

*） 原题所说的无穷，必须是带确定符号的无穷，即$+\infty$或$-\infty$；参看609题末尾加的注.

注 608题的(1)和609题可直接从上述一般性定理推出. 实际上，只需令$g(x)=x$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

即知.

【611】 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

证 (1)当$x=0$时是显然的；当$x\neq0$时，令$y_n=\dfrac{n}{x}$，由71题的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n\cdot x}=e^x;$$

(2)当$x=0$时是显然的，我们先讨论$x>0$的情形. 由牛顿二项式定理知

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面，当$m>n$时有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

令$m\to\infty$（n保持不变），得

$$e^x\geqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x>0).$$

由于

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由61题知，对固定的x有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$. 于是，对于$x<0$，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})=e^x\quad(x<0).$$

【612】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$.

提示 利用72题中的公式(1).

证 由72题

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{\theta_k}{k!k},$$

其中 $0<\theta_k<1$，因而，

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]}{2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}\cdot 2\pi n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\}=2\pi.$$

作下列函数的图像：

【613】 (1) $y=1-x^{100}$； (2) $y=\lim_{n\to\infty}(1-x^{2n})$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 (1)如图 1.238 所示. 它关于 y 轴对称.

(2) $y=\lim_{n\to\infty}(1-x^{2n})=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1.\end{cases}$

如图 1.239 所示.

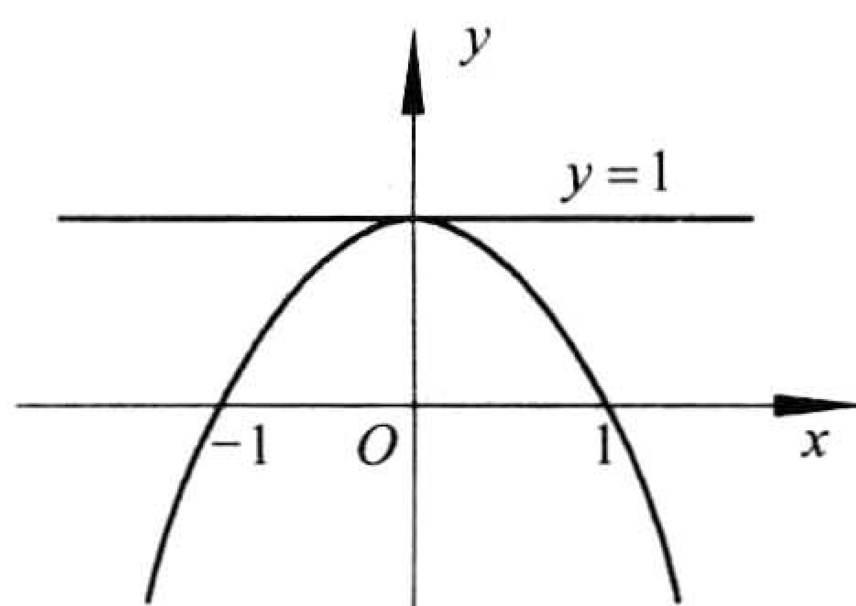


图 1.238

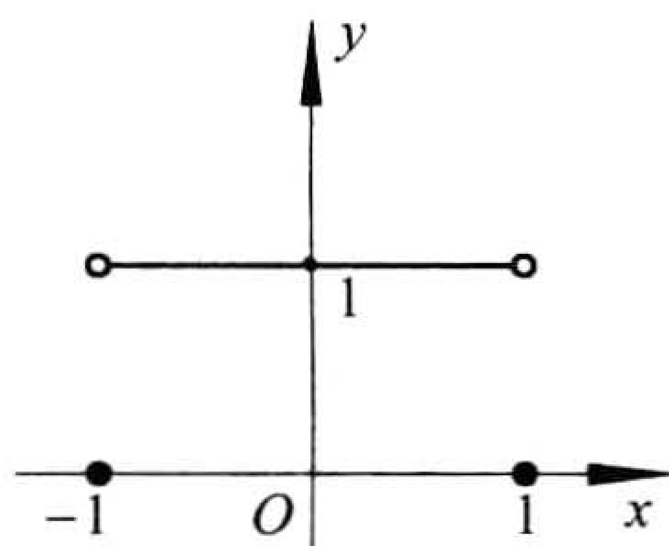


图 1.239

【614】 (1) $y=\frac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x\geqslant 0)$； (2) $y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

解 (1) 如图 1.240 所示.

(2) $y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.241 所示.

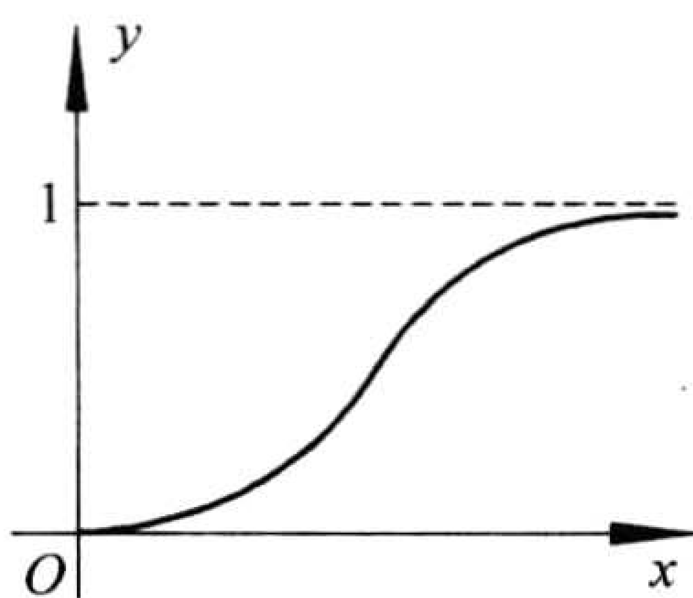


图 1.240

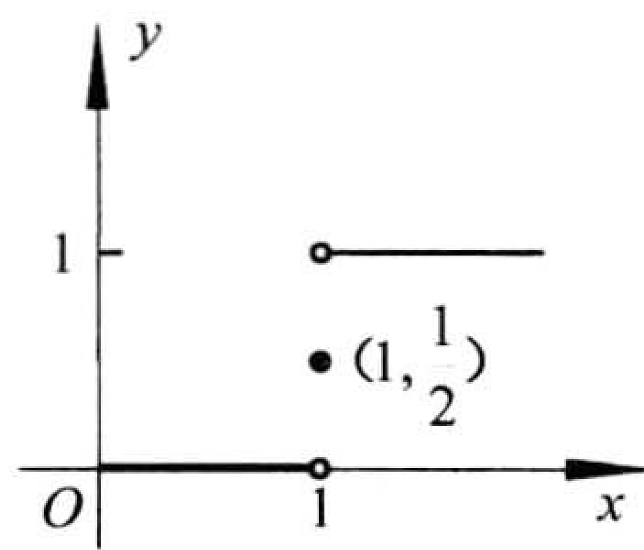


图 1.241

【615】 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\neq 0)$.

解 因为 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，所以，$y=\begin{cases}-1, & |x|<1,\ x\neq 0,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

如图 1.242 所示.

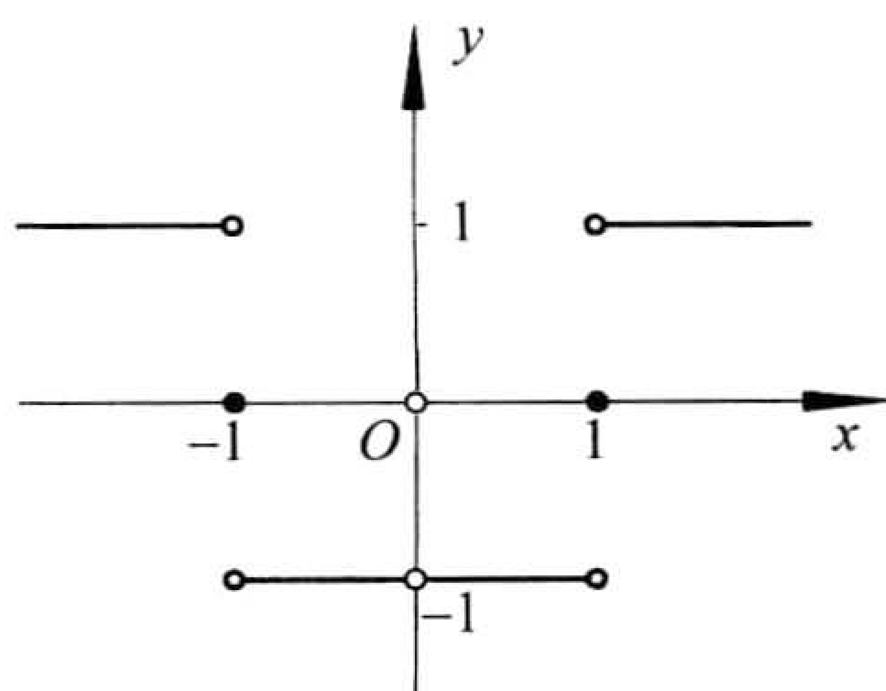


图 1.242

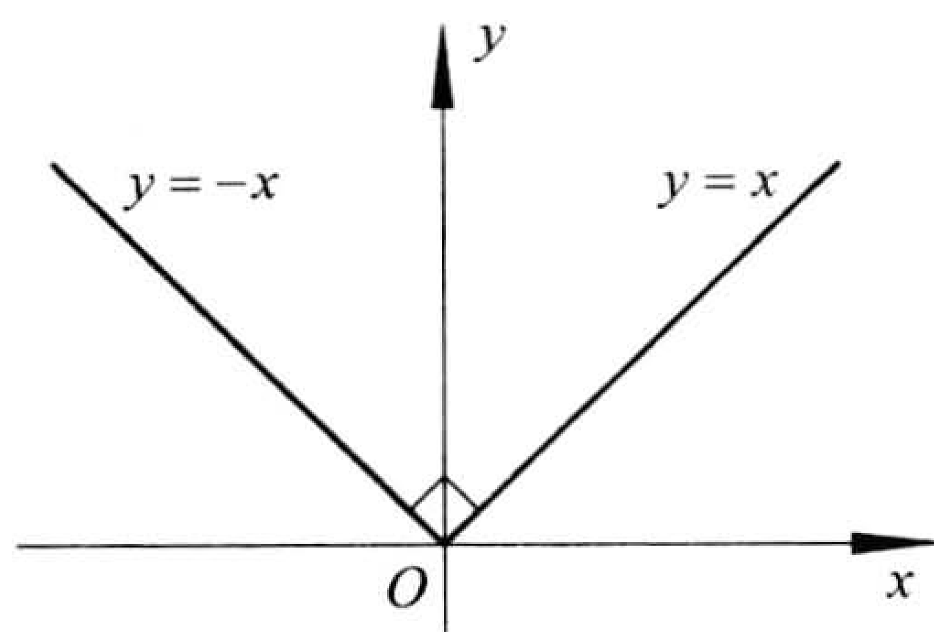


图 1.243

【616】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

解 $y=\sqrt{x^2}=|x|$.

如图 1.243 所示.

【617】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

如图 1.244 所示.

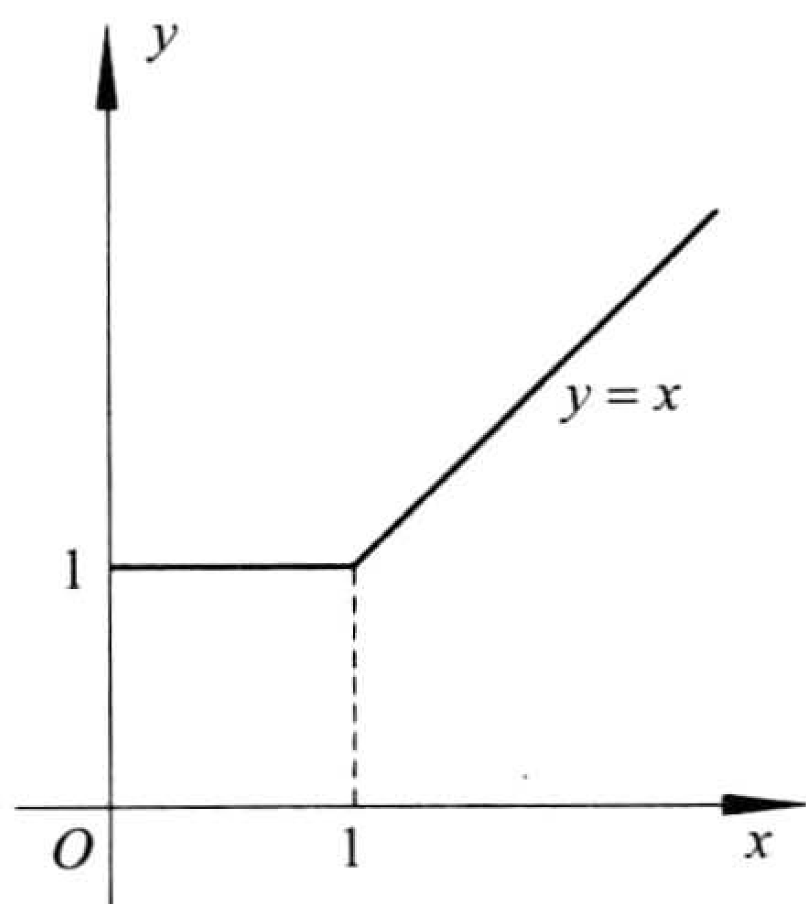


图 1.244

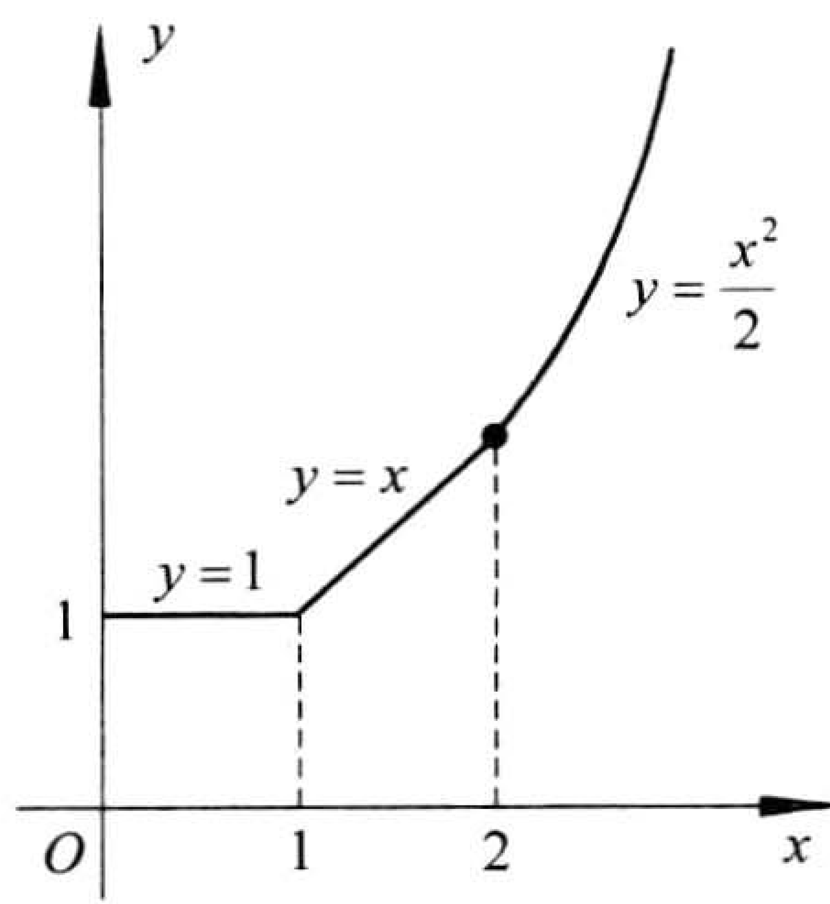


图 1.245

【618】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.245 所示.

【619】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<2,\\ 2\sqrt{2}, & x=2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

如图 1.246 所示.

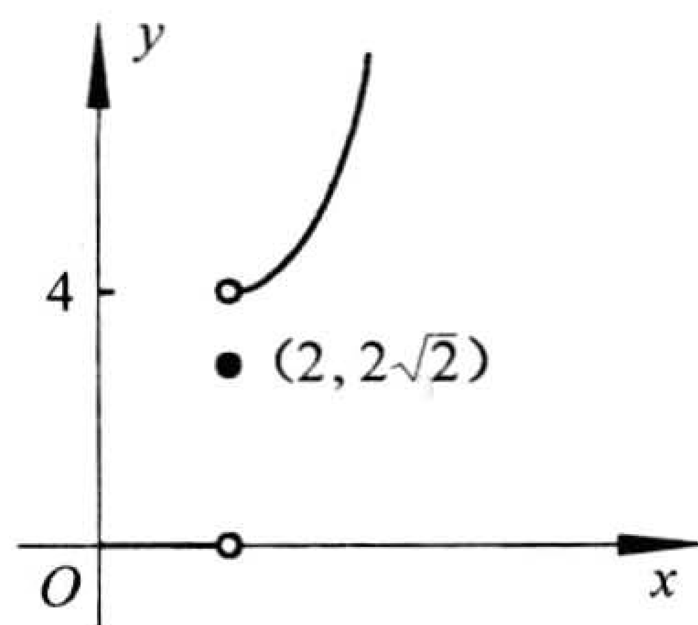


图 1.246

【620】 (1) $y=\sin^{1000}x$;

(2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

解 (1)如图 1.247 所示.其图像始终在 Ox 轴上方.

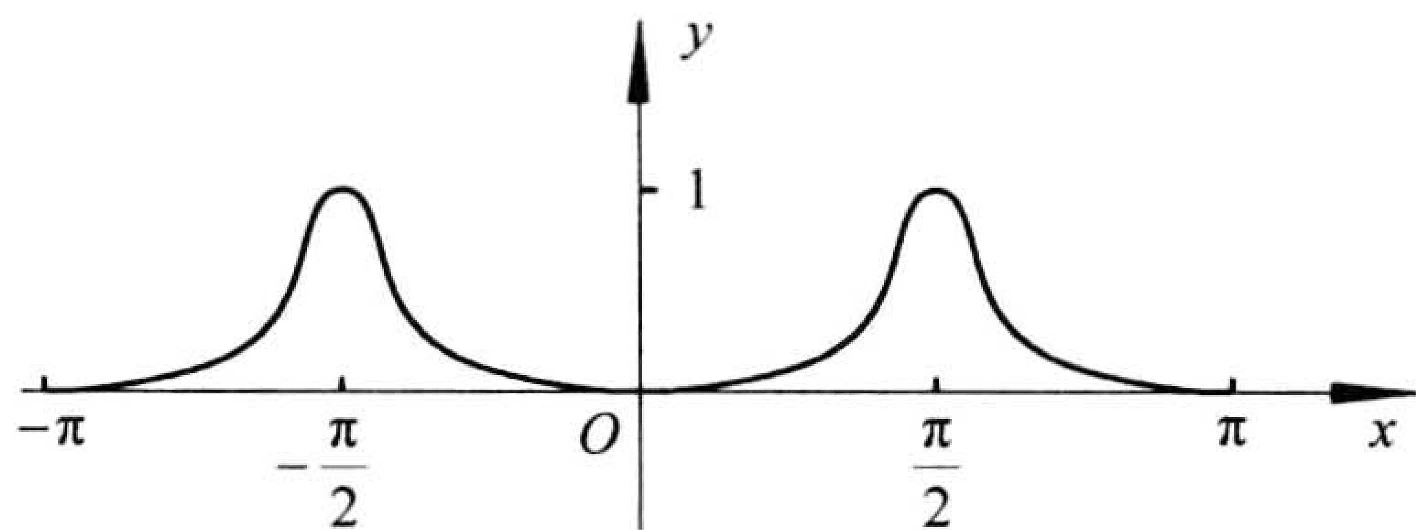


图 1.247

(2) $y=\begin{cases}0, & x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

如图 1.248 所示.

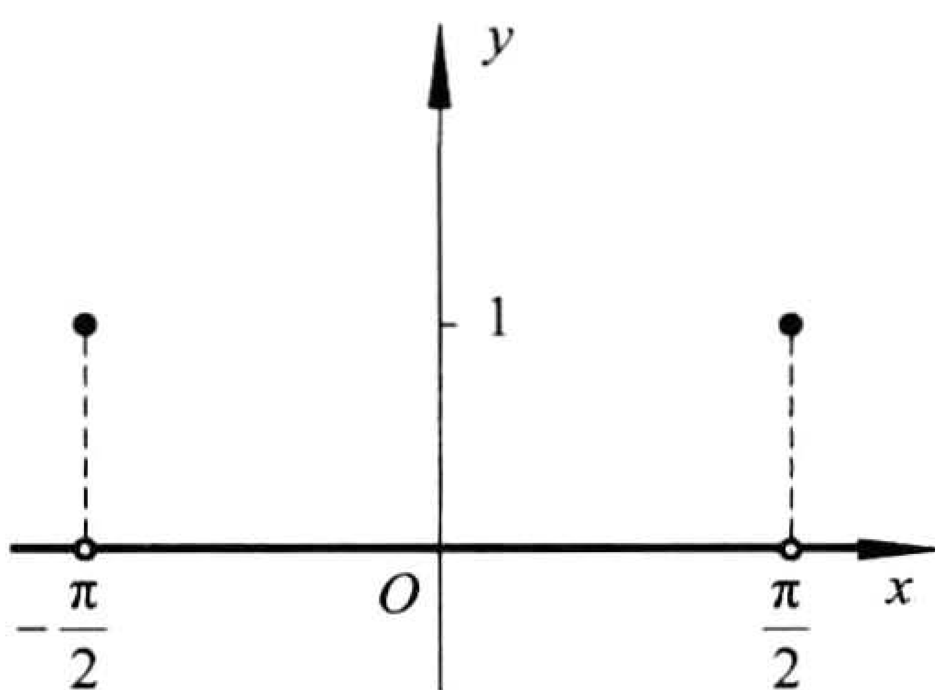


图 1.248

【621】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}\quad(x\geqslant0)$.

解 $y=\begin{cases}\ln2, & 0\leqslant x\leqslant2,\\ \ln x, & 2<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.249 所示.

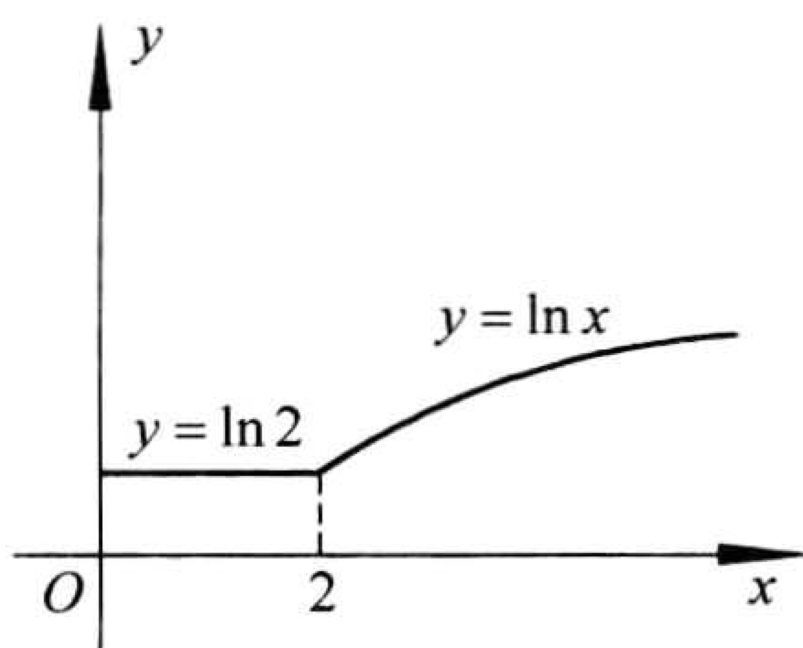


图 1.249

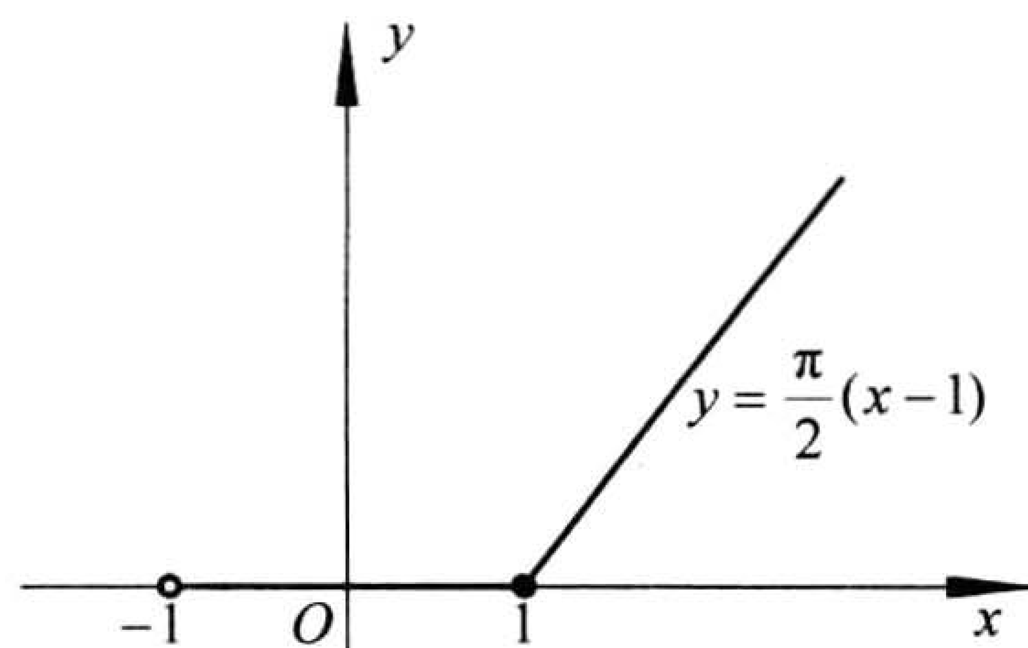


图 1.250

【622】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan x^n$.

解 $y=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant1,\\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), & x>1.\end{cases}$

如图 1.250 所示.

【623】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & x\leqslant-1,\\ e^{x+1} & x>-1.\end{cases}$

如图 1.251 所示.

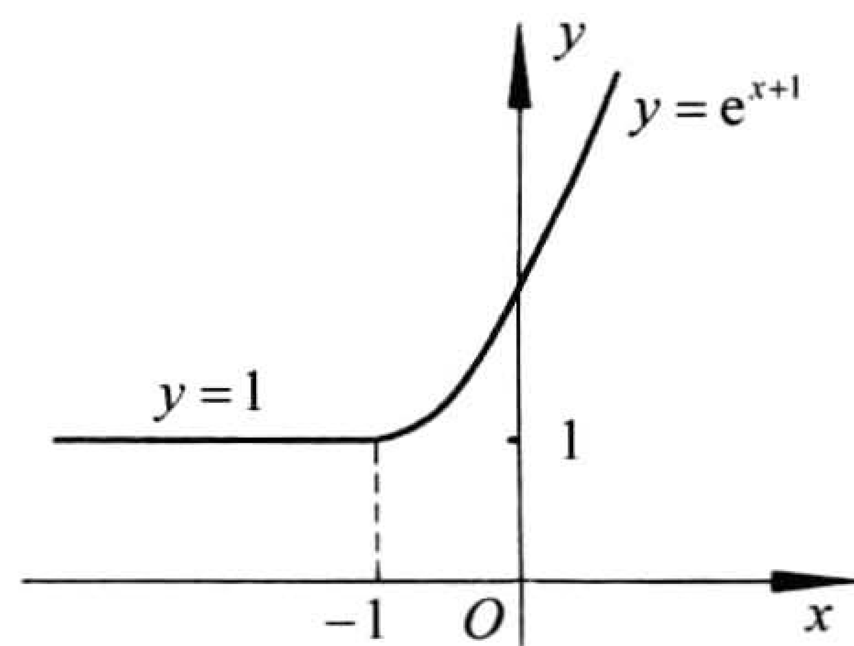


图 1.251

【624】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

解 $y=\begin{cases} x, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

如图 1.252 所示.

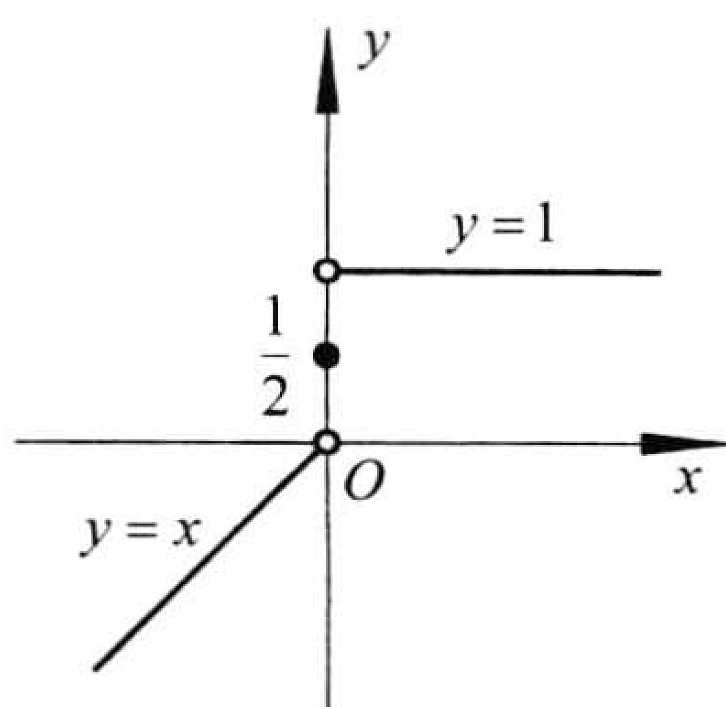


图 1.252

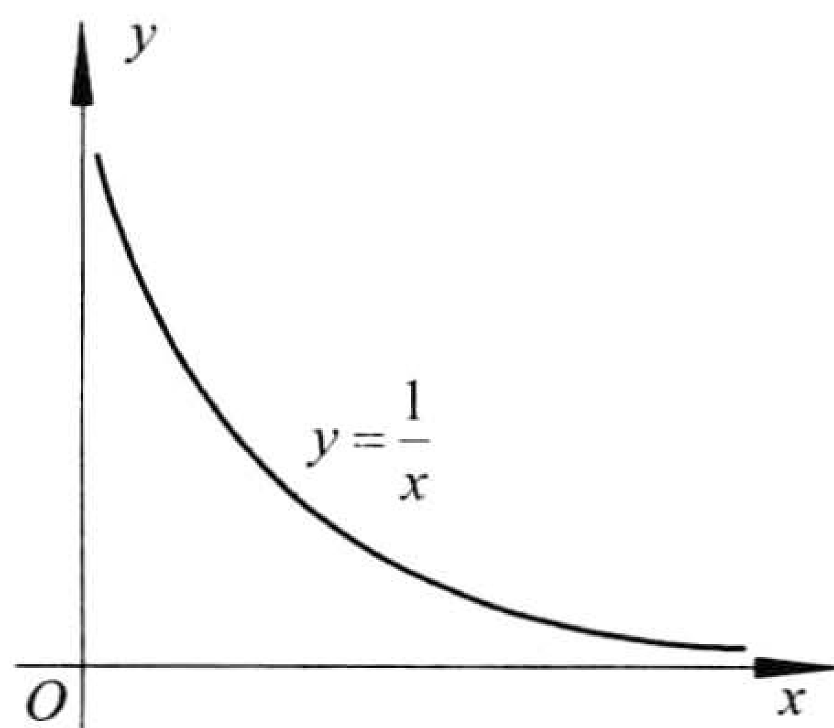


图 1.253

【625】 $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}\quad(x>0)$.

解 $y=\lim\limits_{t\to x}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{t-x}{x}\right)}{\dfrac{t-x}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{x}$.

如图 1.253 所示.

【626】 若有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线.利用这方程推出渐近线存在的充分必要条件.

解题思路 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形.当 $x>0$ 时,由于

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-(kx+b)}{x}+k+\frac{b}{x},$$

利用假设条件即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ 及 } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b.$$

反之,若上式成立,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$.

用类似的方法可讨论 $x\to-\infty$ 的情形,且得同样结论.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0. \tag{1}$$

而在 $x>0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-(kx+b)}{x}+k+\frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{2}$$

又由(1)式得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b, \tag{3}$$

即常数 k,b 可由(2)、(3)式确定.反之,若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,且为有限数 k,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ 存在且有限,等于 b,则(1)式成立,即

$$y=kx+b$$

是一条渐近线.用完全类似的方法可以讨论 $x\to-\infty$ 的情形,且得出同样的结论.

综上所述,所求的渐近线存在的充分必要条件为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ 及 } \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b,$$

此时,$y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线.

【627】 求下列曲线的渐近线并作其图像:

(1) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$; (2) $y=\sqrt{x^2+x}$; (3) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; (4) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$;

(5) $y=\ln(1+\mathrm{e}^x)$；　　(6) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$；　　(7) $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

提示　(1)注意$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$及$\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，并利用626题的结果，即得渐近线：$x=1$，$x=-2$及$y=1$.(2)应就$x\to-\infty$及$x\to+\infty$分别利用626题的结果.(4)仿(2).(5)仿(2).

解　(1) 因为$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$及$\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，所以，直线$x=1$及$x=-2$为曲线的垂直渐近线.其次，因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2+x-2)}=0,$$

而

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1,$$

所以，$y=1$为曲线的水平渐近线.

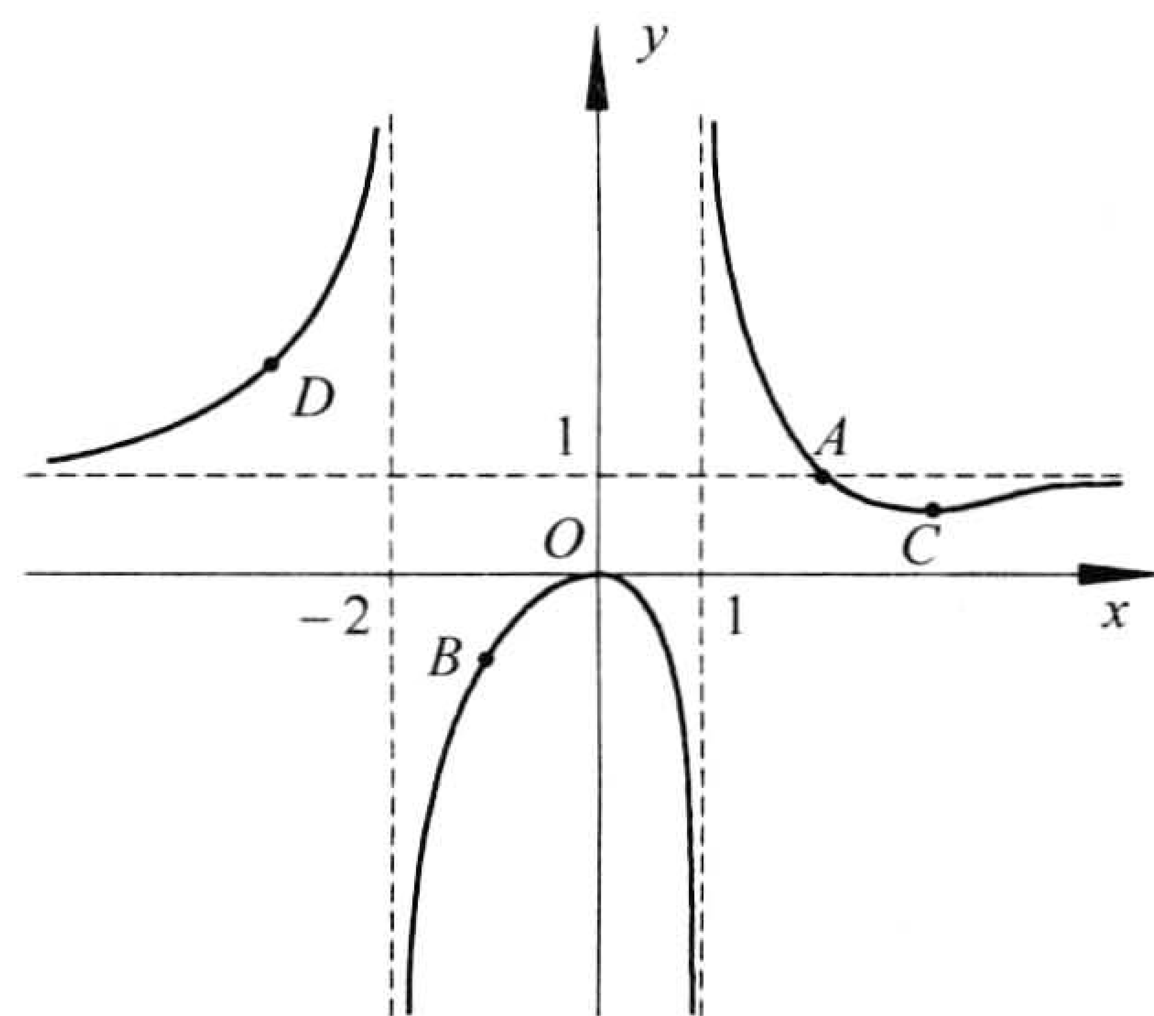


图 1.254

曲线通过原点.

当$-2<x<1$时，$y<0$，故曲线在Ox轴的下方；

当$x>1$或$x<-2$时，$y>0$，故曲线在Ox轴的上方.

适当描若干点：

$$A(2,1),\ B(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}),\ C\left(4,\frac{8}{9}\right),\ D\left(-3,\frac{9}{4}\right),\ \cdots,$$

并用光滑曲线连接，即得图像(图1.254).

(2) $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=1$，$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\dfrac{1}{2}$，

$k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1$，$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=-\dfrac{1}{2}$，

于是，直线$y=x+\dfrac{1}{2}$及$y=-x-\dfrac{1}{2}$为曲线的(斜)渐近线.

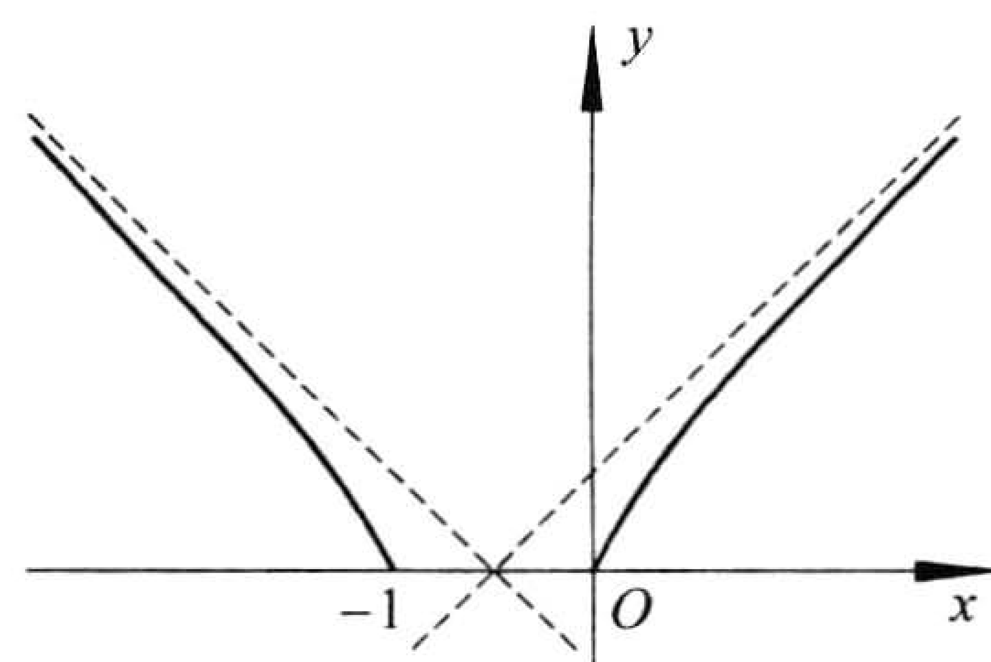


图 1.255

曲线$y=\sqrt{x^2+x}$为双曲线

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,$$

在Ox轴上方的部分.如图1.255所示.

(3) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-1}=-1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{x^2-x^3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

斜渐近线为

$$y=-x+\frac{1}{3}.$$

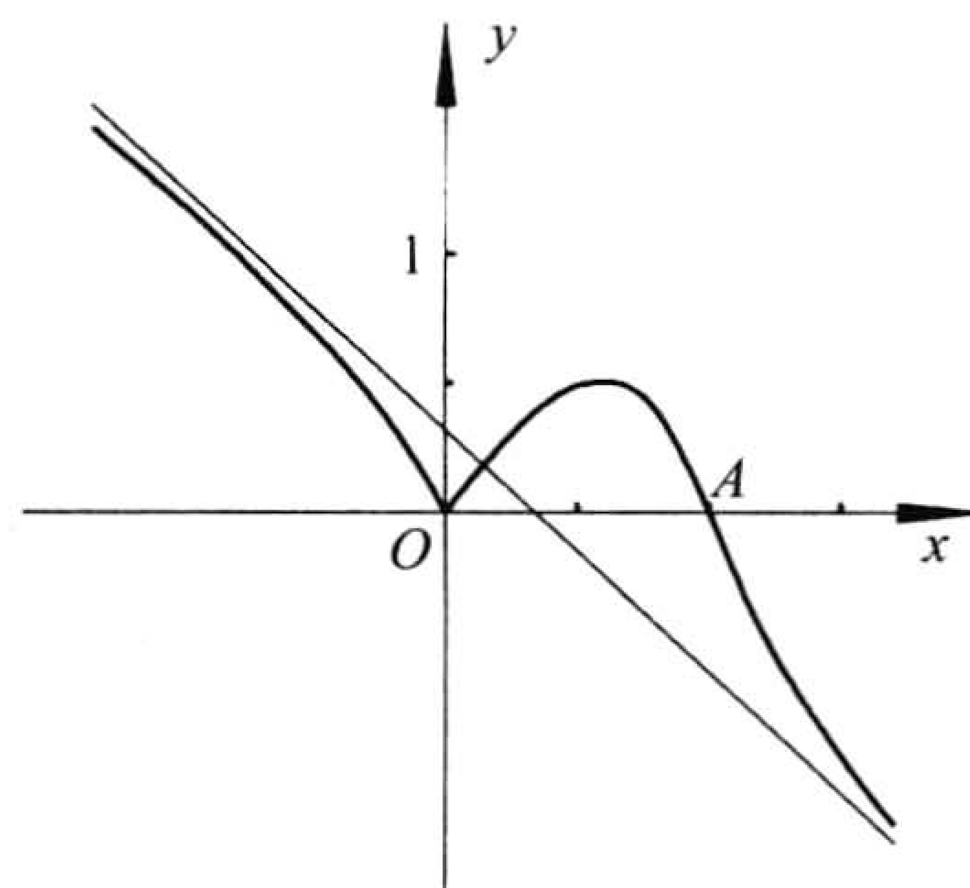


图 1.256

曲线通过原点及点$A(1,0)$.

当$-\infty<x<1$时，$y>0$；而当$x>1$时，$y<0$.

如图1.256所示.

(4) 当$x>0$时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0,$$

故渐近线为 $y=x$；当 $x<0$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=0,\quad b=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0,$$

故另一渐近线为 $y=0$.

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是“可去的间断”).

因为 $y>0$，故图像始终在 Ox 轴的上方.

如图 1.257 所示.

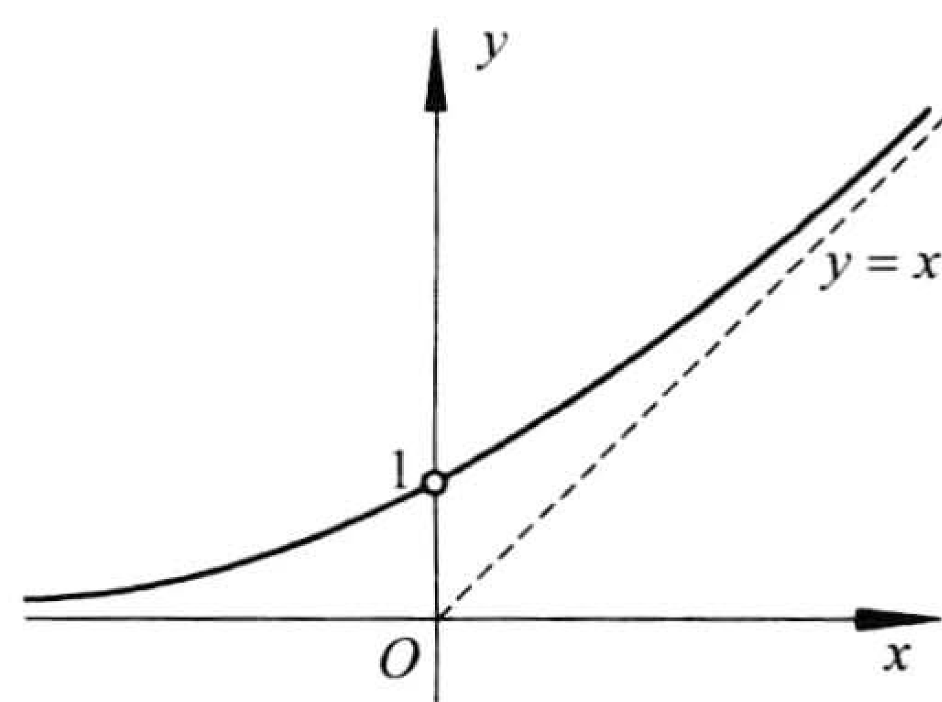


图 1.257

(5) 当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,$$

故渐近线为 $y=x$. 同法可求，当 $x<0$ 时的渐近线为 $y=0$.

曲线通过点 $A(0,\ln 2)$.

如图 1.258 所示.

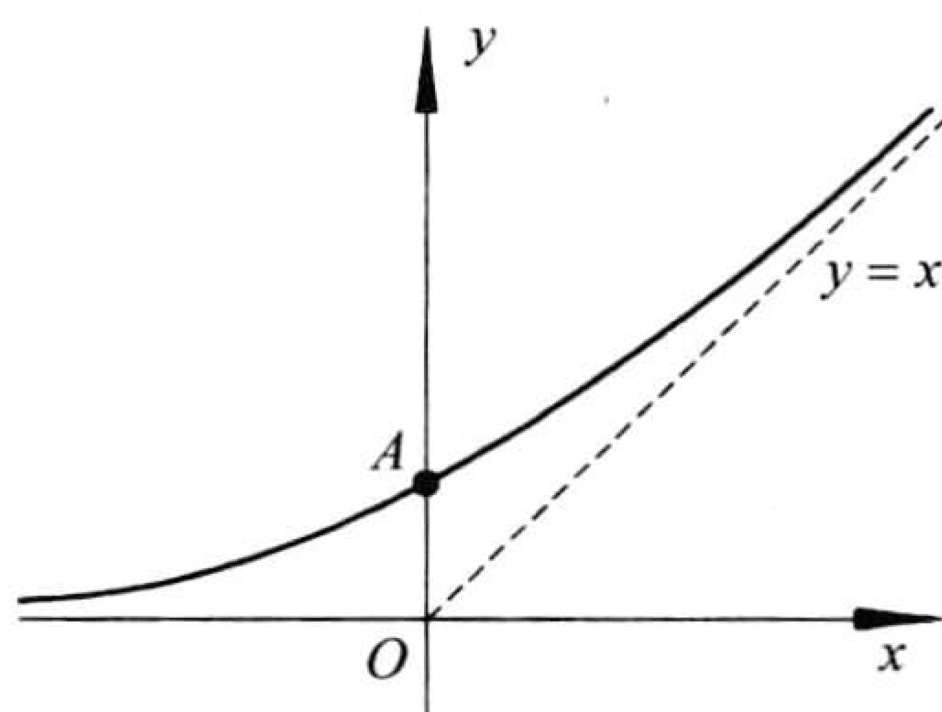


图 1.258

(6) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arccos\dfrac{1}{x}}{x}=1,\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}[(x+\arccos\dfrac{1}{x})-x]=\dfrac{\pi}{2},$

故渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

将函数 $y=x$ 及 $y=\arccos\dfrac{1}{x}$(见 316 题)的图像按相加法即得，如图 1.259 所示.

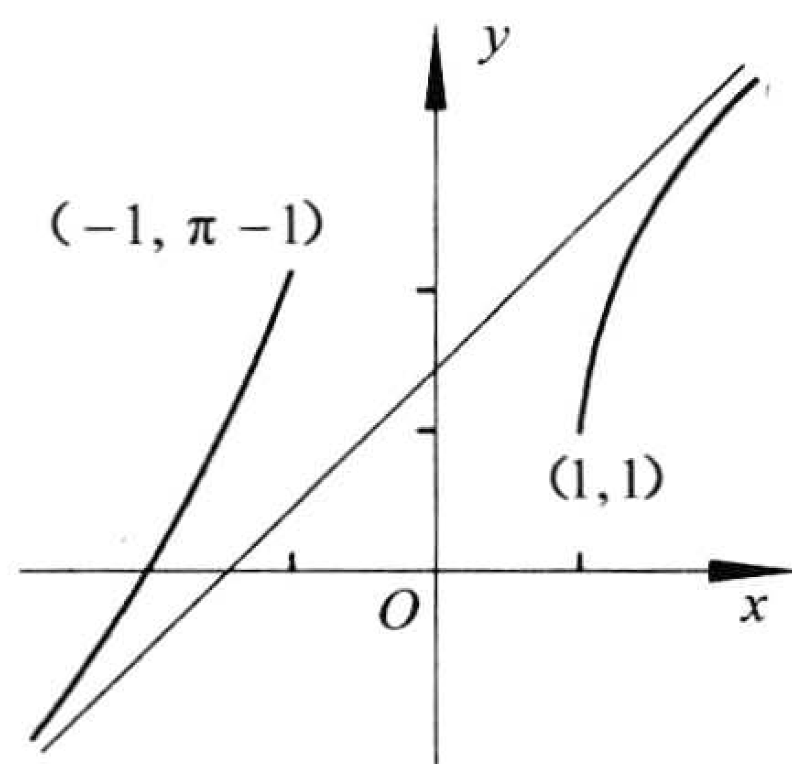


图 1.259

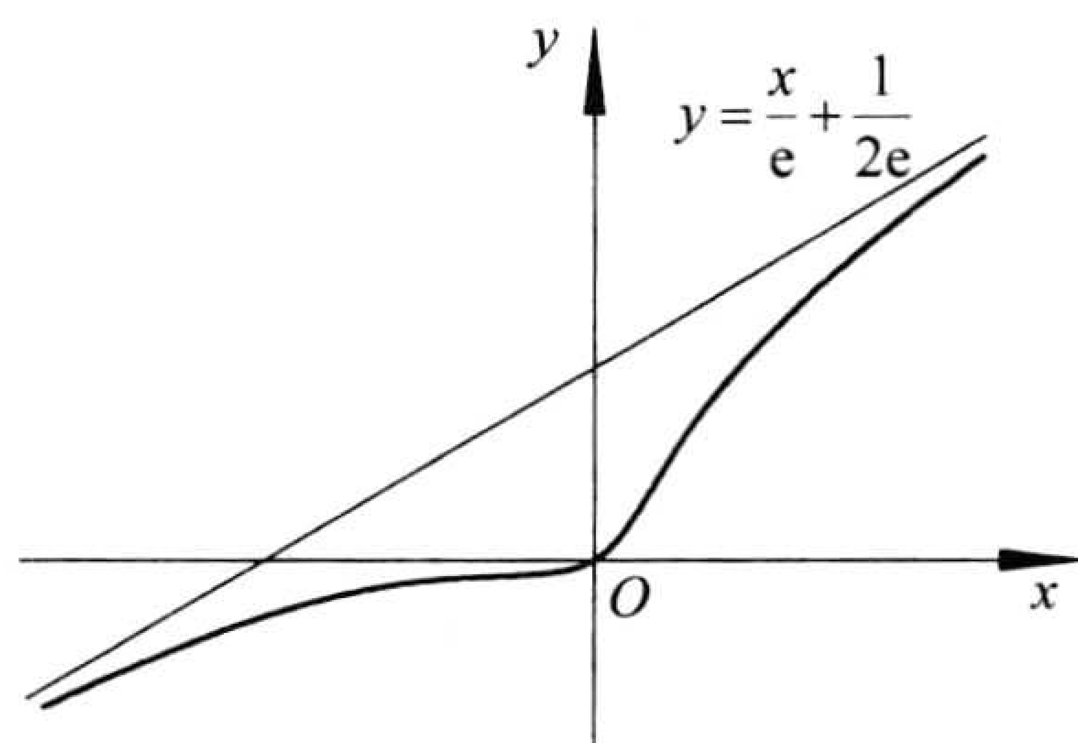


图 1.260

(7) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{e},\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]=\dfrac{1}{2e},$

故渐近线为 $y=\dfrac{x}{e}+\dfrac{1}{2e}$. 曲线通过原点. 如图 1.260 所示.

求下列极限:

【628】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right].$

解题思路 注意到

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}),$$

当 $|x|=1$ 时，不等式右端趋于零. 当 $|x|\neq1$ 时，

$$右端=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

利用 61 题的结果也趋于零.

解 由于

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}).$$

当 $|x|=1$ 时,上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!}\to 0\ (n\to\infty)$;

当 $|x|\neq 1$ 时,此式为

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

由 61 题的结果知:$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$, $\frac{(|x|^2)^n}{n!}\to 0\ (n\to\infty)$, 故当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}\to 0$.

于是,对于任意实数 x,有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0$.

【629】 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$,若 $|x|<1$.

提示 由 $1+x^{2^k}=\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 可得 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.

解 因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\quad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},\quad\cdots\quad 1+x^{2^n}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因 $|x|<1$, 故当 $n\to\infty$ 时, $x^{2^{n+1}}\to 0$. 最后得到

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1}{1-x}.$$

【630】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

提示 由 $\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}=\cdots=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$,

可得 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\ (x\neq 0)$. 当 $x=0$ 时,显见原式为 1.

解 因为

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}=\cdots=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}\quad(x\neq 0).$$

当 $x=0$ 时,原式显然为 1.

【631】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$,其中 $\psi(x)>0$,再设 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0\ (m=1,2,\cdots,n)$,换言之,对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 再假定 $\alpha_{mn}\neq 0$. *)

证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})],\tag{1}$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1\right|<\varepsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x)>0$),

$$(1-\varepsilon)\psi(x)<\varphi(x)<(1+\varepsilon)\psi(x). \tag{2}$$

由 $\alpha_{mn}\neq 0$ 以及 $\alpha_{mn}\Rightarrow 0\ (m=1,2,\cdots,n)$知,必有正整数 $N=N(\varepsilon)$存在,使当 $n>N$ 时,恒有

$$0<|\alpha_{mn}|<\delta\quad (m=1,2,\cdots,n).$$

于是,

$$(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})<\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})\quad (n>N,m=1,2,\cdots,n).$$

将这 n 个不等式相加,得

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})<\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\quad (n>N).$$

即

$$1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon\quad (n>N).$$

由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1$. 由假定,极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$存在,故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

*) 作者注:此题应加上条件 $\alpha_{mn}\neq 0$(原书没有),因为 $\varphi(x)$或$\psi(x)$都可能在 $x=0$ 处无定义. 另外, $m=1,2,\cdots$ 应改为 $m=1,2,\cdots,n$.

利用上述定理,求:

【632】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

解题思路 令 $x=\frac{k}{n^2}$,$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$,$\psi(x)=\frac{x}{3}$. 先求出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$,其次,说明$\frac{k}{n^2}\Rightarrow 0\ (n\to\infty;k=1,2,\cdots,n)$. 最后,求出$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}$. 利用 631 题的结果,即知所求的极限也是$\frac{1}{6}$.

下列各题(633~636)的思路相同.

解 设 $x=\frac{k}{n^2}$,我们将首先说明它满足 631 题的条件. 首先,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=1,$$

其次, $\frac{k}{n^2}\Rightarrow 0\quad (n\to\infty;\ k=1,2,\cdots,n)$. 最后, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}$. 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{6}.$$

【633】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$,而且当 $n\to\infty$时,$\frac{ka}{n^2}\Rightarrow 0\ (k=1,2,\cdots,n)$.

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{ka}{n^2}=\dfrac{a}{2}$，故利用631题的结果，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\dfrac{ka}{n^2}\right)=\dfrac{a}{2}$.

【634】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)\quad(a>0)$.

解 我们有$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}\right)=1$，当$n\to\infty$时，$\dfrac{k}{n^2}\cdot\ln a\Rightarrow0\ (k=1,2,\cdots,n)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln a=\dfrac{1}{2}\ln a$；因而，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{2}\ln a.$$

【635】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

提示 令$y=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$，则有$\ln y=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$. 利用631题的结果，先求出$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

解 设 $y=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$，$\ln y=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

我们考虑下列极限，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，又$\dfrac{k}{n^2}\Rightarrow0(n\to\infty$时$,k=1,2,\cdots,n)$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y=\dfrac{1}{2}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

【636】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

提示 令$y=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$，当$n$充分大时，$\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}>0$，此时

$$\ln y=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\tan^2\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right),$$

以下仿632题，只需注意$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\tan^2x)}{x^2}=1$.

解 设$y=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$，当$n$充分大时，$\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}>0$，此时

$$\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\tan^2\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right).$$

因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\tan^2x)}{x^2}=1$，又$\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}\Rightarrow0(n\to\infty$时$,k=1,2,\cdots,n)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3}=\frac{a^2}{3},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y=-\dfrac{a^2}{6}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{6}}$.

【637】 数列x_n由以下的等式所给定：

$$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots\quad(a>0).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明思路 显然可知此数列单调上升：$\sqrt{a}<x_{n-1}<x_n$，又由$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$可得$x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\dfrac{a}{x_n}+1<\sqrt{a}+1$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 在等式$x_n^2=a+x_{n-1}$两端令$n\to\infty$取极限，即可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

解 首先,我们注意到此数列显然是单调上升的. 其次,由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$,得 $x_n^2=a+x_{n-1}$,即

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}. \tag{1}$$

因为$\sqrt{a}<x_{n-1}<x_n$,即在(1)式右端第二项小于1,所以,

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1. \tag{2}$$

又显然有

$$x_n>\sqrt{a}\quad (n=2,3,\cdots) \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式右端,即得 $x_n<\sqrt{a}+1$,故数列$\{x_n\}$是有界的.

根据极限存在的准则可知,数列$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设其值为 l.

利用等式 $x_n^2=a+x_{n-1}$,两端取极限,得 $l^2=a+l$,解之,得

$$l=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}\quad (a>0),$$

负根不适合(因为 $x_n>0$),只取其正根,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

【638】 函数序列 $y_n=y_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$用以下的方法来确定:$y_1=\frac{x}{2}$, $y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$.求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 当 $x=0$ 时, $y_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时,用数学归纳法可证 $y_n>0$, $n=1,2,\cdots$:$y_1>0$. 若 $y_k>0$,由 $x>y_{k-1}^2$,可得

$$y_{k+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}=\frac{4x-(x-y_{k-1}^2)^2}{8}\geqslant\frac{3x}{8}>0.$$

因而有

$$y_1-y_3=\frac{y_2^2}{2}>0,\quad y_2-y_4=\frac{y_3^2-y_1^2}{2}<0,\quad \cdots$$

用数学归纳法可证

$$y_{2n}-y_{2n+2}<0,\quad y_{2n-1}-y_{2n+1}>0\quad (n=1,2,\cdots).$$

即

$$\frac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>0,\quad 0<y_2<y_4<\cdots<\frac{x}{2}.$$

可见序列 $y_1,y_3,\cdots$及序列 $y_2,y_4,\cdots$都是收敛的. 设极限分别为 A_1,A_2,由

$$y_{2n}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n-1}^2}{2}\quad 及\quad y_{2n+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得$A_2=\frac{x}{2}-\frac{A_1^2}{2}$, $A_1=\frac{x}{2}-\frac{A_2^2}{2}$,相减得 $A_1-A_2=(A_1-A_2)\frac{(A_1+A_2)}{2}$. 而$0\leqslant A_1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$, $0\leqslant A_2\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$, 故

$$A_1=A_2=A.$$

用极限定义直接可以证明:若$\{y_n\}$的两个子序列$\{y_{2n}\}$及$\{y_{2n-1}\}$$(n=1,2,\cdots)$收敛于同一个极限,则$\{y_n\}$也收敛于这个极限,由 $A=\frac{x}{2}-\frac{A^2}{2}$解得 $A=\sqrt{1+x}-1$,即$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{1+x}-1$.

此结果对 $x=0$ 也成立.

【639】 函数序列 $y_n=y_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$用下面的方法来确定:$y_1=\frac{x}{2}$, $y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$.求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 显然，$y_2>y_1$. 假设 $y_n\geqslant y_{n-1}$，则由 $y_{n+1}-y_n=\frac{y_n^2-y_{n-1}^2}{2}$ 可推出 $y_{n+1}\geqslant y_n$.

由数学归纳法得知，序列 $\{y_n\}$ 单调上升.

现在我们证明这个序列有界. 显然

$$0\leqslant y_1<1.$$

设 $0\leqslant y_k<1$，则 $0\leqslant y_k^2<1$，且 $0\leqslant y_{k+1}<1$. 由数学归纳法便得知序列 $\{y_n\}$ 有界.

这样，我们就证明了此序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在. 设其值为 l（显然 $0\leqslant l\leqslant 1$），即得 $l=\frac{x}{2}+\frac{l^2}{2}$，解之，得 $l=1\pm\sqrt{1-x}$. 由于 $0\leqslant l\leqslant 1$，故必

$$\lim_{n\to\infty}y_n=l=1-\sqrt{1-x}.$$

【640】 为了求开普勒方程（Уравнение Кеплера）

$$x-\varepsilon\sin x=m \quad (0<\varepsilon<1) \tag{1}$$

的近似解，假设

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \cdots,\ x_n=m+\varepsilon\sin_{n-1},\ \cdots \quad \textbf{（逐步逼近法）}.$$

证明：存在 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，且数 ξ 为方程(1)的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_m-x_n|$. 由于

$$x_2-x_1=\varepsilon(\sin x_1-\sin x_0)=2\varepsilon\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2},$$

所以，

$$|x_2-x_1|\leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1-x_0}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}=\varepsilon|x_1-x_0|.$$

同理可证

$$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|.$$

设

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|,$$

则有

$$|x_{n+1}-x_n|=2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\leqslant\varepsilon|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^n|x_1-x_0|.$$

由数学归纳法得知，对于任意的正整数 n，均有 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|$. 于是，当 $m>n$ 时，有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant(\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^{m-2}+\cdots+\varepsilon^n)|x_1-x_0|\\&=\varepsilon^n\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}\cdot|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

而 $|x_1-x_0|=\varepsilon|\sin x_0|\leqslant\varepsilon$，所以，$|x_m-x_n|\leqslant\varepsilon^{n+1}\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}<\frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}$. 由此知 $|x_m-x_n|\to 0\ (n\to\infty)$. 按柯西准则得知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设其值为 ξ，由等式 $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ 取极限即得 $\xi=m+\varepsilon\sin\xi$. 这就是说，变量 x_n 的极限 ξ 是方程(1)的根.

最后，证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根，则 $\xi_1-\xi=\varepsilon(\sin\xi_1-\sin\xi)$，由此得

$$|\xi_1-\xi|\leqslant\varepsilon|\xi_1-\xi|.$$

因为 $0<\varepsilon<1$，故 $\xi_1=\xi$.

于是，我们就证明了 ξ 是方程(1)的唯一的根.

【641】 若 $\omega_k(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x-\xi|\leqslant k\ (k>0)$ 上的振幅，则数 $\omega_0(f)=\lim\limits_{k\to 0}\omega_k(f)$ 称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的振幅：

(1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$；　　(3) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$；

(4) $f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$；　　(5) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$；　　(6) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；

(7) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

解　(1)$\omega_k(f)=2$，$\omega_0(f)=2$；

(2)$\omega_k(f)=+\infty$，$\omega_0(f)=+\infty$；

(3)$\omega_k(f)=3k-k=2k$，$\omega_0(f)=0$；

(4)$\omega_k(f)=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{(-k)}\right]=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{k}$，$\omega_0(f)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$；

(5)$\omega_k(f)=2$，$\omega_0(f)=2$；

(6)$\omega_k(f)=\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}}-\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}}\right|$，$\omega_0(f)=1$；

(7)$\omega_k(f)=(1+k)^{\frac{1}{k}}-(1+k)^{-\frac{1}{k}}$，$\omega_0(f)=e-e^{-1}=2\text{sh}1$.

【642】　命　$f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

证明：对于满足条件$-1\leqslant\alpha\leqslant1$的任何数$\alpha$，可以选出数列$x_n\to0(n=1,2,\cdots)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$.

证　对于确定的α：$|\alpha|\leqslant1$，总存在$x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，使$\sin x_0=\alpha$.

令$x_n=\frac{1}{2n\pi+x_0}$，则显然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 又因

$$f(x_n)=\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2n\pi+x_0)=\alpha,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$.

【643】　设：

(1) $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$；　(2) $f(x)=(2-x^2)\cos\frac{1}{x}$；　(3) $f(x)=\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

求　$l=\varliminf\limits_{x\to0}f(x)$　和　$L=\varlimsup\limits_{x\to0}f(x)$.

解　由l及L的定义，容易求得

(1) $l=-1$，$L=2$；　(2) $l=-2$，$L=2$；　(3) $l=2$，$L=e$.

【644】　设：

(1) $f(x)=\sin x$；　(2) $f(x)=x^2\cos^2x$；　(3) $f(x)=2^{\sin x^2}$；　(4) $f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2x}$ $(x\geqslant0)$.

求$l=\varliminf\limits_{x\to\infty}f(x)$和$L=\varlimsup\limits_{x\to\infty}f(x)$.

解　由l及L的定义，容易求得

(1) $l=-1$，$L=1$；　(2) $l=0$，$L=+\infty$；　(3) $l=\frac{1}{2}$，$L=2$；　(4) $l=0$，$L=+\infty$.

§6.　函数无穷小和无穷大的阶

1°记号

$$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$$

表示函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$在$x\to a$的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k\quad(0<|k|<+\infty).$$

特别是，若当$x\to0$时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n **阶无穷小**.

仿此,若当 $x\to\infty$ 时,有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n **阶无穷大**.

2° 记号

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

表示当 $x\to a$ 时,函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小,或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大,就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3° 若当 $x\to a$ 时,无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶(在广义的意义上)不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶(或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶),即

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)}=k\quad(0\leqslant k<+\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的 $[\varphi(x)\sim\psi(x)]$.

例如,当 $x\to 0$ 时,有:

$$\sin x\sim x;\quad \tan x\sim x;\quad a^x-1\sim x\ln a(a>0);\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n};\quad \ln(1+x)\sim x.$$

一般地说来,$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时,已知函数可用其等价的函数来代换.

【645】 把圆心角 $AOB=x$(图 1.261)当作 1 阶无穷小量,求下列各无穷小量的阶:

(1) 弦 AB; (2) 拱高 CD;

(3) 扇形 AOB 的面积; (4) 三角形 ABC 的面积;

(5) 梯形 ABB_1A_1 的面积; (6) 弓形 ABC 的面积.

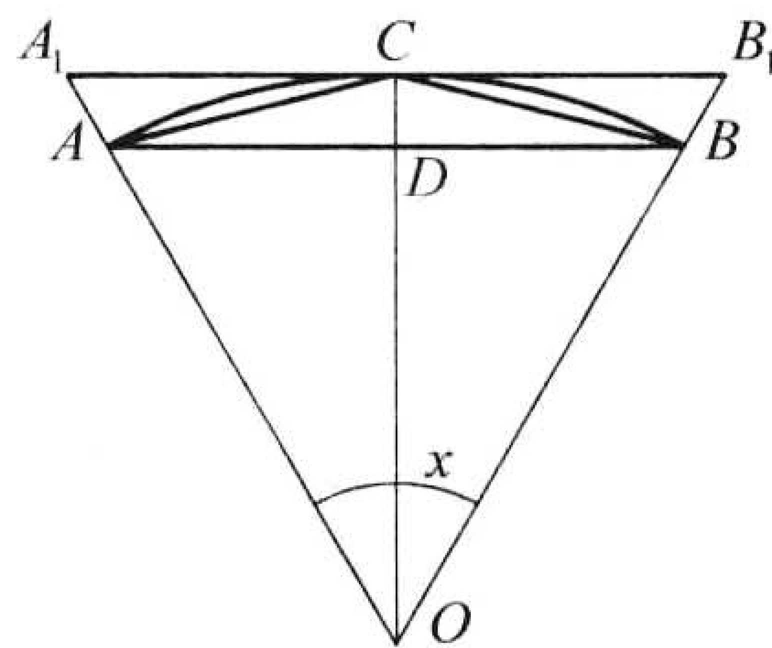


图 1.261

解 (1) $AB=2R\sin\frac{x}{2}$,式中 R 为圆的半径.因为

$$\frac{AB}{x}=\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}\to R\ (x\to 0),$$

所以,弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

(2) $CD=R-R\cos\frac{x}{2}=2R\sin^2\frac{x}{4}$.因为 $\frac{CD}{x^2}\to\frac{R}{8}$,所以,拱高 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(3) 扇形 AOB 的面积 $S=\frac{1}{2}R^2x$.因为 $\frac{S}{x}=\frac{1}{2}R^2$,所以,$S$ 是关于 x 的一阶无穷小.

(4) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2R^2\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$.因为 $\frac{S_{\triangle ABC}}{x^3}\to\frac{R^2}{16}$,所以,$\triangle ABC$ 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

(5) $A_1C=R\tan\frac{x}{2}$.于是,梯形 ABB_1A_1 的面积

$$A_0=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin^2\frac{x}{2}\left(2R\sin\frac{x}{2}+2R\tan\frac{x}{2}\right)=2R^2\sin^3\frac{x}{2}+2R^2\sin^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}.$$

因为 $\frac{A_0}{x^3} \to \frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{4}=\frac{R^2}{2}$，所以，面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(6) 弓形 ABC 的面积

$$p=\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{x}{2}\cdot R\cos\frac{x}{2}=\frac{R^2}{2}(x-\sin x).$$

由于 $x-\sin x$ 是奇函数，故只需考虑 $x\to+0$ 时的情形. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有

$$x-\sin x\leqslant\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}=O^*(x^3);$$

而由 $x\geqslant 2\sin\frac{x}{2}$，又有

$$x-\sin x\geqslant 2\sin\frac{x}{2}-\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}=O^*(x^3).$$

于是，当 x 大于 0 而充分小时，存在两常数 $A>0,B>0$，使

$$Ax^3\leqslant x-\sin x\leqslant Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小. 实际上，今后将会看到，有 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$（但要用到导数的概念）.

【646】 设 $o(f(x))$为当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$有较低阶的任意无穷大函数，且 $O(f(x))$为 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$同阶（在广义的意义上）的任意无穷大函数，其中 $f(x)>0$.

证明：(1) $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$；　(2) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$；

(3) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$；　(4) $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$；

(5) $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$；　(6) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

解题思路 (2)由 133 题(2)的结果，有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}=0$.

(3)利用 133 题(2)的结果，仿(2).

(4)利用 132 题(2)的结果.

(5)利用 131 题(2)的结果.

(6)利用 132 题(2)的结果.

证 (1)因为

$$\lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)}\right\}=0,$$

故 $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(2) 由 133 题(2)的结果，有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o\{f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{O[o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此，$O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(3) 仍由 133 题(2)的结果，有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left|\frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right|\cdot\varlimsup_{x\to a}\frac{O[f(x)]|}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=0$，即 $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(4) 由 132 题(2)的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{O[f(x)]}{f(x)}<+\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$.

(5) 由 131 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]+o[f(x)]|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}+\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o[f(x)]|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}<+\infty.$$

故 $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$.

(6) 由 132 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[g(x)]|}{g(x)}<+\infty,$$

故 $O[f(x)]O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

【647】 设 $x\to+0$ 和 $n>0$. 证明:

(1) $CO(x^n)=O(x^n)$ (C 为常数);

(2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n<m$);

(3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (1) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $CO(x^n)=O(x^n)$.

(2) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+0}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n<m$).

(3) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

得知 $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

【648】 设 $x\to+\infty$ 和 $n>0$. 证明:

(1) $CO(x^n)=O(x^n)$;

(2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n>m$);

(3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (1)与(3)同 647 题(1)与(3)的证明(只要将 $x\to+0$ 换为 $x\to+\infty$). 下证(2):由于

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot\frac{1}{x^{n-m}}\right)=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n>m$).

【649】 证明符号～具有下列性质:(1) 反射性:$\varphi(x)\sim\varphi(x)$;(2) 对称性:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$,则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$;(3) 传递性:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$ 及 $\psi(x)\sim\chi(x)$,则 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

证 (1) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\equiv1\to1$,所以,$\varphi(x)\sim\varphi(x)$.

(2) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to1$,所以,$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\to1$. 即:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$,则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$.

(3) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to1$,$\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\to1$,所以,$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\to1$,即 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

【650】 设 $x\to+0$. 证明下列等式:

(1) $2x-x^2=O^*(x)$; (2) $x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$; (3) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$;

(4) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon>0)$； (5) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$； (6) $\arctan\frac{1}{x}=O(1)$；

(7) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

证 由题设 $x\to+0$，于是，

(1) 因为 $\frac{2x-x^2}{x}\to 2$，所以，$2x-x^2=O^*(x)$.

(2) 因为 $\frac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\to 1$，所以，$x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(3) 因为 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$ $(x\neq 0)$，所以，$x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$.

(4) 因为 $\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}=x^{\varepsilon}\ln x\to 0$，所以，$\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1$，所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}$.

(6) 因为 $\left|\arctan\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}$ $(x\neq 0)$，所以，$\arctan\frac{1}{x}=O(1)$.

(7) 因为 $\frac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\frac{1}{2}n(n-1)x+\cdots\to 0$，所以，$(1+x)^n-1-nx=o(x)$，即

$$(1+x)^n=1+nx+o(x).$$

【651】 设 $x\to+\infty$. 证明下列等式：

(1) $2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$； (2) $\frac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\frac{1}{x}\right)$；

(3) $x+x^2\sin x=O(x^2)$； (4) $\frac{\arctan x}{1+x^2}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$；

(5) $\ln x=o(x^{\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$； (6) $x^p\mathrm{e}^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$； (8) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

证 由题设 $x\to+\infty$，于是，

(1) 因为 $\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3}\to 2$，所以，$2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$.

(2) 因为 $\frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\frac{x(x+1)}{x^2+1}\to 1$，所以，$\frac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3) 因为 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{|x+x^2\sin x|}{x^2}=\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}+\sin x\right|=1<+\infty$，所以，$x+x^2\sin x=O(x^2)$.

(4) 因为 $\frac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\to\frac{\pi}{2}$，所以，$\frac{\arctan x}{1+x^2}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(5) 因为 $\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\to 0$，所以，$\ln x=o(x^{\varepsilon})$.

(6) 因为 $\frac{x^p\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^{p+2}}{\mathrm{e}^x}\to 0$，所以，$x^p\mathrm{e}^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(7) 因为 $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\to 1$，所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$.

(8) 因为$\frac{x^2+x\ln^{100}x}{x^2}=1+\frac{\ln^{100}x}{x}\to 1$，所以，$x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

【652】 证明当 x 充分大时，下边的不等式成立：

(1) $x^2+10x+100<0.001x^3$； (2) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$； (3) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

证 (1) 因为当 $x\to+\infty$时，$\frac{x^2+10x+100}{0.001x^3}\to 0$ 所以，当 x 充分大以后，有$\frac{x^2+10x+100}{0.001x^3}<1$，即

$$x^2+10x+100<0.001x^3.$$

(2) 因为当 $x\to+\infty$时，$\frac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}}\to 0$ 所以，当 x 充分大以后，有$\frac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}}<1$，即 $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$.

(3) 因为当 $x\to+\infty$时，$\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}}=\frac{x^{10}}{e^x}\to 0$ 所以，当 x 充分大后，有$\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}}<1$，即 $x^{10}e^x<e^{2x}$.

【653】 设 $x\to 0$. 分出下列函数的形如 Cx^n(C 为常数)的主部，并求其对于无穷小变量 x 的阶：

(1) $2x-3x^3+x^5$； (2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$； (3) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$； (4) $\tan x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$的主部 $g(x)$，即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1 \quad 或 \quad f(x)=g(x)+o(x) \quad (x\to 0).$$

(1) 因为$\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}\to 1$ $(x\to 0)$，故其主部为 $2x$，它对于无穷小量 x 是一阶的.

(2) 因为 $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to 1$ $(x\to 0)$，故其主部为 x，它对于 x 是一阶的.

(3) 因为 $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}=\frac{3x^2-8x^3}{\sqrt[6]{(1+2x)^{15}}+\sqrt[6]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(1-3x)^{10}}}$，

于是，$\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}}\to 1$ $(x\to 0)$故其主部为$\frac{x^2}{2}$，它对于 x 是二阶的.

(4) 因为 $\tan x-\sin x=\frac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\frac{x}{2}$，于是，$\frac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}\to 1$ $(x\to 0)$，

故其主部为$\frac{x^3}{2}$，它对于 x 是三阶的.

【654】 设 $x\to+0$，证明：无穷小量 (1) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$， (2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，

无论对任何的 n，也不能与无穷小量 x^n($n>0$)相比较. 即：对于任何的 n，等式 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{x^n}=k$ 都不成立，式中 k 为异于零的有限量.

提示 (1)注意 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x=0$，(2)注意 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=0$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x=0$*) ($n>0$)，于是，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\ln x}}{x^n}=\infty,$$

即$\frac{1}{\ln x}$不能与无穷小量 x^n 相比较($x\to+0$).

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=0$**) ($n>0$)，所以，$e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小量 x^n 相比较($x\to 0$).

*) 参看 592 题.

**) 参看 591 题.

【655】 设 $x\to 1$，分出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部，并求其对于无穷小量 $(x-1)$ 的阶：

(1) x^3-3x+2； (2) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$； (3) $\ln x$； (4) e^x-e； (5) x^x-1.

解 (1) 因为 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$，又

$$\frac{x^3-3x+2}{3(x-1)^2}\to 1\ (x\to 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$，它对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小.

(2) 因为 $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$，又

$$\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}}\to 1\quad (x\to 1),$$

故其主部为 $\dfrac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{2}}$，它对于 $(x-1)$ 是 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

(3) 因为 $\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1\ (x\to 1)$，故其主部为 $x-1$，它对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

(4) 因为 $e^x-e=e(e^{x-1}-1)$，又

$$\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\to 1\quad (x\to 1).$$

故其主部为 $e(x-1)$，它对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

(5) 因 $x^x-1=e^{x\ln x}-1$，又

$$\frac{e^{x\ln x}-1}{x-1}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1\quad (x\to 1),$$

故其主部为 $x-1$，它对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

【656】 设 $x\to+\infty$. 分出下列函数的形如 Cx^n 的主部，并求其对于无穷大量 x 的阶：

(1) $x^2+100x+10000$； (2) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$；

(3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$； (4) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (1) 因为 $x^2+100x+10000\sim x^2\ (x\to+\infty)$，故其主部为 x^2，它对于无穷大量 x 是二阶的.

(2) 因为 $\dfrac{\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}}{2x^2}=\dfrac{2x^5}{2x^5-6x^3+2x^2}\to 1\ (x\to+\infty)$，故其主部为 $2x^2$，它对于无穷大量 x 是二阶的.

(3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}\right)$，于是，$\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}\to 1\ (x\to+\infty)$，

故其主部为 $x^{\frac{2}{3}}$，它对于无穷大量 x 是 $\dfrac{2}{3}$ 阶的.

(4) 因为 $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}\to 1\ (x\to+\infty)$，故其主部为 $\sqrt[8]{x}$，它对于无穷大量 x 是 $\dfrac{1}{8}$ 阶的.

【657】 设 $x\to+\infty$. 分出下列函数的形如 $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的主部，并求其对于无穷小量 $\dfrac{1}{x}$ 的阶：

(1) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$； (2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$； (3) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$； (4) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (1) 因为 $\dfrac{\dfrac{x+1}{x^4+1}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^3}=\dfrac{x^3(x+1)}{x^4}\to 1\ (x\to+\infty)$，故其主部为 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$，它对于无穷小量 $\dfrac{1}{x}$ 是 3 阶的.

(2) 因为$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 1\ (x\to+\infty)$,故其主部为$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷小量$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(3) $$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{2\sqrt{x(x+2)}-2(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)}+x+1)}.$$
于是,由此得
$$\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+\dfrac{1}{x}\right)}\to 1\quad (x\to+\infty),$$
故其主部为$-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$,它对于无穷小量$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{3}{2}$阶的.

(4) 因为$\dfrac{\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\to\ (x\to+\infty)$,故其主部为$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$,它对于无穷小量$\dfrac{1}{x}$为 2 阶的.

【658】 设 $x\to1$. 分出下列函数的形如$C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$的主部,并求其对于无穷大量$\dfrac{1}{x-1}$的阶:

(1) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; (2) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (3) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; (4) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; (5) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

解 (1)$\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$,于是,
$$\frac{\dfrac{x^2}{x^2-1}}{\dfrac{1}{2(x-1)}}=\frac{2x^2}{x+1}\to 1\ (x\to1),$$
故其主部为$\dfrac{1}{2(x-1)}$,它对于无穷大量$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

(2) 因为$\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}\to1\ (x\to1)$,故其主部为$\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷大量$\dfrac{1}{1-x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(3) 因为$\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$,于是,
$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{1-x}}}\to1\qquad(x\to1),$$
故其主部为$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$,它对于无穷大量$\dfrac{1}{x-1}$是$\dfrac{1}{3}$阶的.

(4) 因为$\dfrac{\dfrac{1}{\sin\pi x}}{\dfrac{1}{\pi(1-x)}}=\dfrac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)}\to1\ (x\to1)$,故其主部为$\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$,它对于无穷大量$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

(5) 因为$\dfrac{\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to1\ (x\to1)$,故其主部为$\dfrac{1}{x-1}$,它对于无穷大量$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

【659】 设 $x\to+\infty$，$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $f_n(x)$中每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$增加较快；

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为$\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x\to+\infty$，所以，$f_n(x)$比 $f_{n-1}(x)$增加较快.

(2) 因为$\dfrac{e^x}{x^n}\to+\infty\ (x\to+\infty)$，$n$ 为任一固定的正整数，所以，e^x 比 $f_n(x)$中的每一个都增加得较快.

【660】 设 $x\to+\infty$，$f_n(x)=\sqrt[n]{x}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) 函数 $f_n(x)$中每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$增加得较慢；

(2) 函数 $f(x)=\ln x$ 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为$\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x^{-\frac{1}{n(n-1)}}\to0\ (x\to+\infty)$，所以，$f_n(x)$比 $f_{n-1}(x)$增加得较慢.

(2) 因为$\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\to0^{*)}(x\to+\infty)$，所以，$\ln x$ 比 $f_n(x)$中的每一个增加得较慢.

*) 利用 565 题的结果.

【661】 证明：对于任意的函数序列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots\quad(x_0<x<+\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$，当 $x\to+\infty$时它比函数 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N>x_0$. 定义 $x_0<x<+\infty$上的函数 $f(x)$如下：

$$f(x)=\begin{cases}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right), & n\leqslant x<n+1,(n=N,N+1,\cdots);\\ 0, & x_0<x<N.\end{cases}$$

于是，对任何正整数 n，当 $x>\max\{N,n\}$时，有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\left(\sum\limits_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1\right)}<\frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to+\infty$时，$f(x)$比 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

§7. 函数的连续性

1° **函数的连续性** 设

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\tag{1}$$

即，函数 $f(x)$对 $x=x_0$ 有定义，并且对于每一个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，对于$f(x)$的有意义的一切值，不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立，则称函数 $f(x)$当$x=x_0$ 时(或在点 x_0)是连续的.

若函数 $f(x)$在所给的集合 X(开区间，闭区间等等)上的每一点都是连续的，则称函数 $f(x)$在集合$X=\{x\}$上是连续的.

若某值 $x=x_0$ 属于函数 $f(x)$的定义域 $X=\{x\}$或为此集合的聚点，而当 $x=x_0$ 时，等式(1)不成立[即，(ⅰ)数 $f(x_0)$不存在，换言之，函数在点 $x=x_0$ 没有定义；或(ⅱ)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；或(ⅲ)公式(1)的两

端虽有意义，但它们不相等]，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点（不连续点也称间断点）.

不连续点分为：(1)第一类不连续点 x_0，在这些点存在有限的单侧极限：

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x) \text{ 和 } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

(2)第二类不连续点——其余的一切不连续点.

差

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

称为函数在点 x_0 的突跃.

若等式

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

成立，则不连续点 x_0 称为可去的. 若极限 $f(x_0-0)$ 或 $f(x_0+0)$ 中至少有一个等于符号∞，则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式

$$f(x_0-0)=f(x_0)[\text{或 } f(x_0+0)=f(x_0)]$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左(或右)连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件为下面三个数相等：

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2° **初等函数的连续性** 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则函数

(1) $f(x)\pm g(x)$； (2) $f(x)g(x)$； (3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$

也在 $x=x_0$ 连续.

特殊情形：(1)有理函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的；

(2)分式有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值，都是连续的.

一般地说，基本初等函数：x^n，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，a^x，$\log_a x$，$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，…在一切使它们有意义的点都连续.

更为一般的结果如下：若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续，函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时连续，则函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时连续.

3° **关于连续函数的基本定理** 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上连续，则：(1)函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的；(2)达到其下确界 m 和上确界 M（魏尔斯特拉斯定理）；(3)在每一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 中，函数取到所有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的值（柯西定理）. 例如，若 $f(\alpha)f(\beta)<0$，则可找到一个数值 γ $(\alpha<\gamma<\beta)$，使得 $f(\gamma)=0$.

【662】 已给连续函数 $y=f(x)$ 的图像. 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon>0$，用几何方法表示出这样的数 $\delta>0$，使当 $|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

解 如图 1.262 所示，如果 $\delta_1<\delta_2$，我们只要取

$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2),$$

即有

$$\delta=\delta_1.$$

于是，当 $|x-a|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

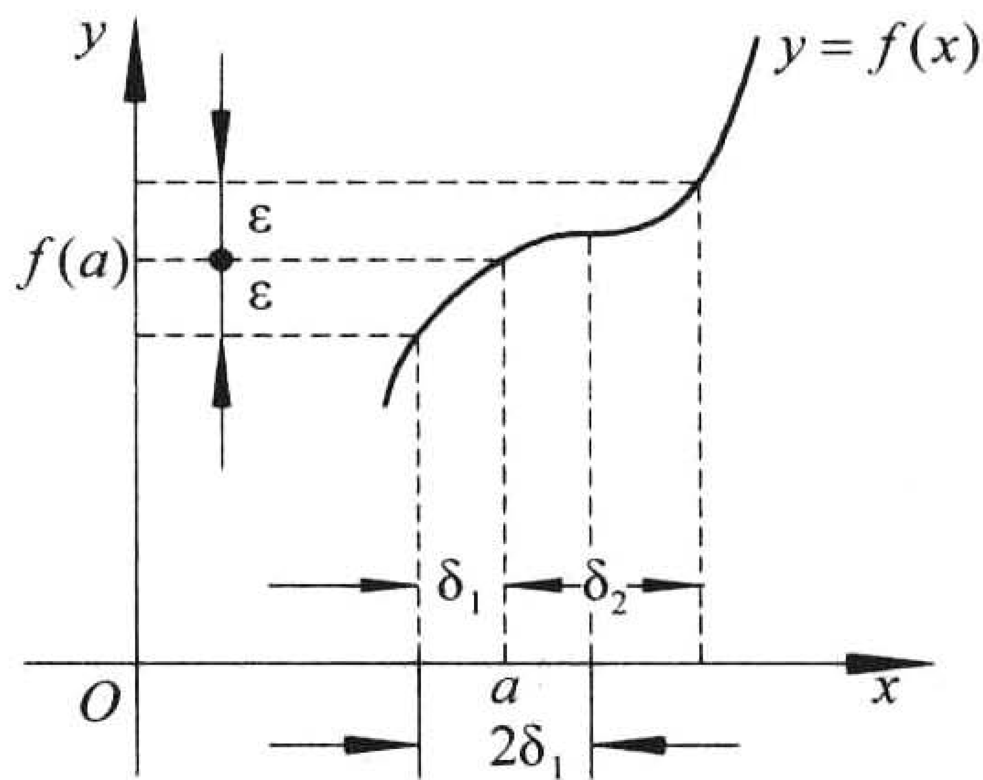


图 1.262

【663】 需要制造一块边长 $x_0=10\text{cm}$ 的正方形金属板．其面积 $y=x^2$ 与预计值 $y_0=100\text{cm}^2$ 的差不可超过：(1) $\pm 1\text{cm}^2$；(2) $\pm 0.1\text{cm}^2$；(3) $\pm 0.01\text{cm}^2$；(4) $\pm \varepsilon\text{cm}^2$，问其边 x 可以在什么范围内变化？

解 (1) 要 $|x^2-100|<1$，只要 $99<x^2<101$．解之，得 $9.95<x<10.05$．

(2) 要 $|x^2-100|<0.1$，只要 $\sqrt{100-0.1}<x<\sqrt{100+0.1}$．解之，得 $9.995<x<10.005$．

(3) 要 $|x^2-100|<0.01$，只要 $\sqrt{100-0.01}<x<\sqrt{100+0.01}$．解之，得 $9.9995<x<10.0005$．

(4) 要 $|x^2-100|<\varepsilon$，只要 $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$．*)

*) 本来，x 处应记成 $|x|$，在此仅考虑点 $x=10$ 处，故在其近傍 x 值恒为正，因此，不必取绝对值了．

【664】 立方体的边介于 2m 和 3m 之间，在测量此立方体边长 x 时容许怎样的绝对误差 Δ，方可使计算立方体体积时的绝对误差不超过：(1) $\varepsilon=0.1\text{m}^3$；(2) $\varepsilon=0.01\text{m}^3$；(3) $\varepsilon=0.001\text{m}^3$．

解 要 $|x_1^3-x_2^3|<\varepsilon$，只要 $|x_1-x_2|(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<\varepsilon$，即只要 $|x_1-x_2|<\dfrac{\varepsilon}{3\times 3^2}=\dfrac{\varepsilon}{27}$，故有

(1) $\Delta<\dfrac{0.1}{27}(\text{m})=3.7(\text{mm})$； (2) $\Delta<\dfrac{0.01}{27}(\text{m})=0.37(\text{mm})$； (3) $\Delta<\dfrac{0.001}{27}(\text{m})=0.037(\text{mm})$．

【665】 问在 $x_0=100$ 的尽可能多大的邻域内，函数 $y=\sqrt{x}$ 图像的纵坐标与 $y_0=10$ 之差小于 $\varepsilon=10^{-n}$ $(n\geqslant 0)$？求当 $n=0,1,2,3$ 时这个邻域的大小．

解 要 $\left|\sqrt{x}-10\right|<10^{-n}$，只要

$$10[1-10^{-(n+1)}]<\sqrt{x}<10[1+10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2,$$

故得 (1) 当 $n=0$ 时，$81<x<121$；

(2) 当 $n=1$ 时，$98.01<x<102.01$；

(3) 当 $n=2$ 时，$98.8001<x<100.2001$；

(4) 当 $n=3$ 时，$99.980001<x<100.020001$．

【666】 利用《$\varepsilon-\delta$》语言，证明：函数 $f(x)=x^2$ 当 $x=5$ 时连续．

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	…
δ					

提示 不妨设 $|x-5|<1$，即 $4<x<6$．

证 任给 $\varepsilon>0$，要 $|x^2-25|<\varepsilon$，即

$$|x-5|\,|x+5|<\varepsilon, \tag{1}$$

不妨只就 $x=5$ 的某一邻域来考虑．例如，取

$$|x-5|<1 \quad 或 \quad 4<x<6,$$

从而有 $9<x+5<11$．于是，只要 $|x-5|<\dfrac{\varepsilon}{11}$．取 $\delta=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{11},1\right)$，则当 $|x-5|<\delta$ 时，恒有

$$|x^2-5|<\varepsilon,$$

所以，函数 $y=x^2$ 在 $x=5$ 处连续．

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	…
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\dfrac{\varepsilon}{11},1\right)$	…

【667】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\varepsilon=0.001$．对于数值 $x_0=0.1;0.01;0.001;\cdots$ 求出最大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$，使得

可从不等式 $|x-x_0|<\delta$ 推出不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

可否对于已知的 $\varepsilon=0.001$ 选出这样的 $\delta>0$,使它对于区间(0,1)中的一切 x_0 值都适用？换言之,可否找到这样的 $\delta>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta$,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,而不论 $x_0\in(0,1)$ 为何值？

解
$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}. \tag{1}$$

由于 $|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|$ 或 $|x|\geqslant|x_0|-|x-x_0|$,故有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}$$

(在此,我们已假设了 $|x-x_0|<|x_0|$,这一点是可以办到的).

于是要 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}<\varepsilon$,即只要 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}>0$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

我们取近似值,$\delta=0.001x_0^2$ ($\varepsilon=0.001$).

当 $x_0=0.1$ 时,$\delta=10^{-5}$;当 $x_0=0.01$ 时,$\delta=10^{-7}$;当 $x_0=0.001$ 时,$\delta=10^{-9}$.

由表达式(1)可知,对于不论怎样小的正数 δ(固定),则当 $|x-x_0|<\delta$ 及 $x_0\to0$ 时,$|f(x)-f(x_0)|$ 可任意地大. 因此,无法选出一个公共的正数 δ 来.

【668】 用《$\varepsilon-\delta$》语言以肯定的方式表达以下论断:函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,而在这一点不连续.

解 存在一个 $\varepsilon_0>0$,对于无论怎样小的 $\delta>0$,都有某 x 满足 $|x-x_0|<\delta$,但 $|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$.

【669】 设对于某些数 $\varepsilon>0$,可找到对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta$,则

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若:(1) 诸数 ε 形成一有限的集合;(2) 数 ε 组成分数 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$ 的无穷集合,则可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续？

提示 (1) 不能. (2) 可以. 可取充分大的 n,使 $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

解 (1) 不能. 因为 ε 不能任意地小.

(2) 可以. 事实上,对于任给的 $\varepsilon>0$,总可以取充分大的 n,使 $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$. 于是,存在 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

【670】 设已知函数 $f(x)=x+0.001[x]$. 证明:对于每一个 $\varepsilon>0.001$,可以选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$,使得只要 $|x'-x|<\delta$,则 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$. 然而当 $0<\varepsilon\leqslant0.001$ 时,对于所有的 x 值都无法选出这样的 δ.

这个函数的连续性在哪些点遭到破坏？

证 当 $\varepsilon>0.001$,且 $|x'-x|<1$ 时,

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|\leqslant|x-x'|+0.001$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,\ 1\}$,则当 $|x-x'|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

当 $0<\varepsilon\leqslant0.001$,且 x_0 不为整数时,有整数 n,使得 $n<x_0<n+1$. 只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $[x]=[x_0]$. 从而,

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$ 为整数时,则对于无论怎样取正数 δ,总有 x 满足 $x<x_0$ 及 $x_0-x<\delta$,此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是,函数 $f(x)$ 在 $x=n$(整数)的点失去了连续性.

【671】 设对于每一个充分小的数 $\delta>0$,都存在 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta$,则不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续？这些不等式描述了函数 $f(x)$ 的什么性

质？

提示　不能．

解　不能．因为 ε 是由 δ 而确定的，它不能任意小．因此，只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界．事实上，$|f(x)|<|f(x_0)|+\varepsilon$．

【672】　设对于每一个数 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得若 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\delta$．由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续？这些不等式描述了函数的什么性质？

解　不对，若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 内有定义，则只要取 $\delta=2(b-a)$，不等式 $|x-x_0|<\delta$ 恒成立．若 (a,b) 为无穷区间，例如，设 $b=+\infty$，则必然

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty.$$

事实上，若不然，则

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|=c<+\infty.$$

于是，存在数列 $x_n>a\ (n=1,2,\cdots)$，$x_n\to+\infty$ 使 $f(x_n)\to c$．由此可知数列 $f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 有界，令

$$\varepsilon_0=\sup\{|f(x_n)|+|f(x_0)|+1\}>0.$$

显然

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots),$$

但是，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=+\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0>0$，不存在对应的 $\delta=\delta(\varepsilon_0,x_0)>0$，此与假定矛盾．由此可知，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$．

【673】　设对于每一个数 $\delta>0$，都存在数 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$，使得若 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\delta$．由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续？这些不等式描述了函数的什么性质？

解　不能．它只说明了反函数的连续性和单值性．

【674】　利用《$\varepsilon-\delta$》语言证明下列函数的连续性：

(1) $ax+b$；　(2) x^2；　(3) x^3；　(4) $\sqrt{x}$；

(5) $\sqrt[3]{x}$；　(6) $\sin x$；　(7) $\cos x$；　(8) $\arctan x$．

证　(1) 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$．

任给 $\varepsilon>0$，要 $\left|(ax+b)-(ax_0+b)\right|<\varepsilon$，只要

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}\quad(a\neq0).$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$．

由于 x_0 的任意性，所以，$f(x)=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内点点连续．

(2) $|x^2-x_0^2|=|x-x_0|\cdot|x+x_0|\leqslant|x-x_0|(|x-x_0|+2|x_0|)$．

任给 $\varepsilon>0$，要 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$，只要

$$|x-x_0|^2+2|x_0||x-x_0|-\varepsilon<0,$$

即只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-|x_0|$．

取 $\delta=\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-|x_0|>0$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$．

这就证明了 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性．

(3) 由于 $|x^3-x_0^3|=|x-x_0||x^2+x_0x+x_0^2|\leqslant|x-x_0|(|x^2|+|x||x_0|+|x_0|^2)$，不妨设 $|x-x_0|<1$，则有

$$|x|<1+|x_0|\quad\text{及}\quad|x^3-x_0^3|<|x-x_0|(1+3|x_0|+3x_0^2).$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2}\right)$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|x^3-x_0^3|<\varepsilon$．

由于 x_0 的任意性，这就证明了 x^3 在$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

(4) 由于 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$ $(x_0>0)$. 任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$，即可得证.

若 $x_0=0$，则取 $\delta=\varepsilon^2$.

(5) 由于 $\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+(xx_0)^{\frac{1}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}\right|}<\dfrac{|x-x_0|}{\left|\sqrt[3]{x_0^2}\right|}$ $(x_0\neq0,\ xx_0>0)$，

取 $\delta=\min\left\{|x_0|,\varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}\right\}$即可得证.

若 $x_0=0$，则取 $\delta=\varepsilon^3$.

(6) 由于 $|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|$，取 $\delta=\varepsilon$，即可得证.

(7) 由于 $|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\left|\sin\dfrac{x+x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|$，取 $\varepsilon=\delta$，即可得证.

(8) 由 $|\arctan x-\arctan x_0|=\left|\arctan\dfrac{x-x_0}{1+xx_0}\right|$，又因 $|y|<\dfrac{\pi}{2}$时，$|y|\leqslant|\tan y|$，故有

$$|\arctan x-\arctan x_0|\leqslant\left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|.$$

当 $x_0>0$ 时，不妨就 $|x-x_0|<|x_0|=x_0$ 进行讨论，此时 $|1+xx_0|>1$，则

$$|\arctan x-\arctan x_0|\leqslant|x-x_0|.$$

当 $x_0<0$ 时可同样讨论.

所以，取 $\delta=\min(\varepsilon,|x_0|)$ ($x_0=0$ 时，取 $\delta=\varepsilon$)，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|\arctan x-\arctan x_0|<\varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性，所以，$\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图像：

【675】 $f(x)=|x|$.

提示 取 $\delta=\varepsilon$ 即可.

解 $\left||x|-|x_0|\right|\leqslant|x-x_0|$，

取 $\delta=\varepsilon$，即可证得在任一点的连续性，如图 1.263 所示.

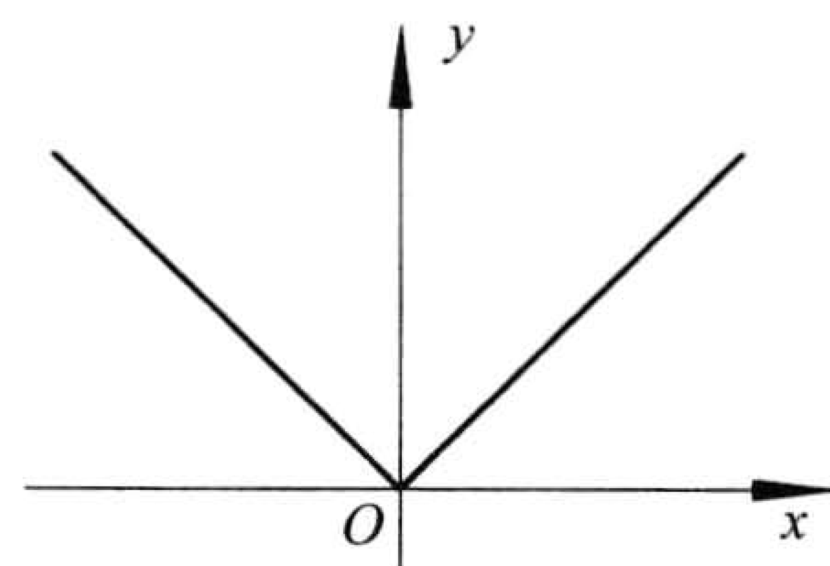


图 1.263

【676】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq2;\\ A, & x=2.\end{cases}$

提示 应就 $A=4$ 及 $A\neq4$ 分别讨论函数 $f(x)$的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$.

因此，当 $A=4$ 时，$f(x)$在点 $x=2$ 处连续；而当 $A\neq4$ 时，$f(x)$在点 $x=2$ 处不连续. 至于在点 $x\neq2$ 处显然是连续的，并且 $f(x)=x+2$ $(x\neq2)$.

如图 1.264 所示.

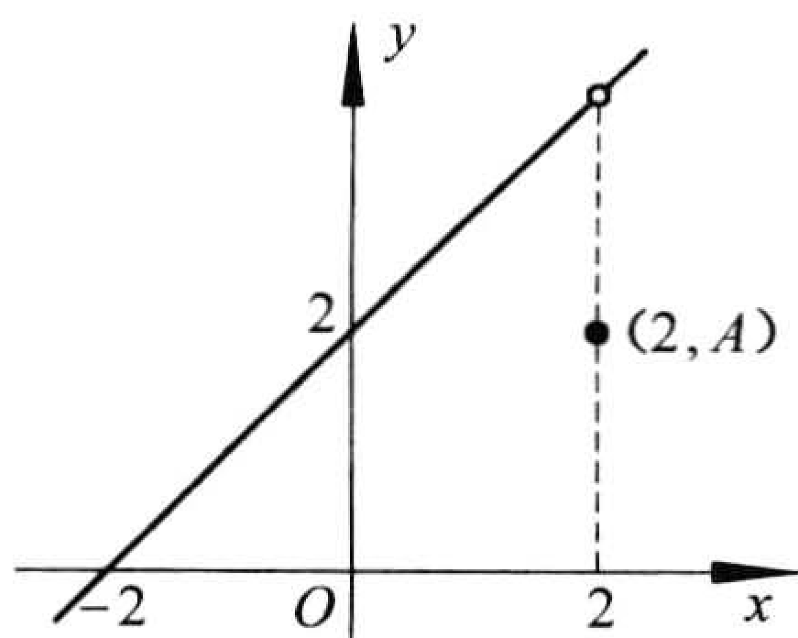


图 1.264

【677】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x\neq -1,\\ \text{任意值}, & x=-1.\end{cases}$

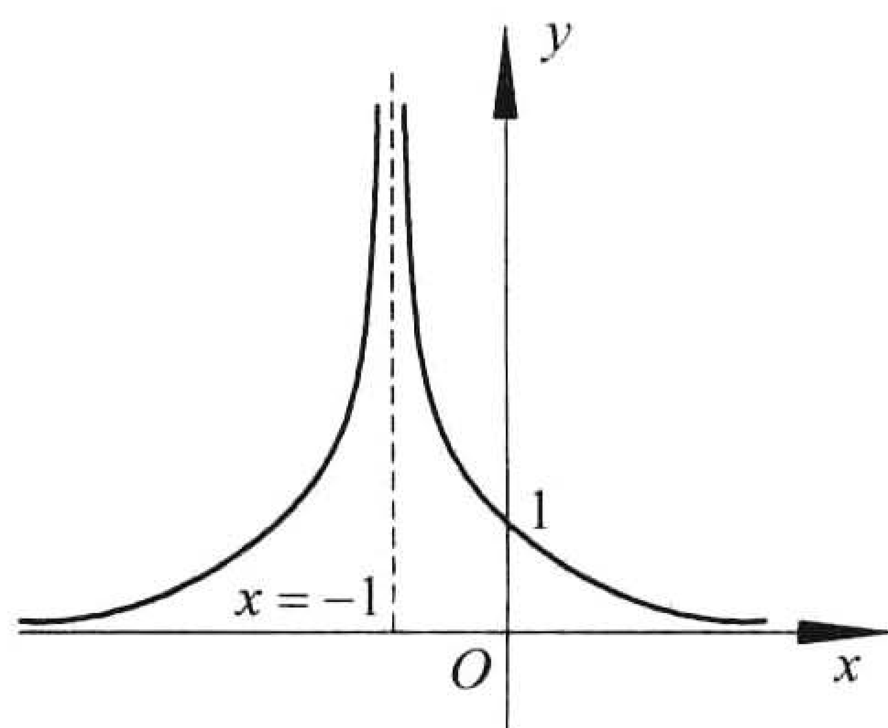


图 1.265

提示 注意到 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$,即知函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处不连续.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$,故函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处不连续.在点 $x\neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的.

如图 1.265 所示.

【678】 (1) $f_1(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(2) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

提示 (1)由连续定义易知函数 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.(2) $\lim\limits_{x\to +0}f_2(x)=1$ 及 $\lim\limits_{x\to -0}f_2(x)=-1$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f_1(x)=1=f_1(0)$,故 $f_1(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.又显知 $f_1(x)$ 在点 $x\neq 0$ 处连续.因此 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内点点连续.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to +0}f_2(x)=1$,$\lim\limits_{x\to -0}f_2(x)=-1$,故 $\lim\limits_{x\to 0}f_2(x)$ 不存在,因此 $f_2(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续,其余各点均连续.

其中(1)的图像关于 Oy 轴对称(图 1.266),而(2)的图像关于原点对称(图 1.267).

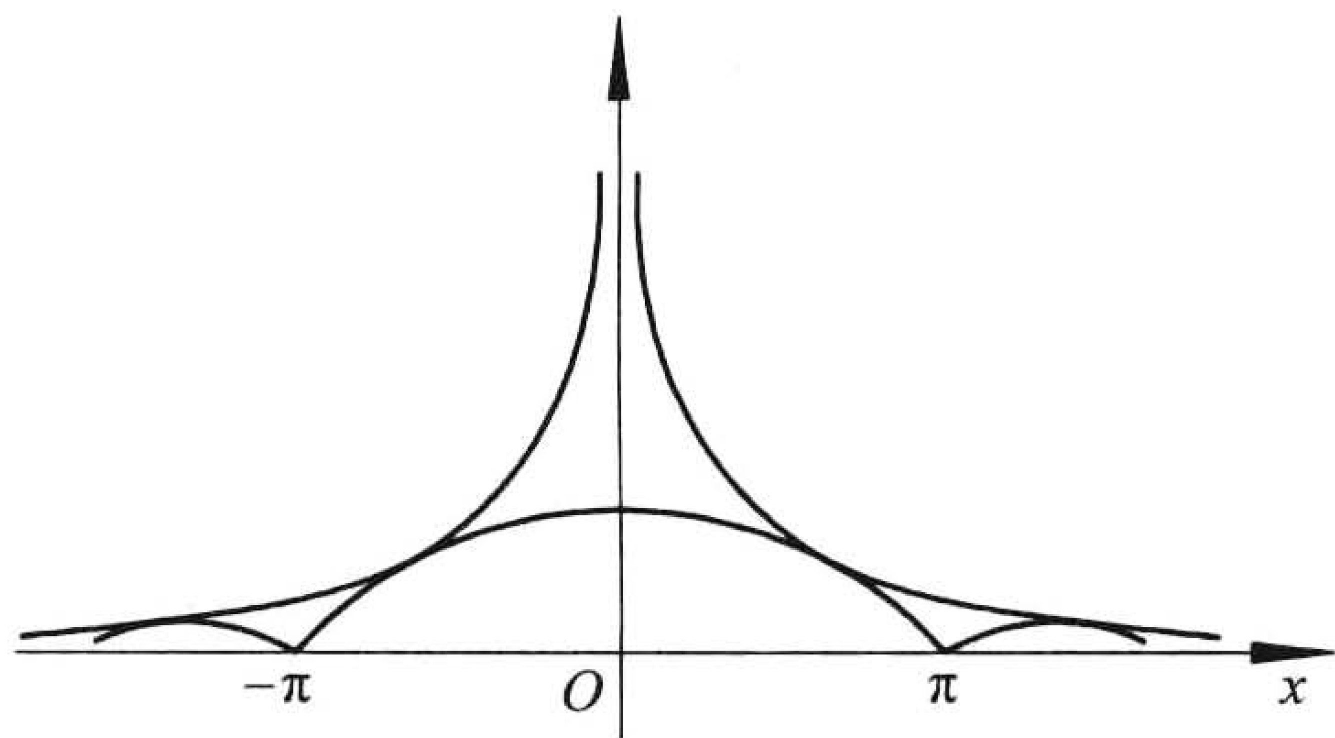


图 1.266

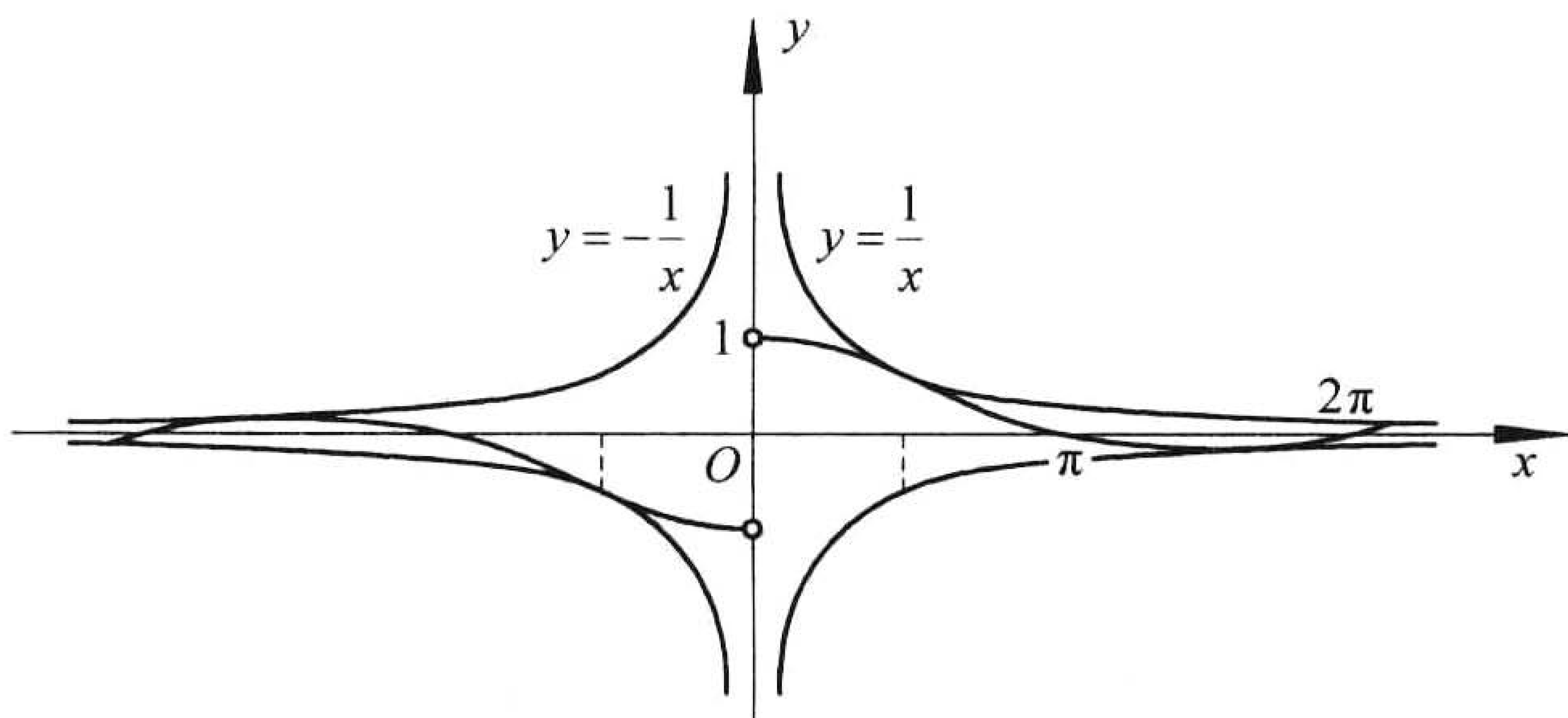


图 1.267

【679】 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \text{任意值}, & x=0.\end{cases}$

解 在 $x\neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续,而在 $x=0$ 不连续(因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在).图像关于原点对称,图 1.268仅为 $x>0$ 的一部分.

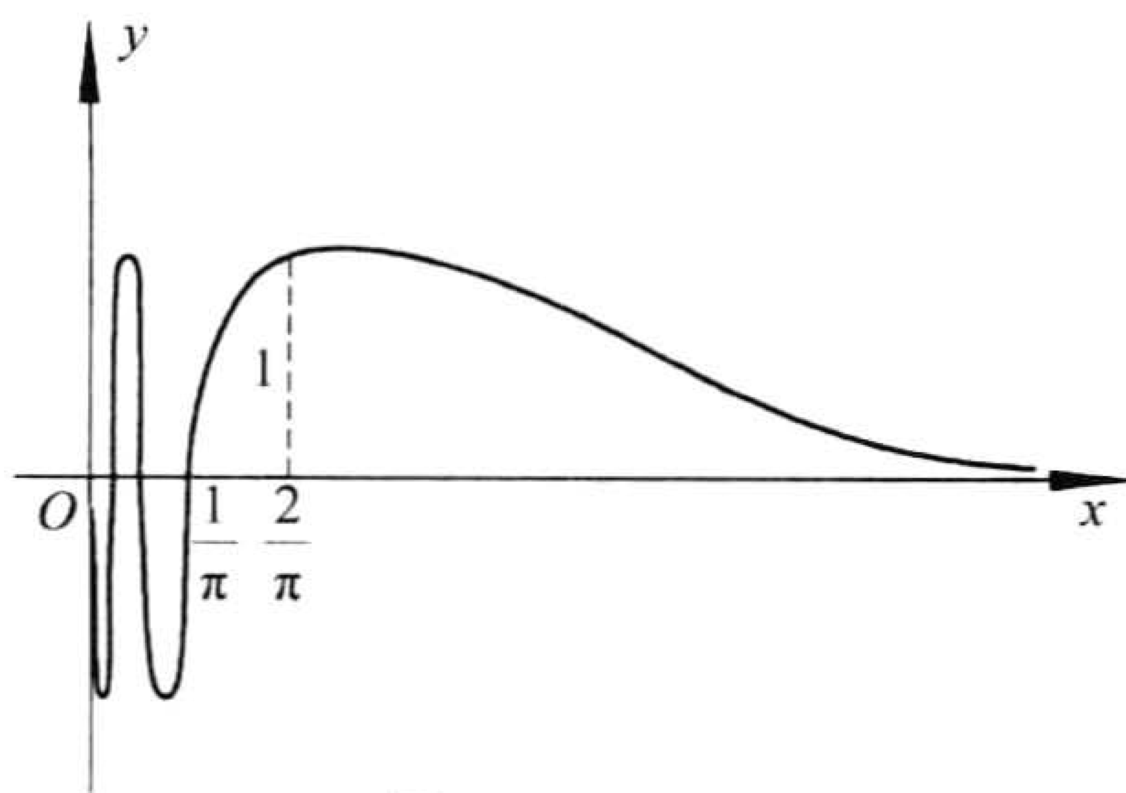


图 1.268

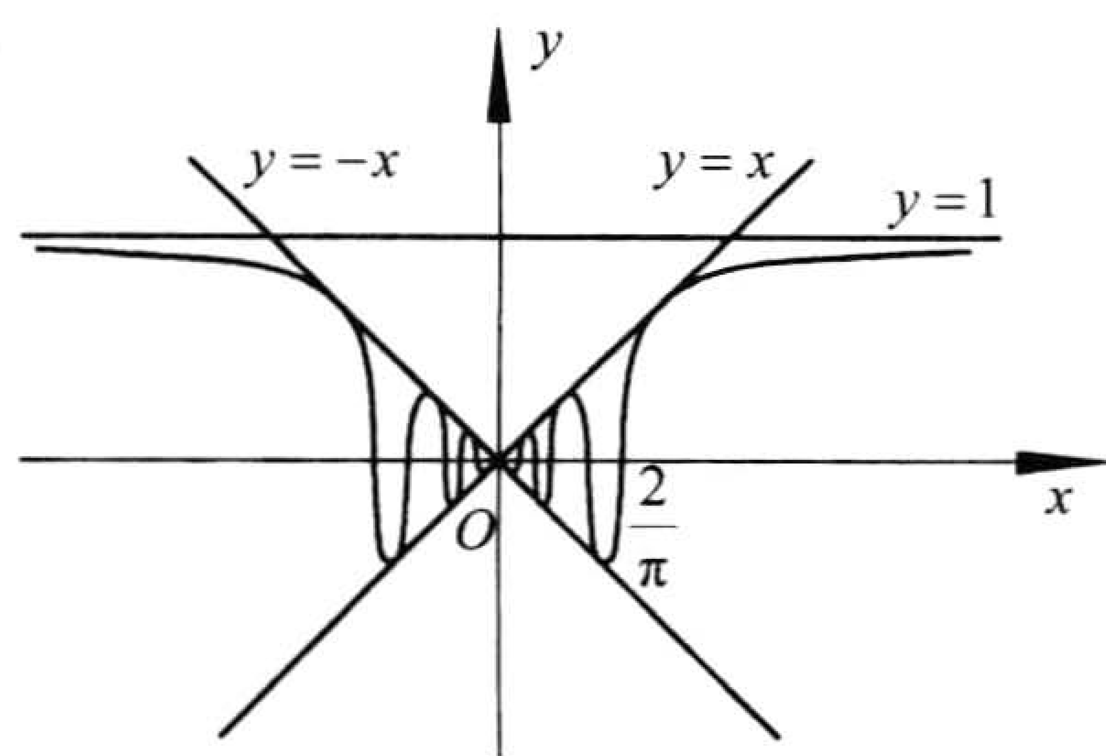


图 1.269

【680】 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

提示 由连续定义易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，点点连续. 图像关于 Oy 轴对称，如图 1.269 所示.

当 $x\to\infty$ 时 $y\to 1$，且当 $|x|>\dfrac{2}{\pi}$ 时，有 $0<y<1$.

【681】 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

提示 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，点点连续.

图像关于 Oy 轴对称，如图 1.270 所示.

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 1$，且 $0<y<1$.

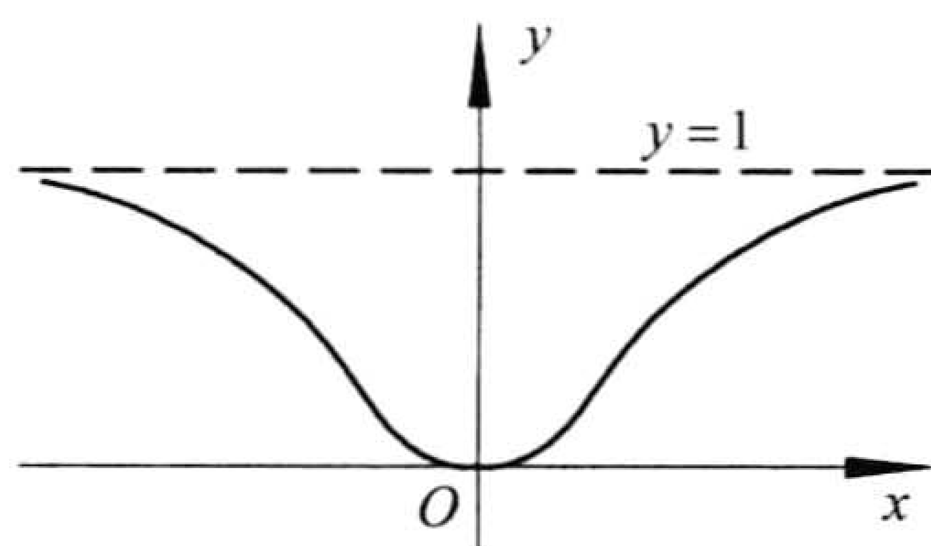


图 1.270

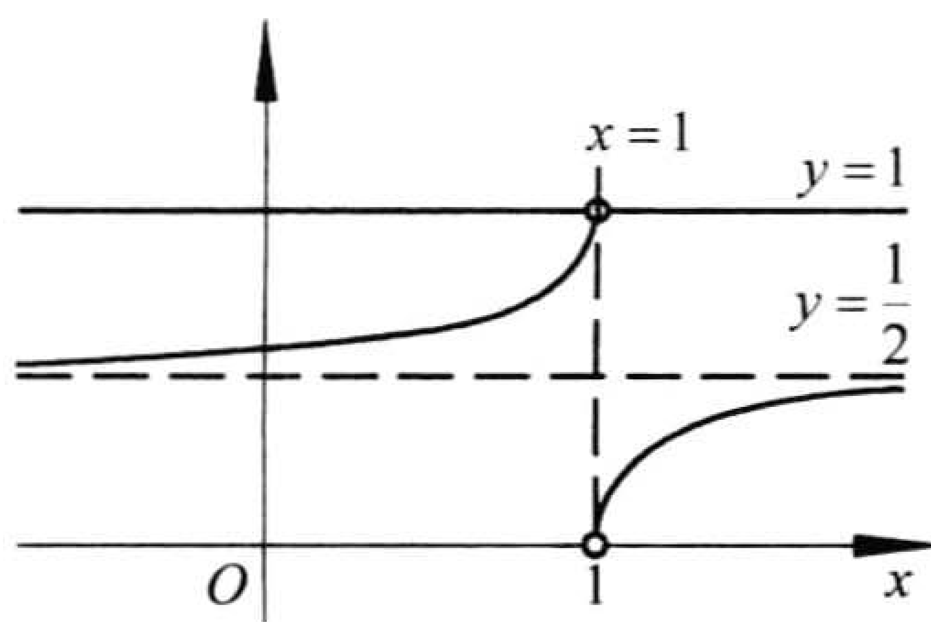


图 1.271

【682】 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq 1, \\ \text{任意值}, & x=1. \end{cases}$

提示 注意到 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1$ 及 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=0$，即知函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

解 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=0$，除点 $x=1$ 外其余点点连续. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

如图 1.271 所示.

【683】 $f(x)=\begin{cases} x\ln x^2, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$

提示 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，故应对 $a\neq 0$ 及 $a=0$ 分别讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x^2=0$.

当 $a=0$ 时，点点连续；而当 $a\neq 0$ 时，除点 $x=0$ 处不连续，其余点点连续. 图像关于原点对称. 如图1.272所示.

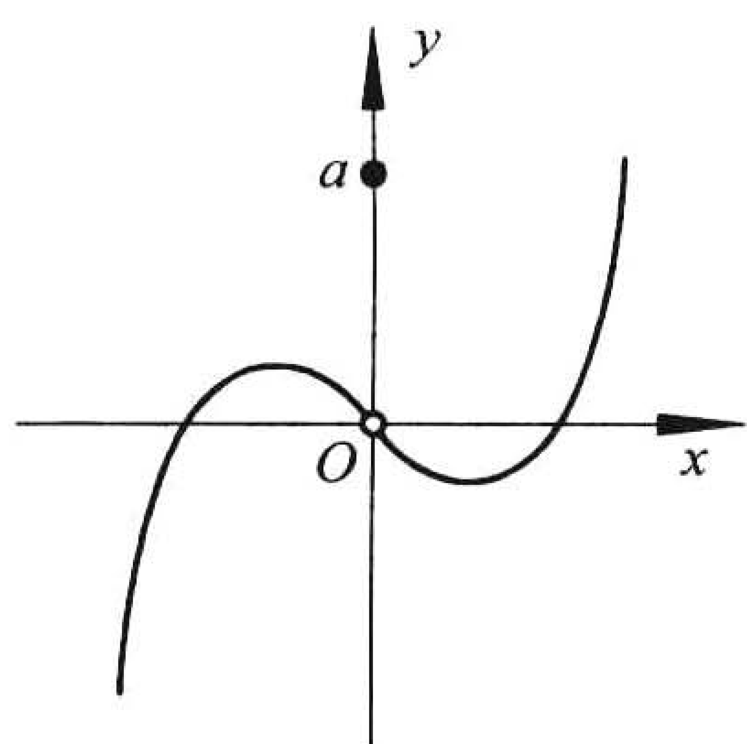


图 1.272

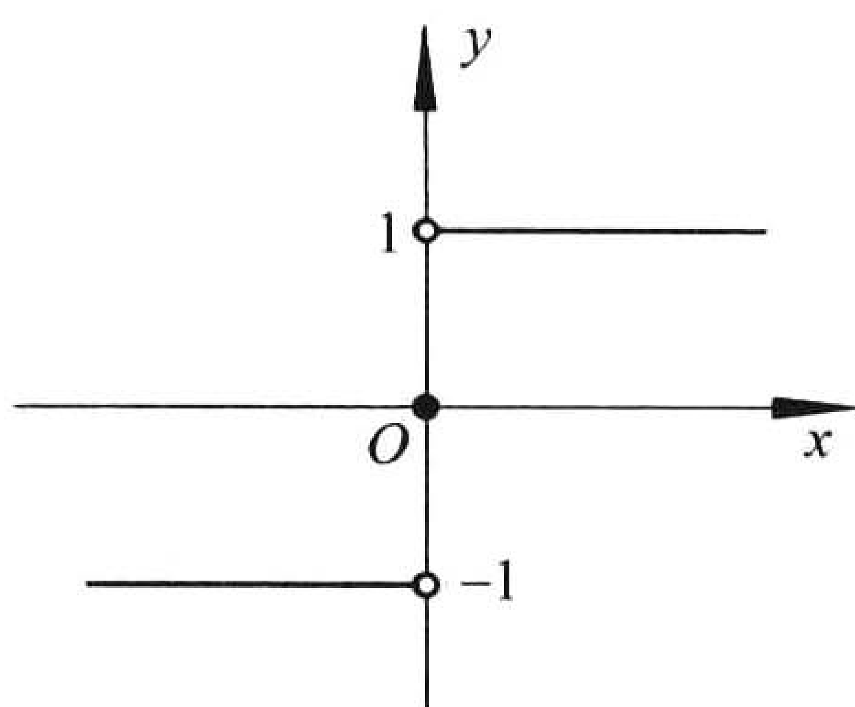


图 1.273

【684】 $f(x)=\operatorname{sgn}x$.

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=-1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=1$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=0$. 除点 O 外，点点连续.

如图 1.273 所示.

【685】 $f(x)=[x]$.

解 除当 $x=k$ (k 为整数)外，其余点点连续.

如图 1.274 所示.

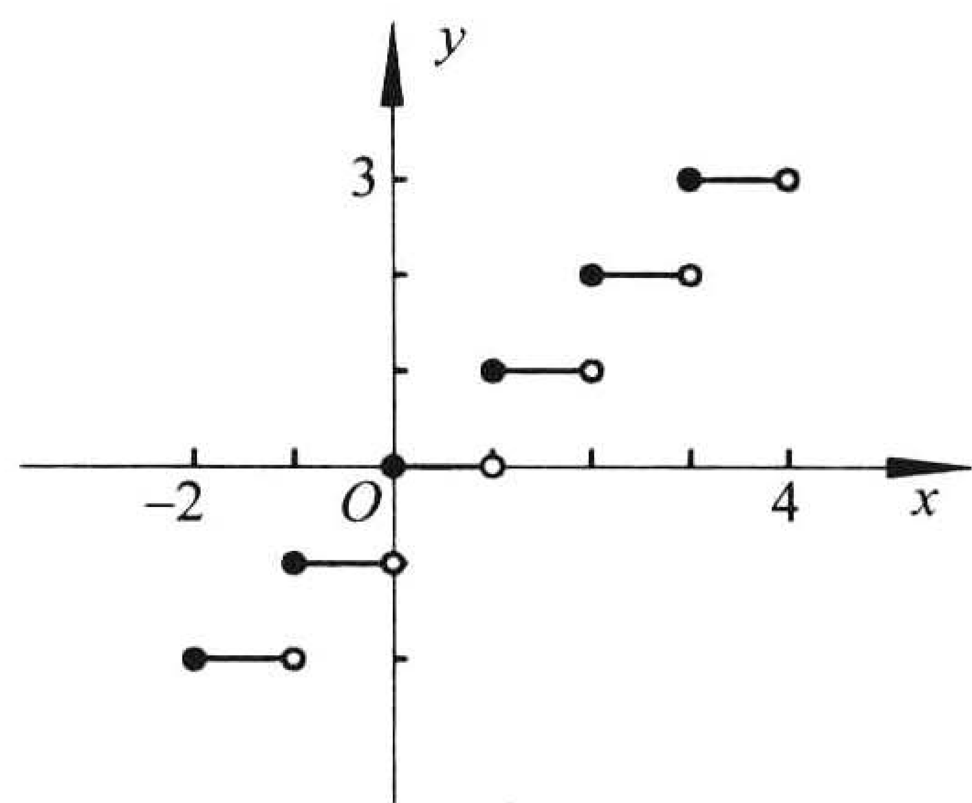


图 1.274

【686】 $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

解 当 $x=k^2(k=1,2,\cdots)$时不连续.

当 $k^2\leqslant x<(k+1)^2$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-k$，$f[(k+1)^2]=0$.

如图 1.275 所示.

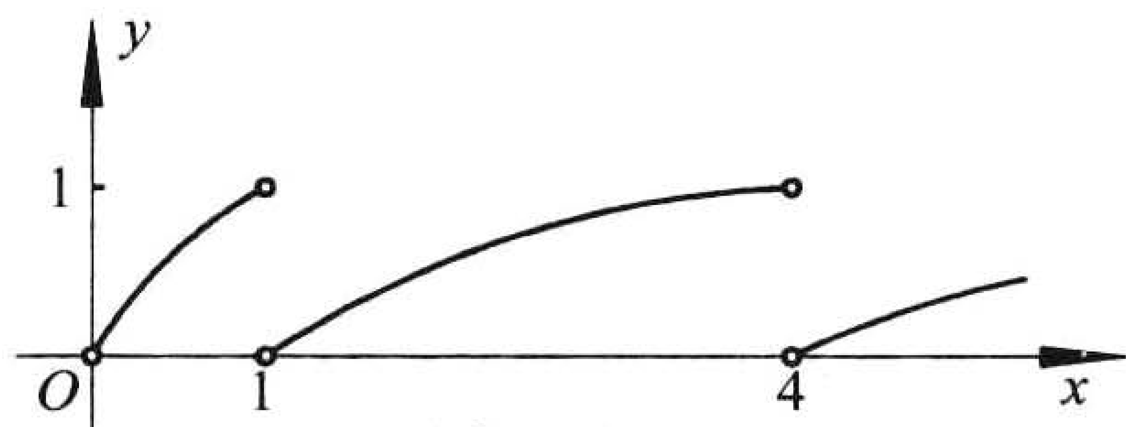


图 1.275

求出下列函数的不连续点，并研究这些点的性质：

【687】 $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

解 $x=-1$ 为无穷型不连续点.

【688】 $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$，故 $x=-1$ 为“可去”的不连续点.

【689】 $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

解 $\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$，$x=1$ 及 $x=-2$ 均为无穷型不连续点.

【690】 $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}y=-1$，及$\lim\limits_{x\to1}y=0$，所以，$x=-1$ 为无穷型不连续点，而 $x=0$ 及 $x=1$ 为“可去”的不连续点.

【691】 $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}y=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$（$k$ 为不等于零的整数），所以，$x=0$ 为“可去”的不连续点，而 $x=k\pi$（$k=\pm 1,\pm 2,\cdots$）为无穷型不连续点.

【692】 $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2\pi\sin^2\dfrac{\pi}{2}(2-x)}{\dfrac{\pi}{2}(2-x)\cdot 2(2+x)}}=0.$

同理 $\lim\limits_{x\to -2}y=0$，所以，$x=2$ 及 $x=-2$ 为“可去”的不连续点.

【693】 $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}y$ 不存在，*) 故 $x=0$ 为第二类不连续点.

*) *左右极限均不存在.*

【694】 $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}-0}y=(-1)^k$，$\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}+0}y=(-1)^{k-1}$，故 $x=\dfrac{1}{k}$（$k=\pm 1,\pm 2,\cdots$）为第一类不连续点.

【695】 $y=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{x}}{\cos\dfrac{\pi}{x}}$.

解 $x=\dfrac{2}{2k+1}$（$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）为“可去”的不连续点.

【696】 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to +0}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to -0}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，故 $x=0$ 为第一类不连续点.

【697】 $y=\sqrt{x}\arctan\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$，$x=0$ 为“可去”的不连续点.

【698】 $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to +0}y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to -0}y=0$，所以，$x=0$ 为第二类不连续点.

【699】 $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to +0}y=0$，$\lim\limits_{x\to 1-0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1+0}y=+\infty$，所以，$x=0$为“可去”的不连续点，而 $x=1$ 为无穷型不连续点.

【700】$^+$ $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}y=1$，$\lim\limits_{x\to 1-0}y=0$，$\lim\limits_{x\to +0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -0}y=+\infty$，所以，$x=1$ 为第一类不连续点，而 $x=0$ 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图像.

【701】 $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 $x=k\pi$（$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）为第一类不连续点. 如图 1.276 所示.

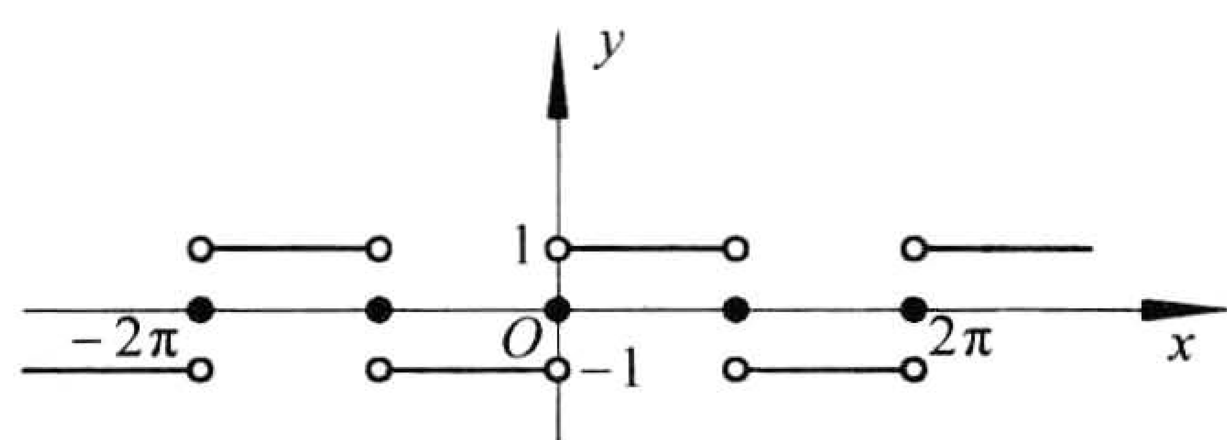


图 1.276

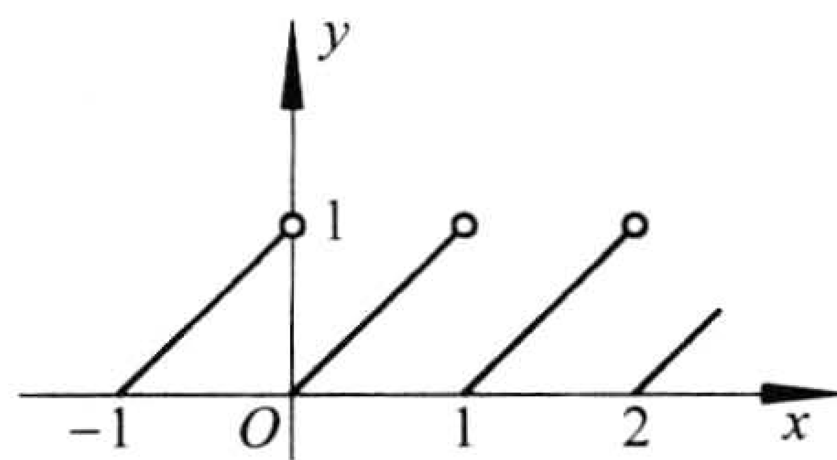


图 1.277

【702】 $y=x-[x]$.

解 $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类不连续点.如图 1.277 所示.

【703】 $y=x[x]$.

解 $x=k$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类不连续点.如图 1.278 所示.

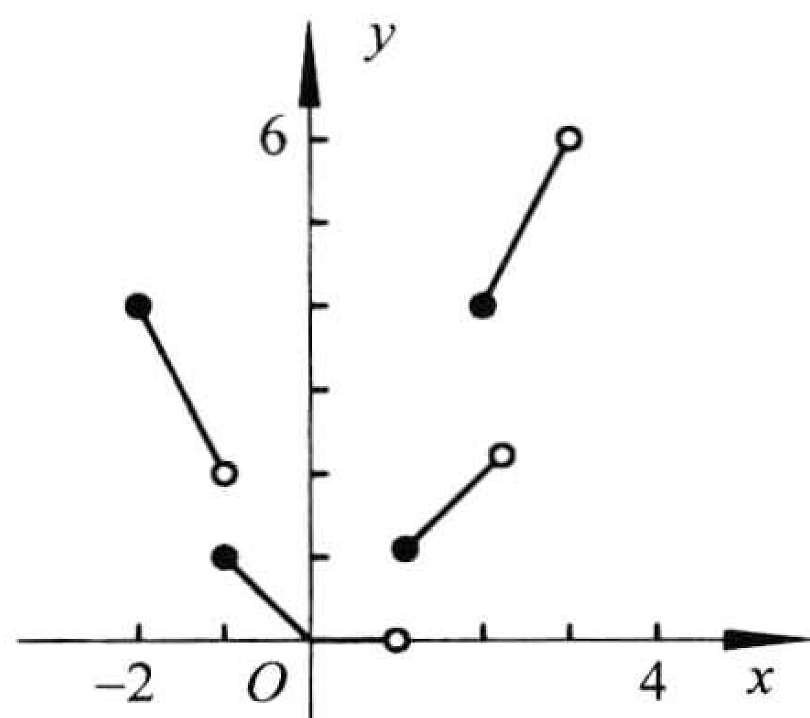


图 1.278

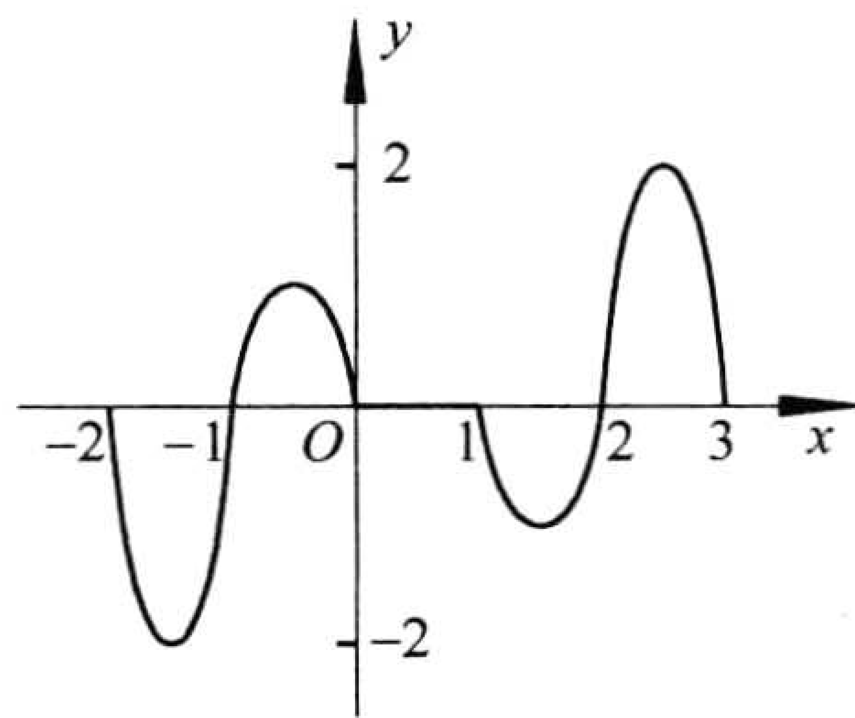


图 1.279

【704】 $y=[x]\sin\pi x$.

解 处处连续.当 $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时 $y=0$.如图 1.279 所示.

【705】 $y=x^2-[x^2]$.

解 $x=\pm\sqrt{k}$ $(k=1,2,\cdots)$为第一类不连续点.

图 1.280 仅画了 $x\geqslant0$ 的部分.

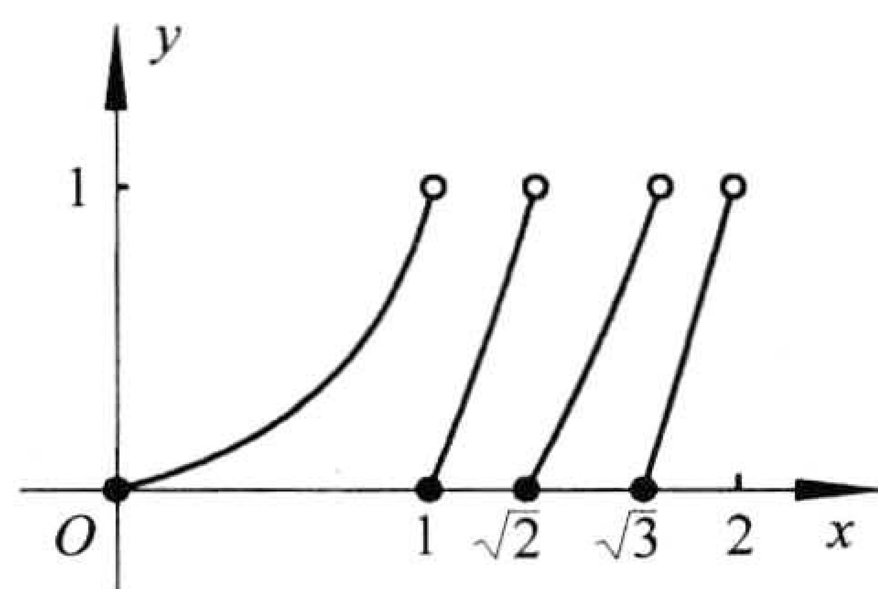


图 1.280

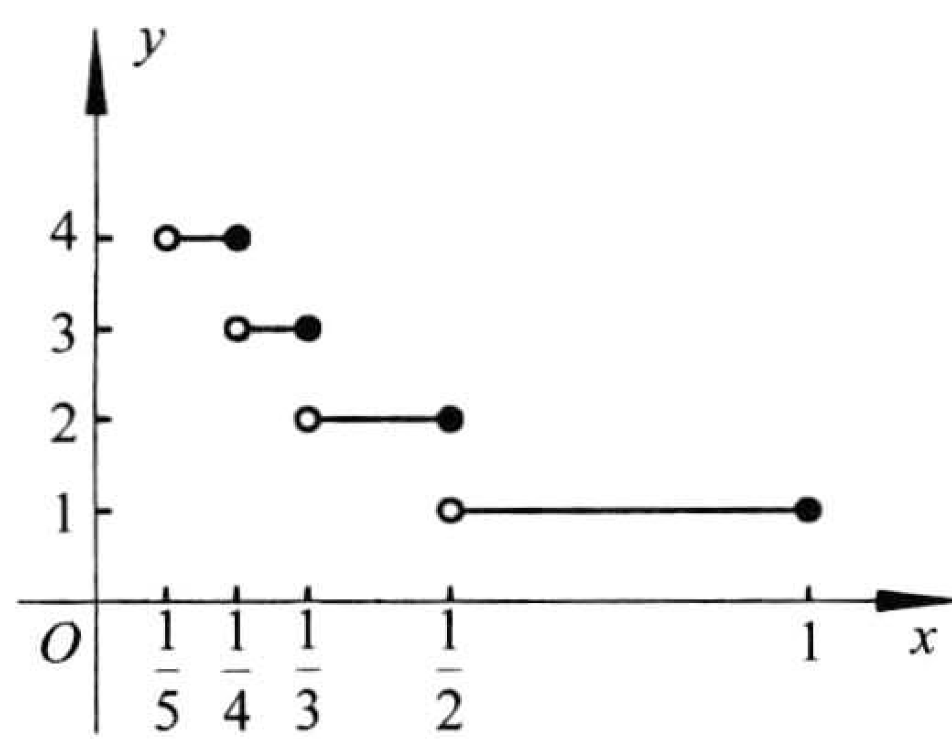


图 1.281

【706】 $y=[\frac{1}{x}]$.

解 $x=0$ 为无穷型不连续点,$x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了 $x>0$ 的部分,并且在图像中两轴比例不一致,即已经过“压缩”变换.

【707】 $y=x[\frac{1}{x}]$.

解 $x=0$ 为“可去”的不连续点,因为$\lim\limits_{x\to0}y=1$.$x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当 $x>0$ 的部分,并且两轴所取的单位不一致.

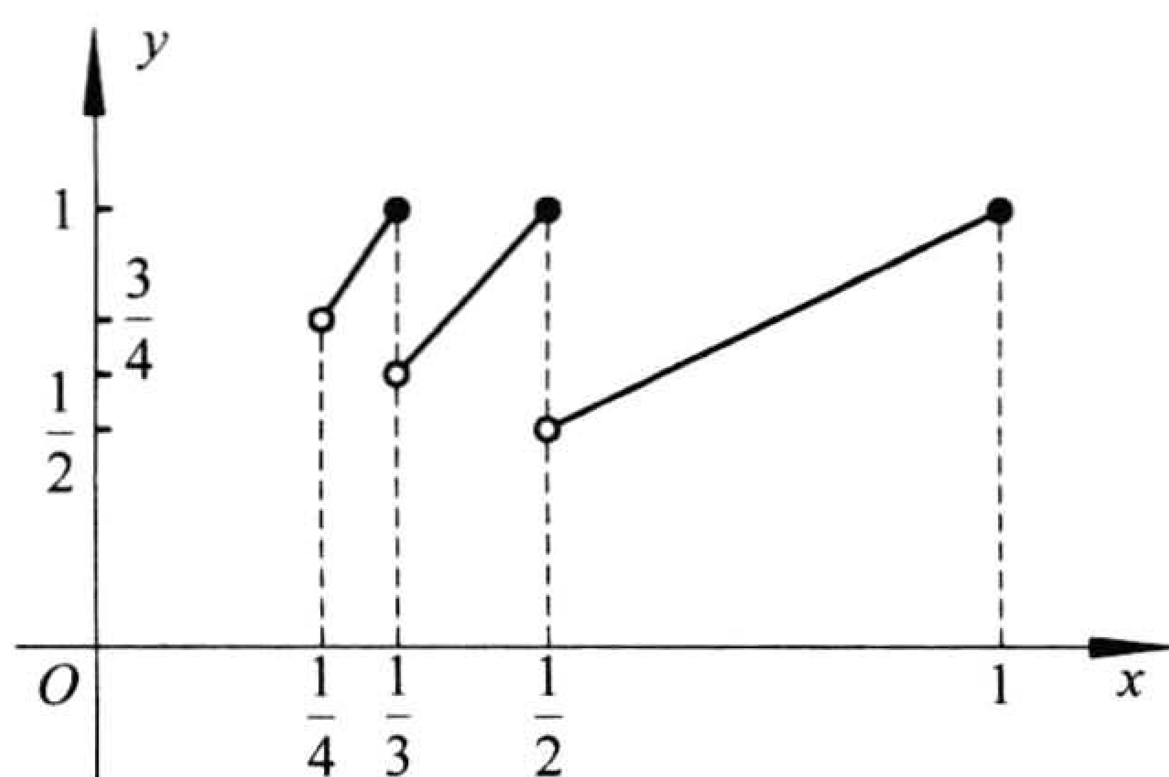


图 1.282

【708】 $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos\frac{1}{x}=0$ 的点,即 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当$k=0,\pm1,\pm2$时的情形,图像关于 Oy 轴对称.

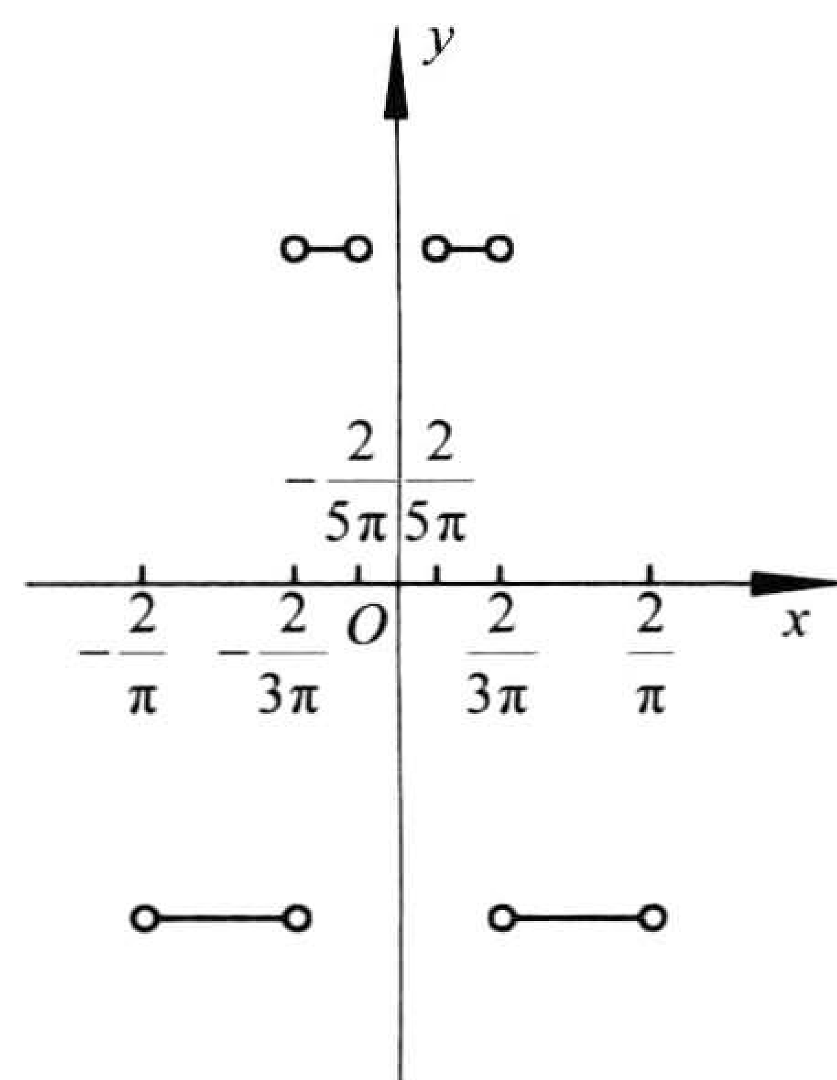


图 1.283

【709】 $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$$x=\pm\frac{1}{k}\quad 及\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}(k=1,2,\cdots)$$

为第一类不连续点.

图 1.284 的两轴所取的比例单位不同.

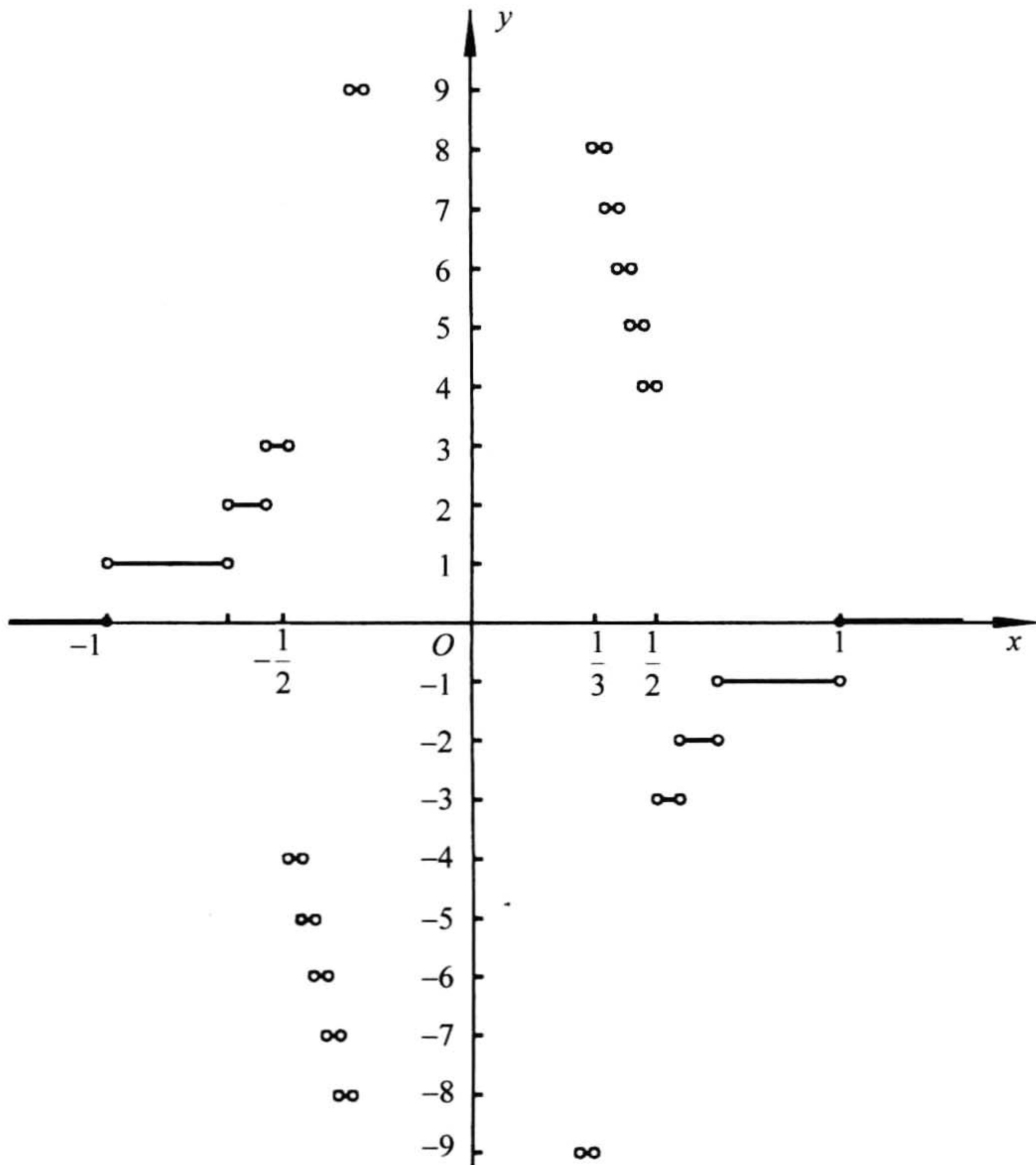


图 1.284

【710】 $y=\cot\frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin\frac{\pi}{x}=0$,即 $x=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点.

图像关于原点对称,如图 1.285 所示.

当 $x\to-\infty$时,$y\to-\infty$;当 $x\to+\infty$时,$y\to+\infty$.

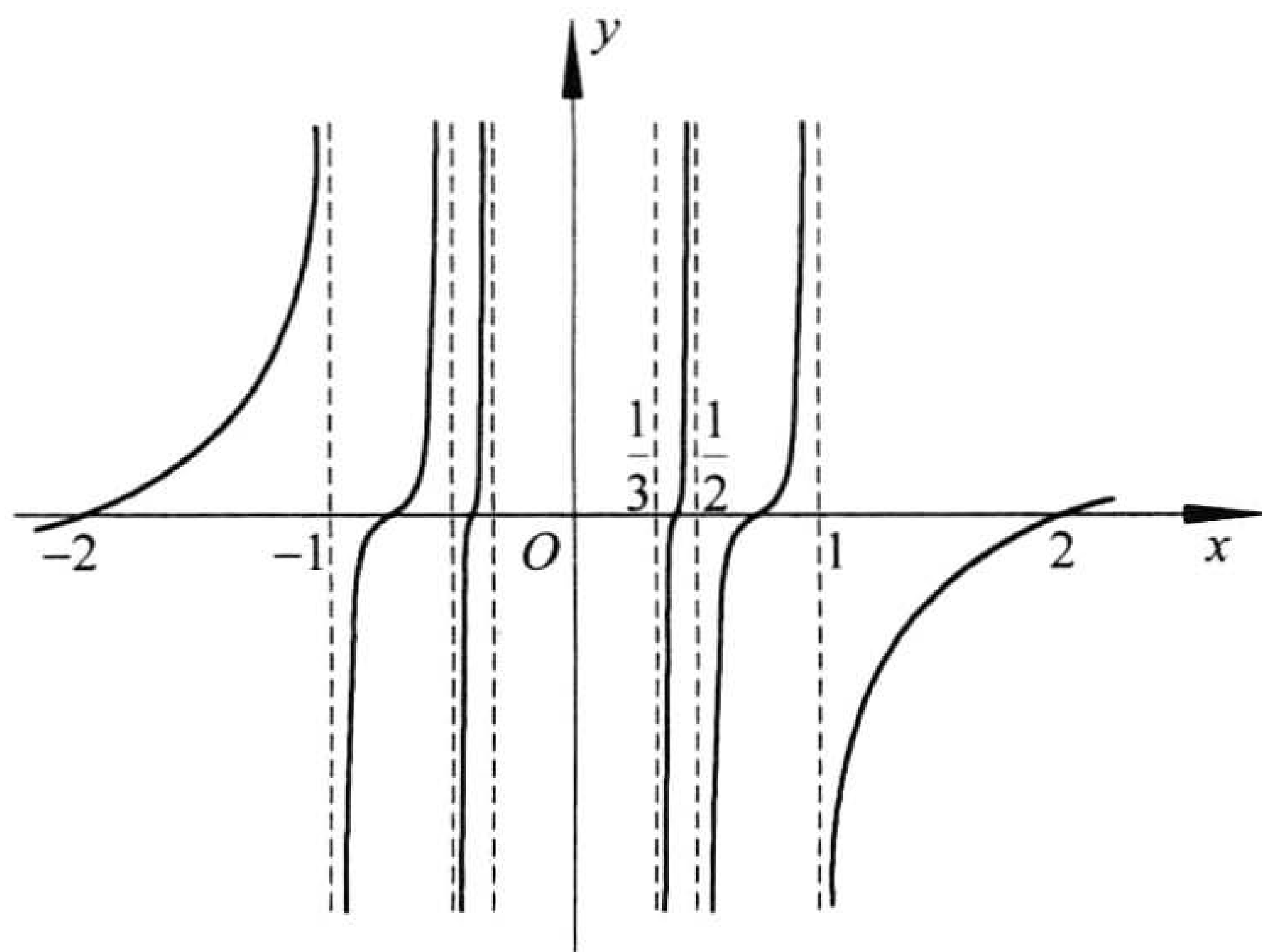


图 1.285

【711】 $y=\sec^2\frac{1}{x}$.

解 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点.

图像关于 Oy 轴对称,当 $x\to+\infty$时,$y\to1$. 如图 1.286 所示.

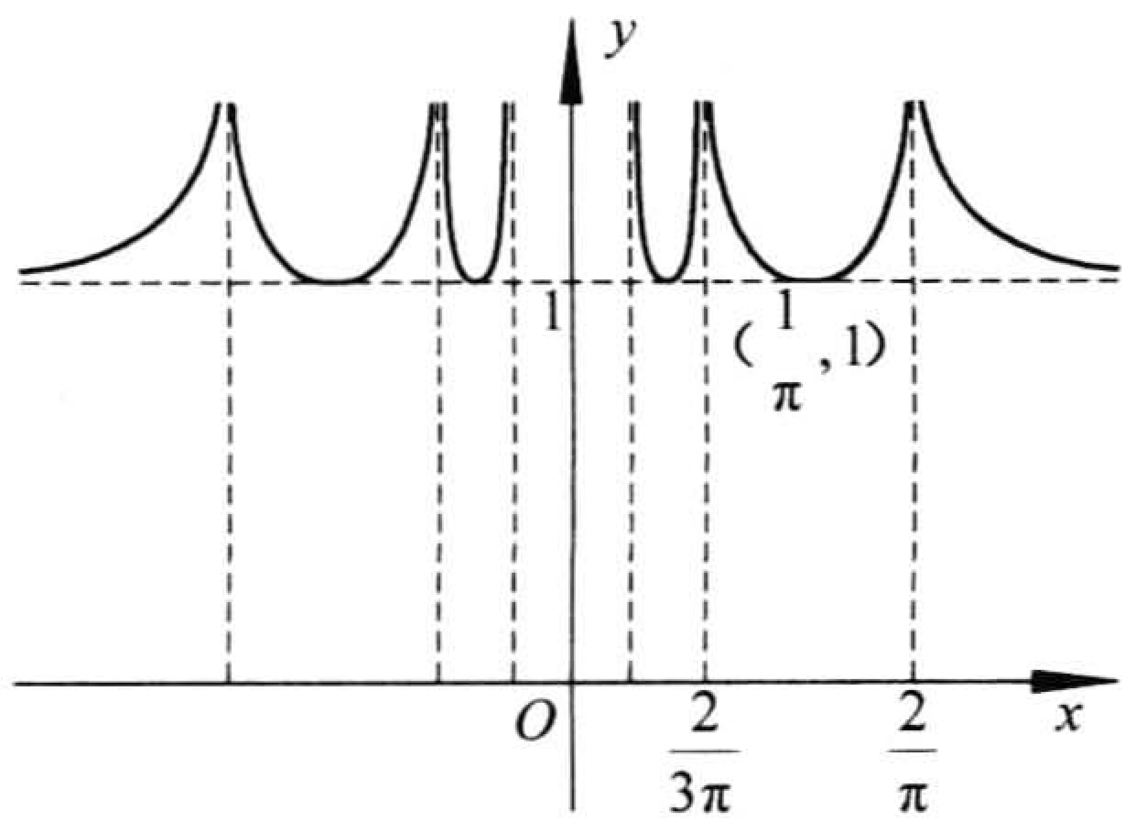


图 1.286

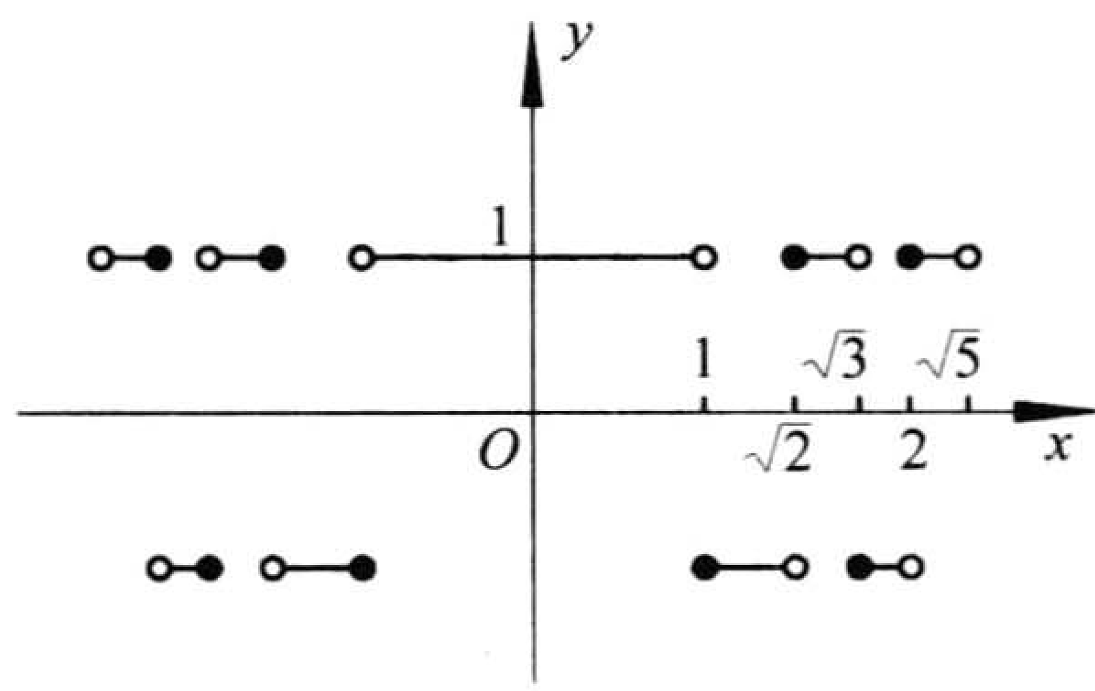


图 1.287

【712】 $y=(-1)^{[x^2]}$.

解 $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,\cdots)$为第一类不连续点.

图像关于 Oy 轴对称. $\lim\limits_{x\to\sqrt{n}-0}y=(-1)^{n-1}$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{n}+0}y=(-1)^{n}$. 如图 1.287 所示.

【713】 $y=\arctan\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

解 $x=0$,$x=1$ 和 $x=2$ 为第一类不连续点.

$\lim\limits_{x\to-0}y=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1-0}y=-\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to2-0}y=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0}y=\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to1+0}y=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to2+0}y=\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$. 如图 1.288 所示.

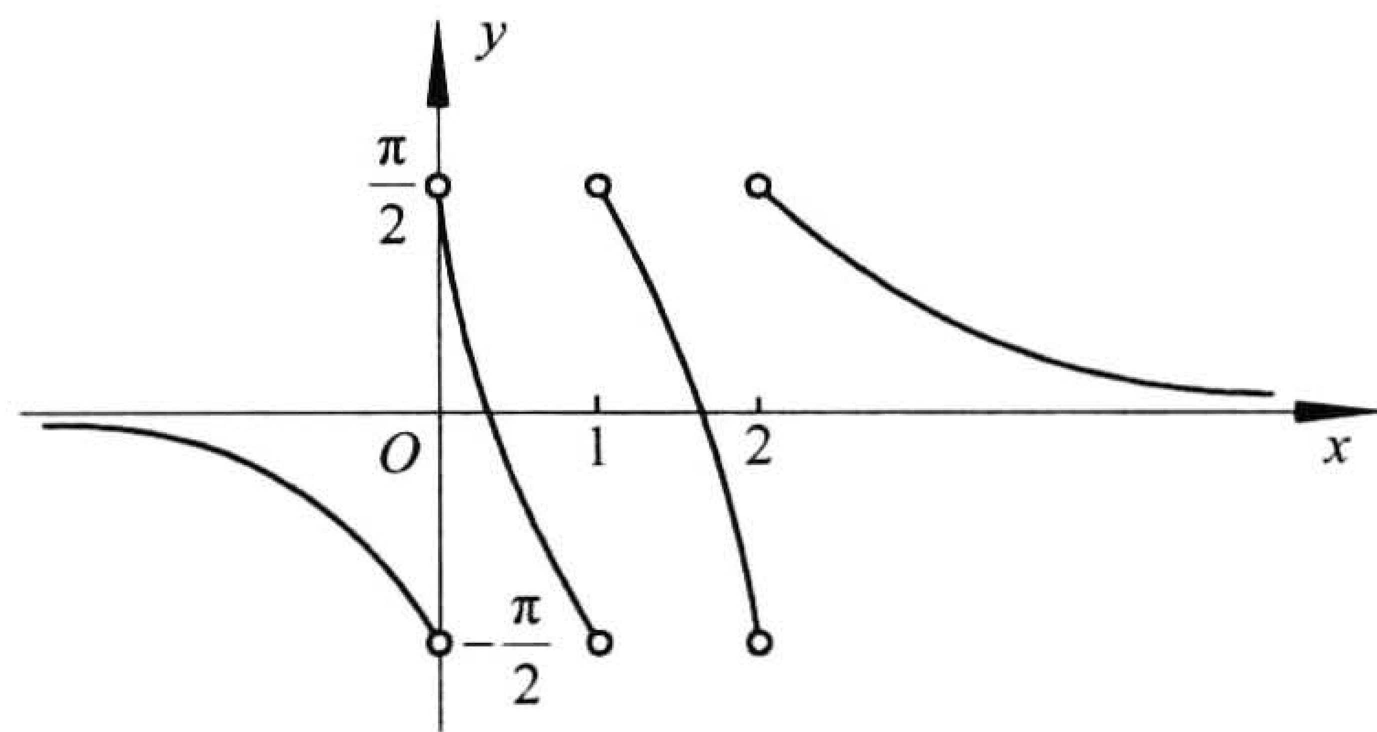


图 1.288

【714】 $y=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$.

解 $x=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)为无穷型不连续点.

图像关于 Oy 轴对称,如图 1.289 所示.

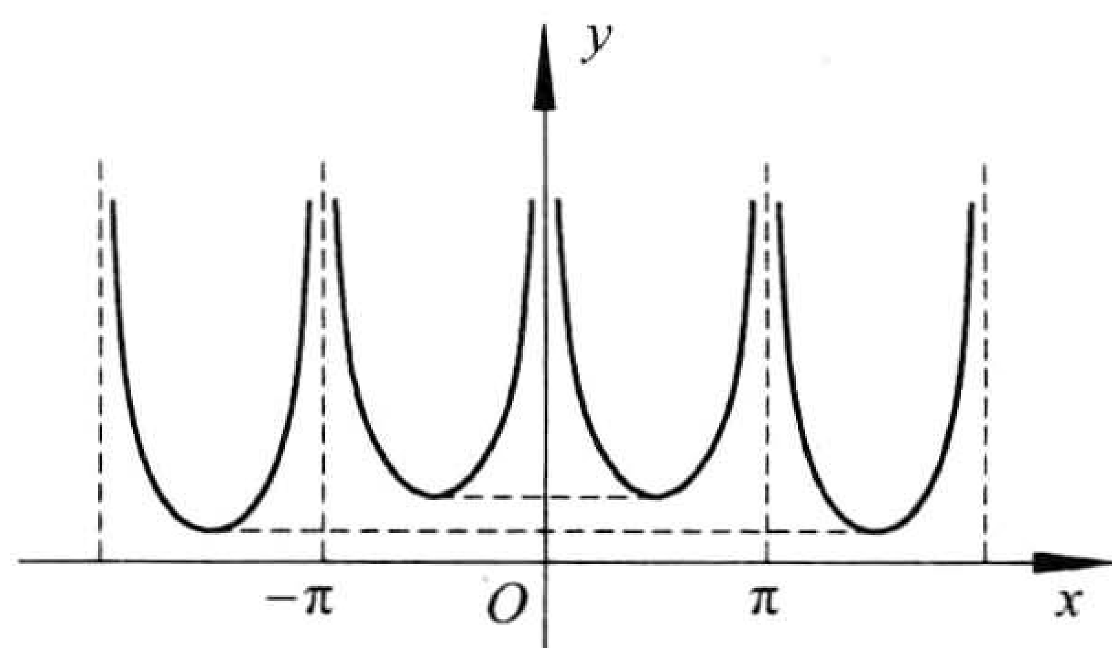


图 1.289

【715】 $y=\frac{1}{\sin(x^2)}$.

解 $x=\pm\sqrt{k\pi}$ ($k=0,1,2,\cdots$)为无穷型不连续点.

图像关于 Oy 轴对称,如图 1.290 所示.

图中只画了 $x>0$ 的部分.

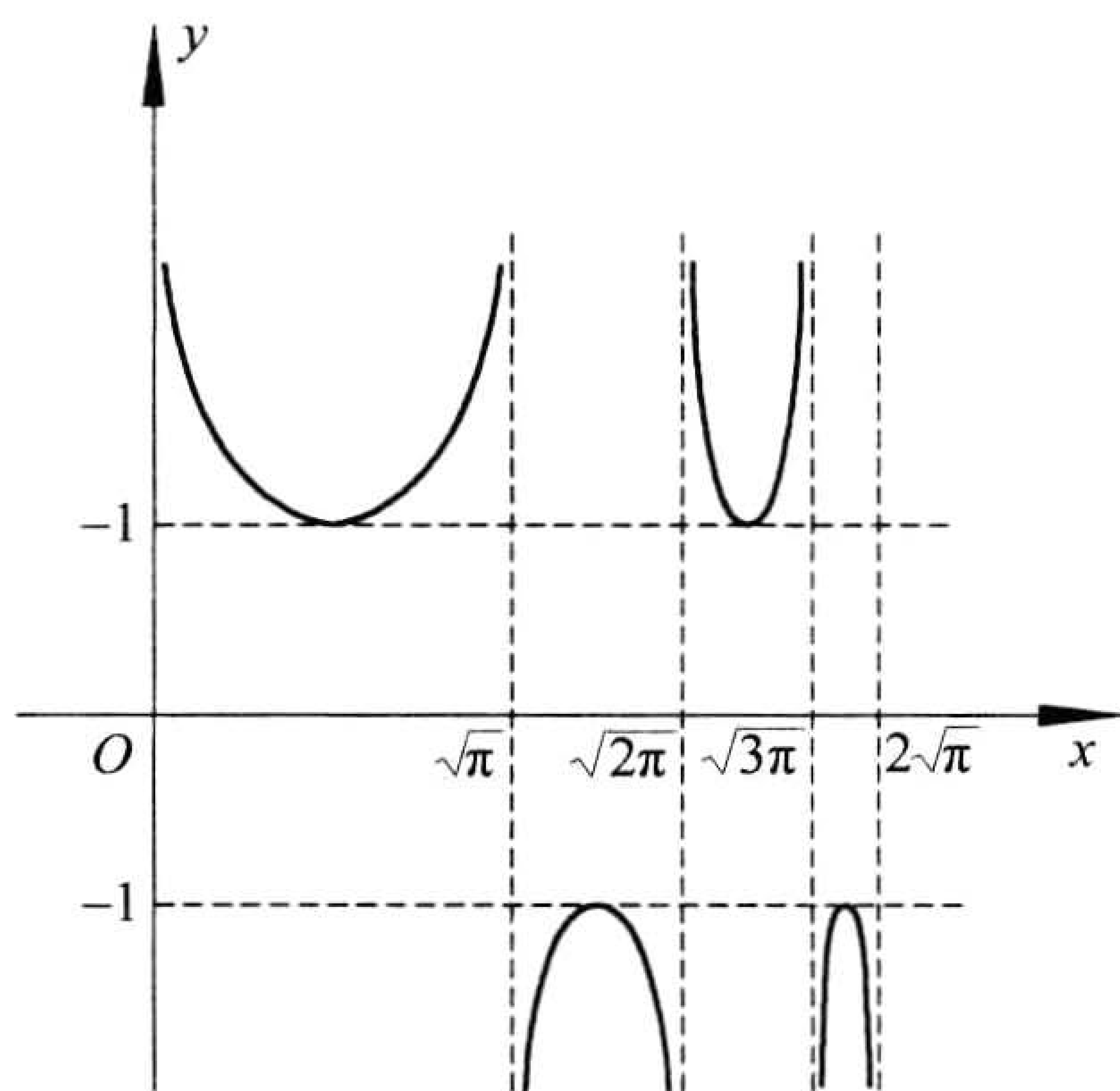


图 1.290

【716】 $y=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 $x=-1$ 和 $x=-3$ 为无穷型不连续点.定义域为 $x<-1$ 或 $x>3$.

当 $x<-\frac{3}{2}$ 时,$0<\frac{x^2}{x^2-2x-3}<1$,故 $\ln\frac{1}{(x+1)(x-3)}<0$.

当 $x>-\frac{3}{2}$ 时,$\frac{x^2}{x^2-2x-3}>1$,故 $\ln\frac{1}{(x+1)(x-3)}>0$.

当 $x\to\infty$ 时,$y\to0$.如图 1.291 所示.

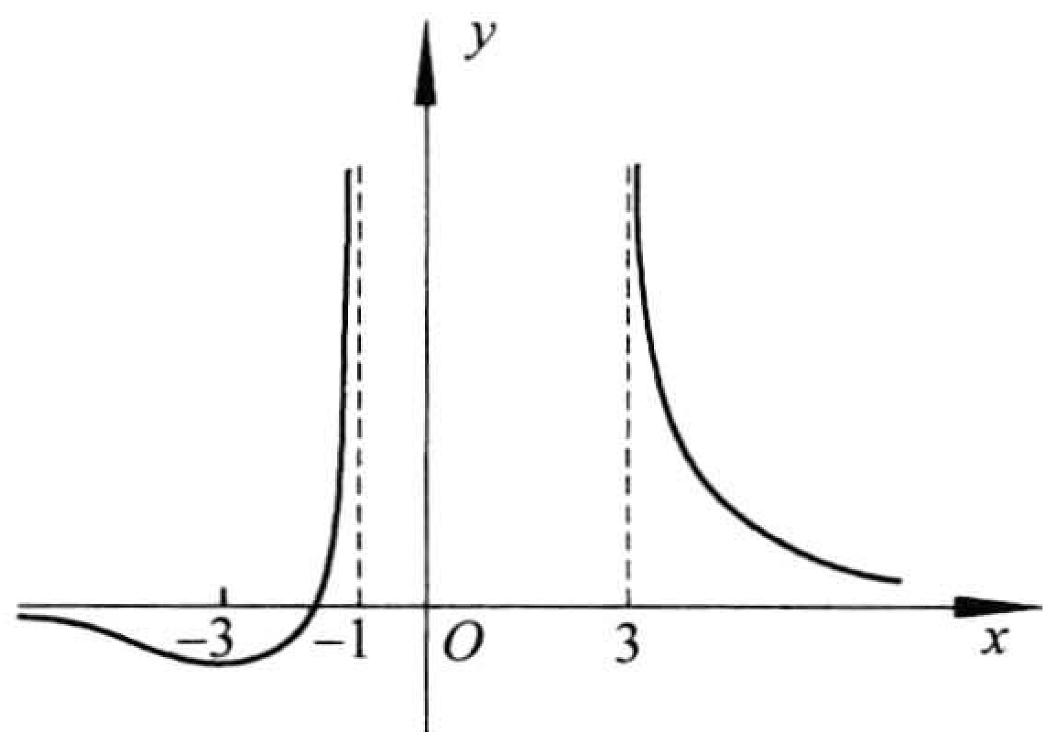


图 1.291

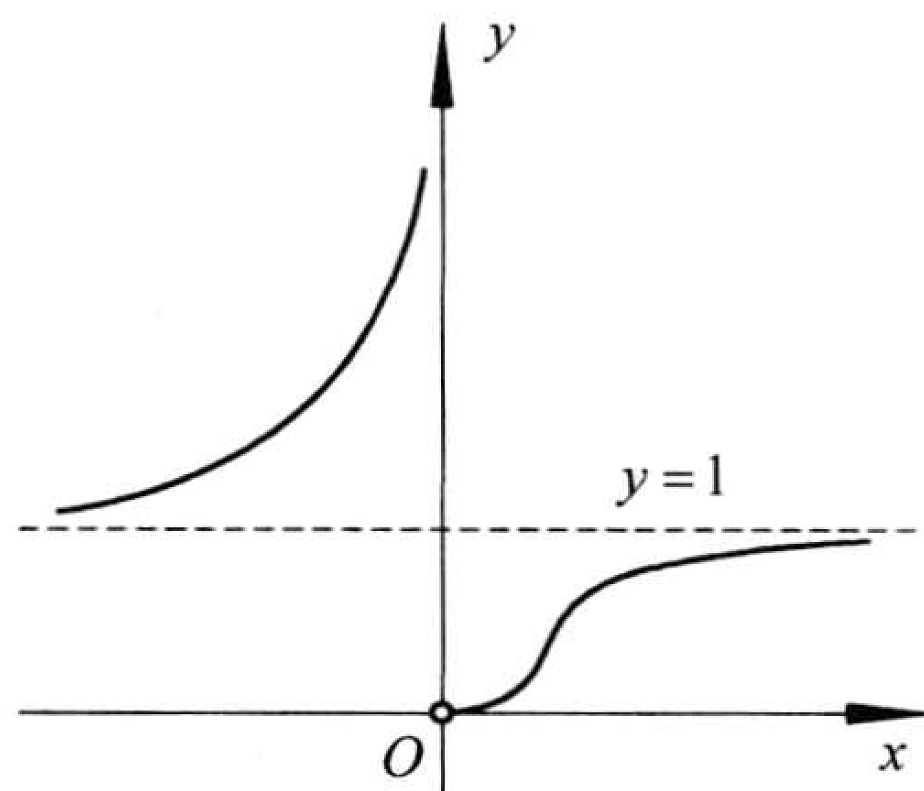


图 1.292

【717】 $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.$\lim\limits_{x\to\infty}y=1$, $\lim\limits_{x\to+0}y=0$, $\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$.

如图 1.292 所示.

【718】 $y=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 因$\lim\limits_{x\to\infty}y=1$,故 $x=0$ 为"可去"的不连续点.图像关于 Oy 轴对称,如图 1.293 所示.

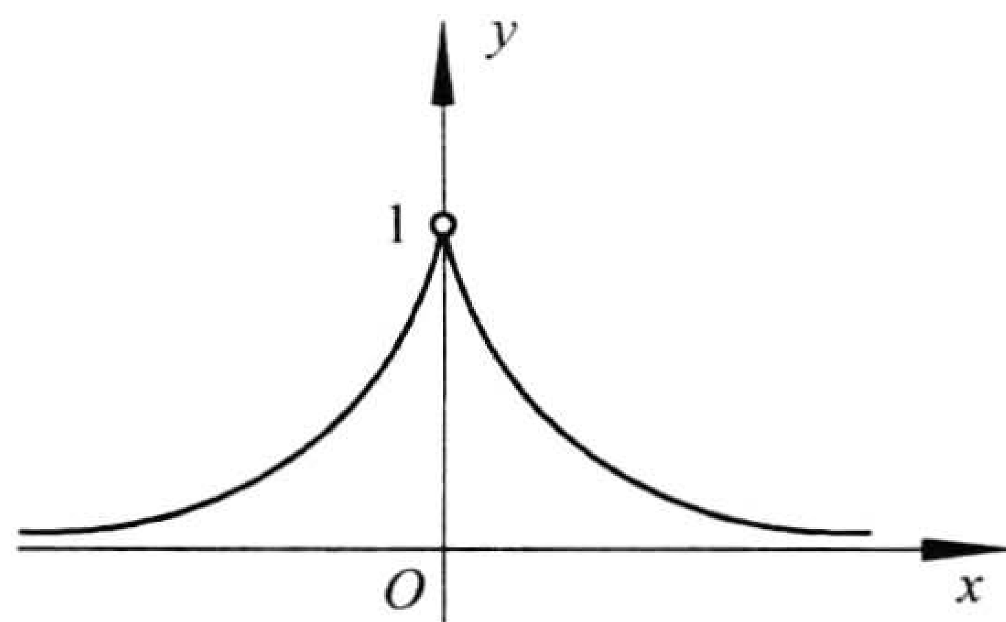


图 1.293

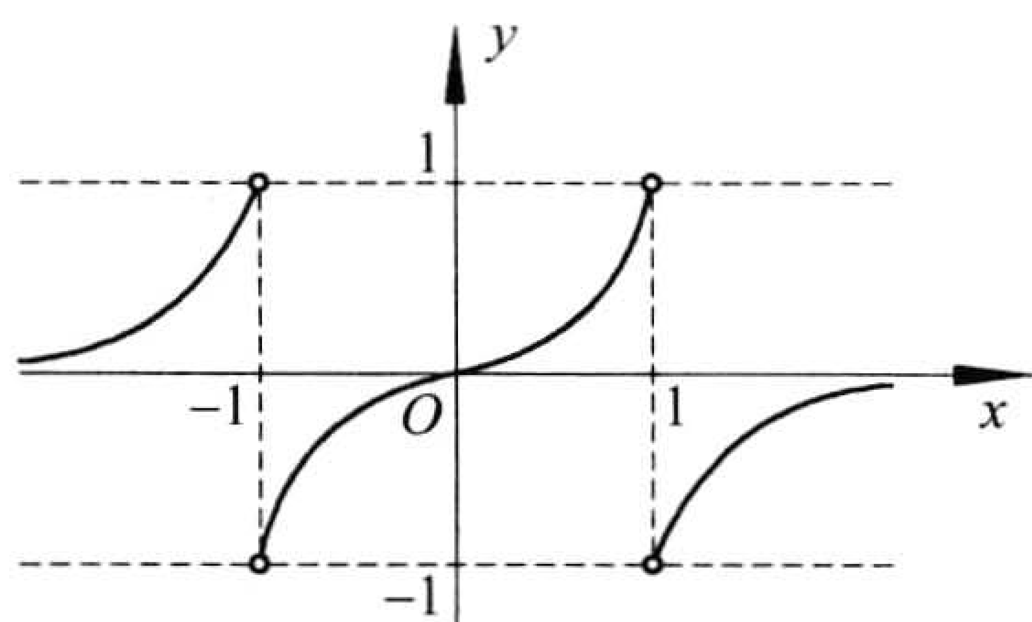


图 1.294

【719】 $y=\text{th}\,\dfrac{2x}{1-x^2}$.

解 $x=\pm1$ 为第一类不连续点. $\lim\limits_{x\to1-0}y=1$, $\lim\limits_{x\to1+0}y=-1$.

图像关于原点对称,如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图像:

【720】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x\geqslant0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

$x=1$ 为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

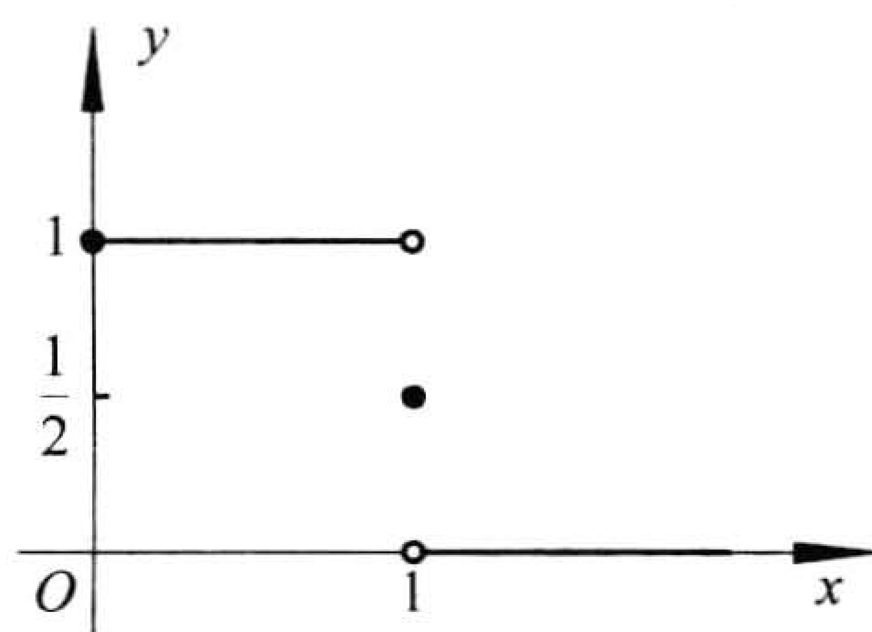


图 1.295

【721】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

提示 注意到 $y=\text{sgn}x$,即知点 $x=0$ 为函数的第一类不连续点.

解 $y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

即 $y=\text{sgn}x$. $x=0$ 为第一类不连续点. 如图 1.296 所示.

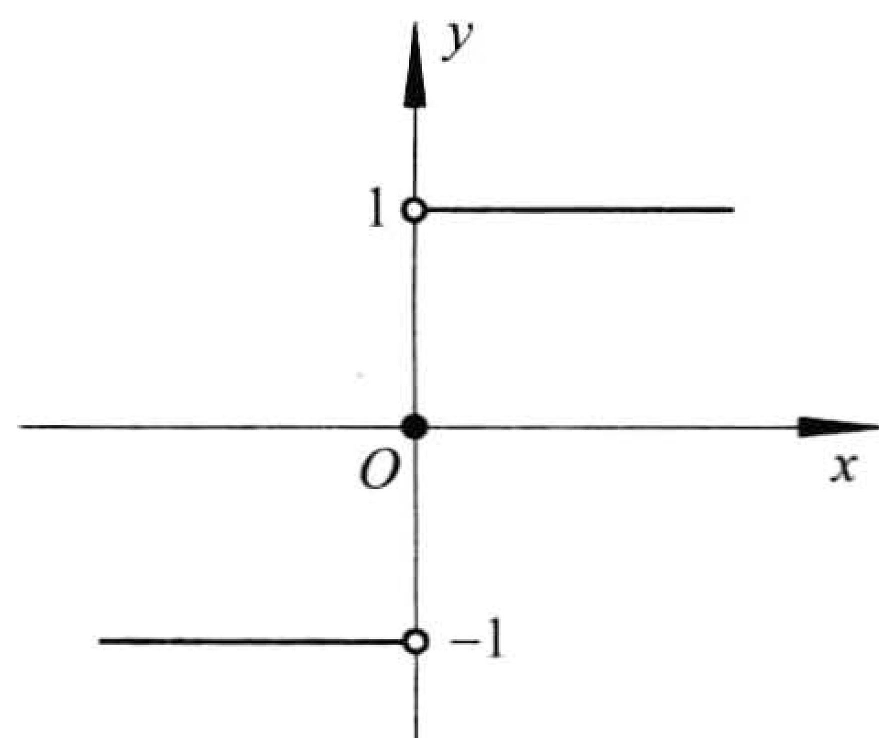


图 1.296

【722】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$ 处处连续.

如图 1.297 所示.

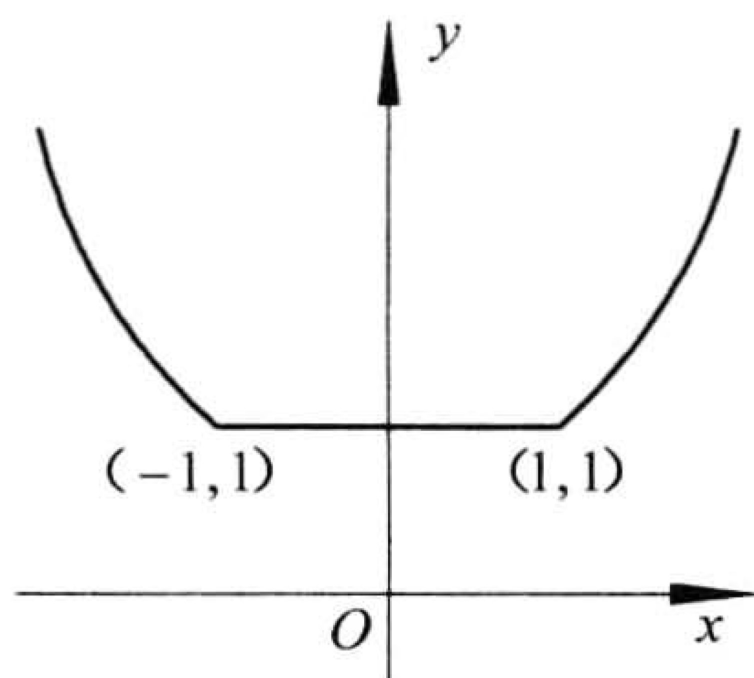


图 1.297

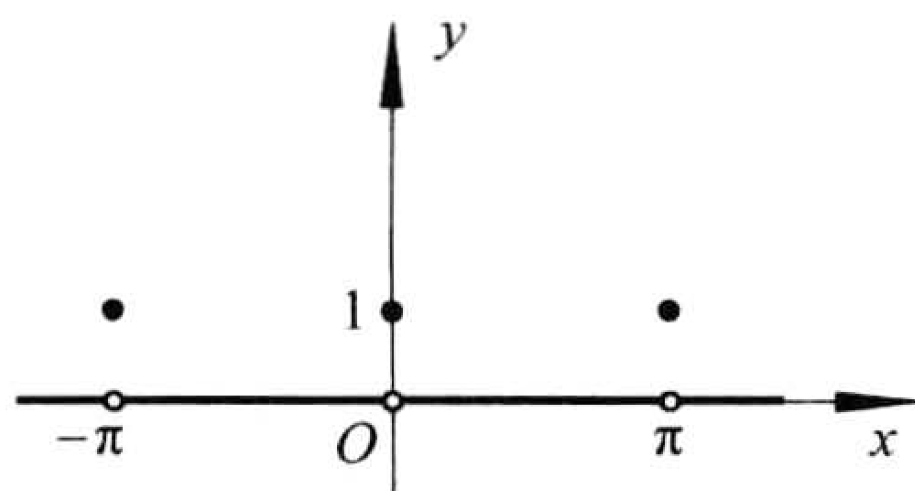


图 1.298

【723】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

解 $y=\begin{cases}1, & x=k\pi,\\ 0, & x\neq k\pi.\end{cases}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. $x=k\pi$ 为第一类不连续点.

如图 1.298 所示.

【724】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

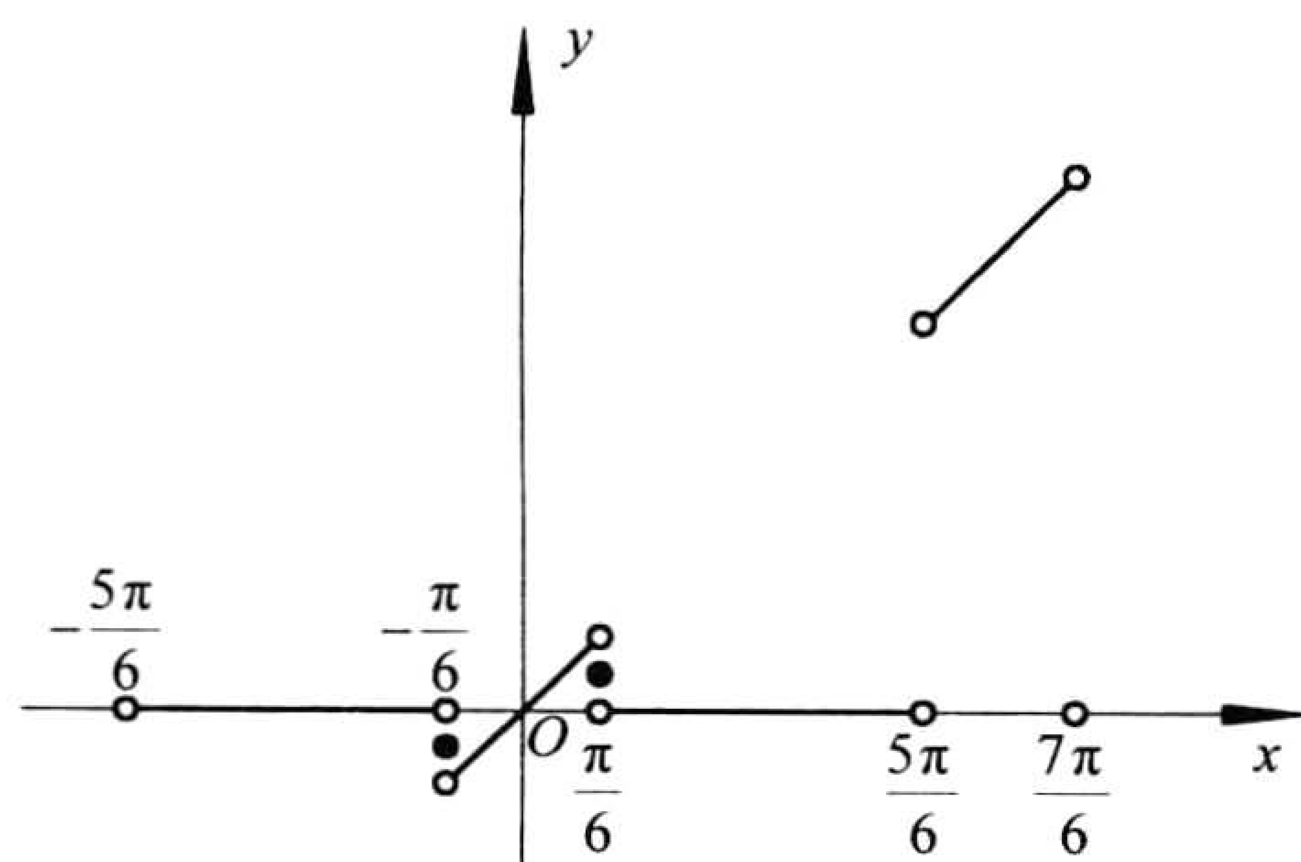


图 1.299

解 $y=\begin{cases} x, & |x-k\pi|<\dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{x}{2}, & x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6}. \end{cases} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

【725】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\arctan(n\cot x)]$.

解 $y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}x, & k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2}x, & k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi. \end{cases} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=\dfrac{k\pi}{2}\ (k\neq0)$为第一类不连续点.

如图 1.300 所示.

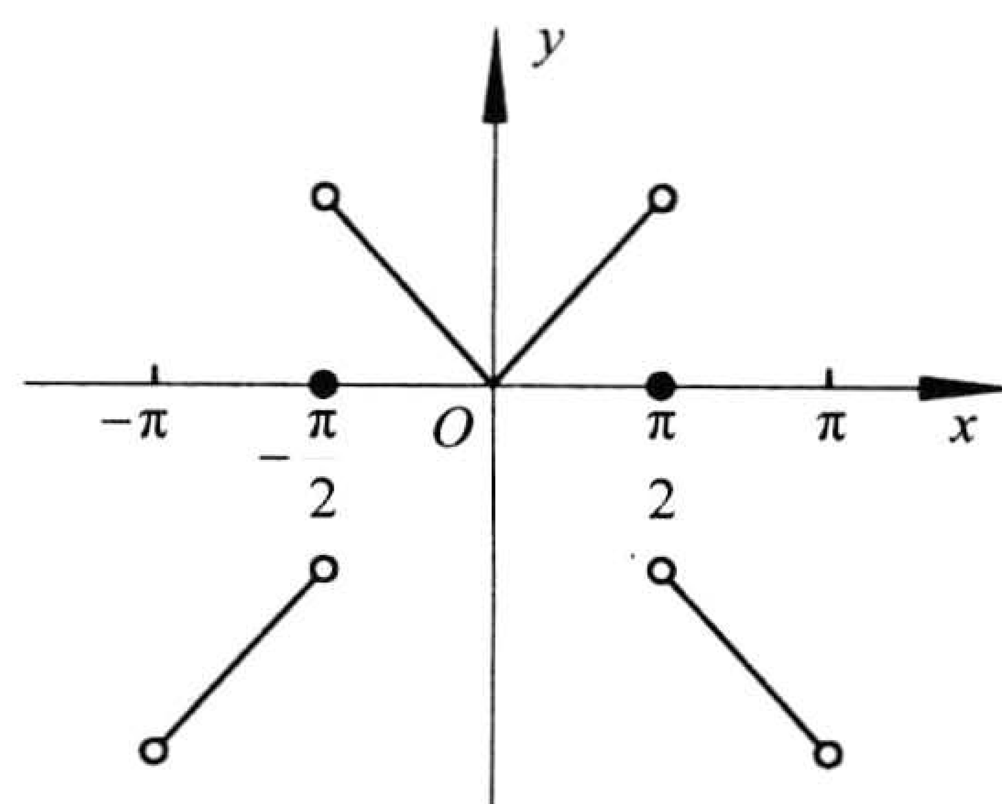


图 1.300

【726】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

解 $y=\begin{cases} x, & x\leqslant0, \\ x^2, & x>0. \end{cases}$ 处处连续,如图 1.301 所示.

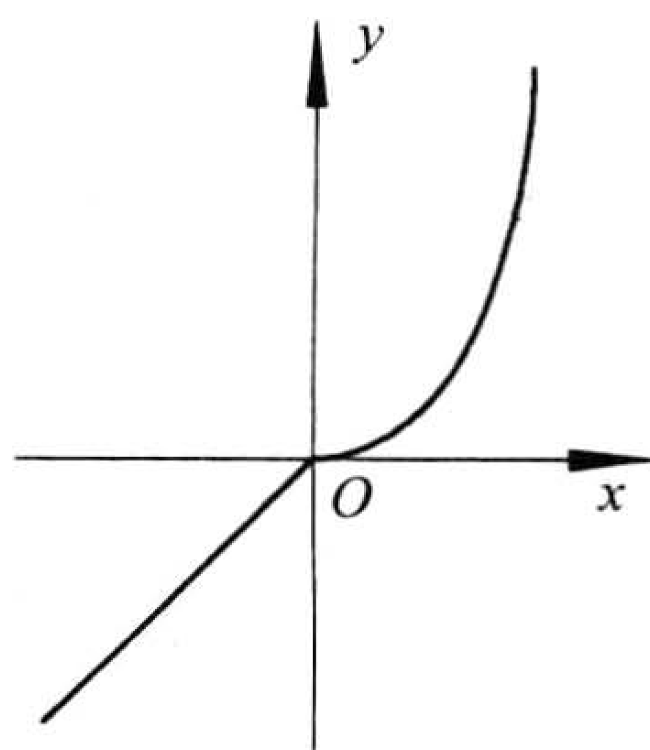


图 1.301

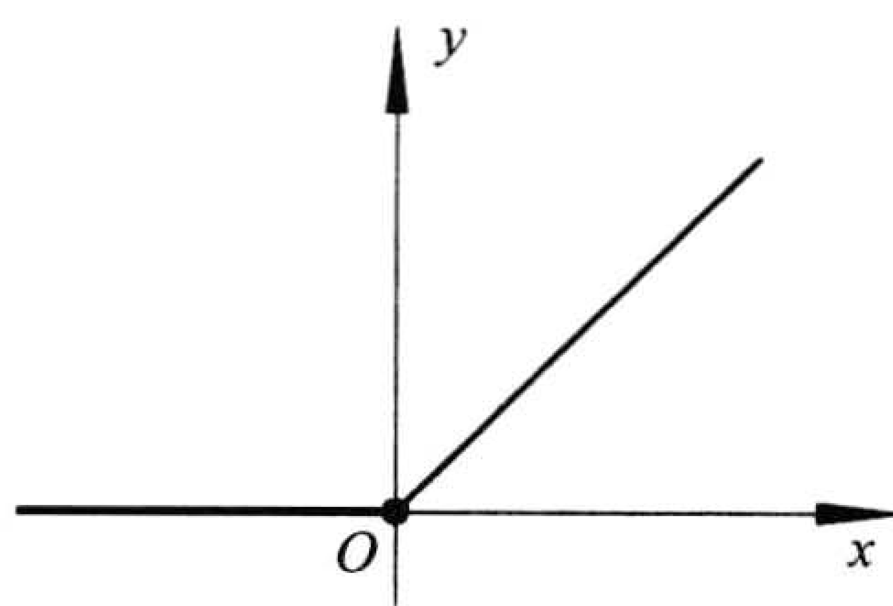


图 1.302

【727】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^{t})}$.

解 $y=\begin{cases} 0, & x\leqslant0, \\ x, & x>0. \end{cases}$ 处处连续,如图 1.302 所示.

【728】 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\text{th}\,tx$.

解 $y=\begin{cases} -(1+x), & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1+x, & x>0. \end{cases}$

$x=0$ 为第一类不连续点,如图 1.303 所示.

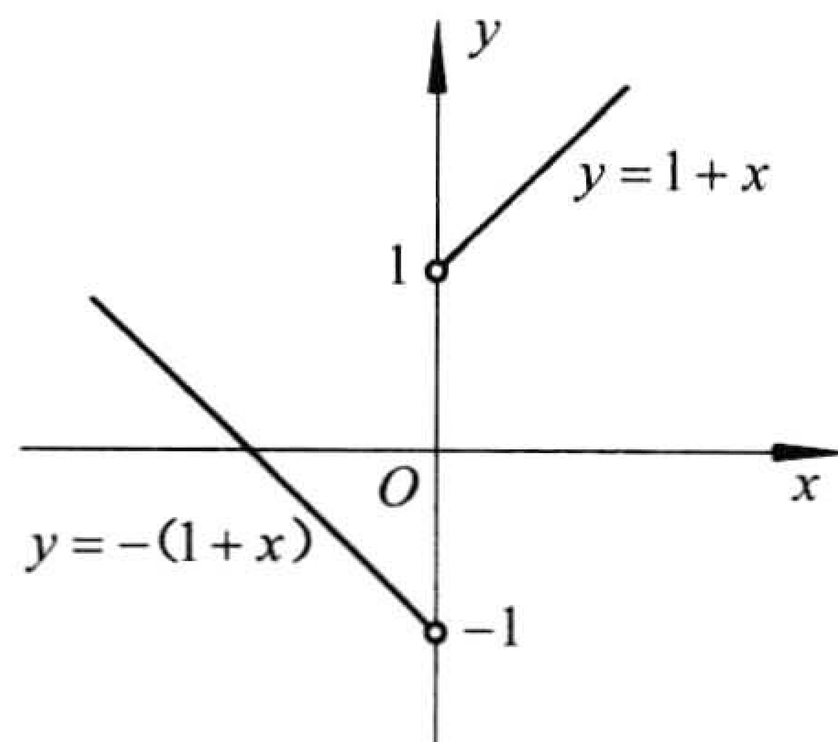


图 1.303

【729】 函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 是否连续？

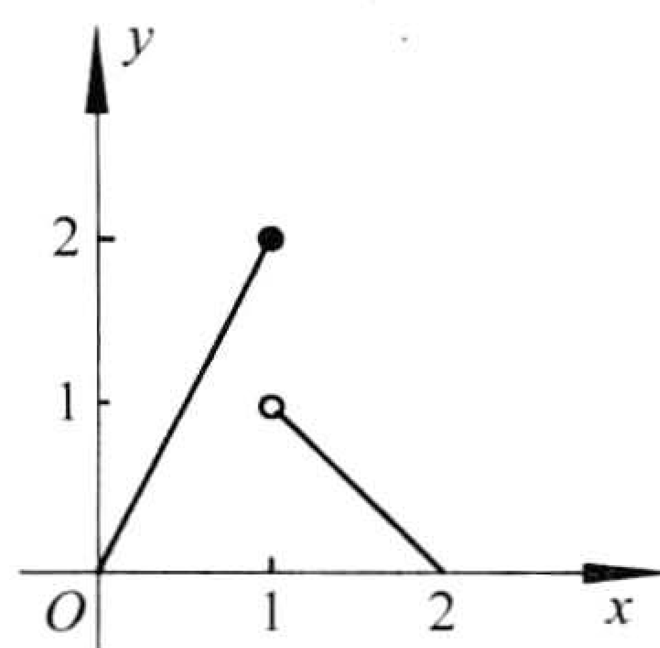


图 1.304

解 $x=1$ 为第一类不连续点，在$[0,2]$上 $f(x)$不是连续函数.

如图 1.304 所示.

【730】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 怎样选择数 a，可使函数 $f(x)$连续？

提示 注意到 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=a$ 及 $f(0)=0$，即知应选择 $a=1$ 时，方能保证函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

解 因 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=a$ 及 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=1$，而 $f(0)=a$，故当 $a=1$ 时，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续；至于当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$显然连续.

于是，我们选择数 $a=1$，则函数$f(x)$在整个数轴上连续.

如图1.305所示.

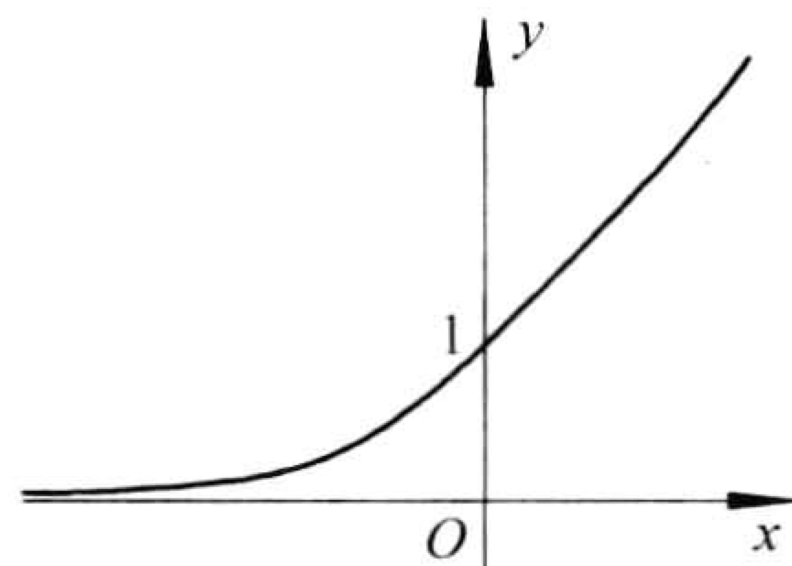


图 1.305

【731】 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1;\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases}\cot^2\pi x, & x\text{ 为非整数},\\ 0, & x\text{ 为整数};\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

解 (1) 连续函数.

(2) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(3) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(4) $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点.

(5) $x\neq k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类不连续点.

【732】 函数 $d=d(x)$是数轴 Ox 上的点 x 与由线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $2\leqslant x\leqslant 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式，作出其图像并研究其连续性.

解

$$d=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant\dfrac{3}{2},\\ 2-x, & \dfrac{3}{2}<x<2,\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ x-3, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

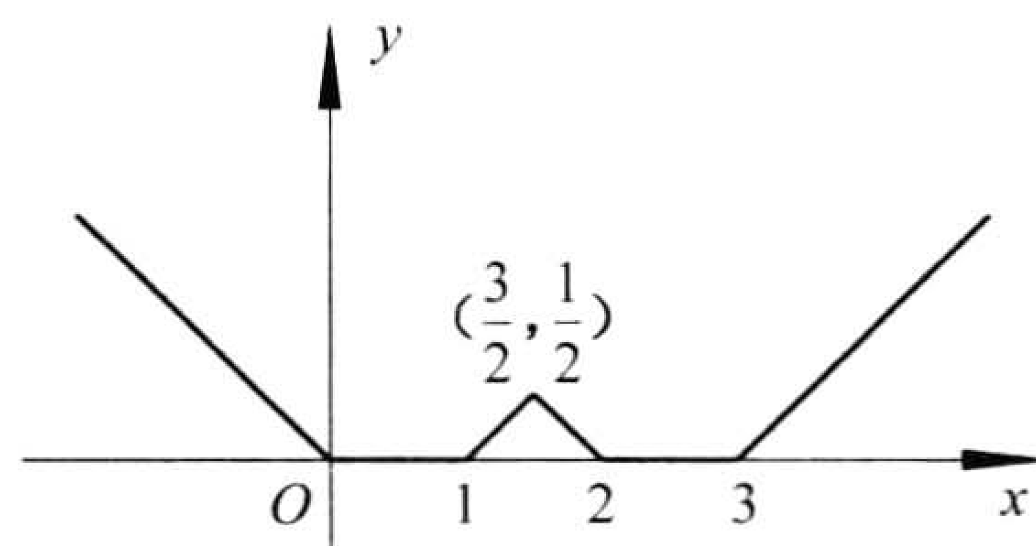


图 1.306

处处连续，如图 1.306 所示.

【733】 图像 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图1.307).

函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$是图像 E 介于平行线 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之间的那一部分面积；而函数 $b=b(y)$ $(0\leqslant y<+\infty)$是用平行线 $Y=y$ 去截图像所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式，作出它们的图像并研究其连续性.

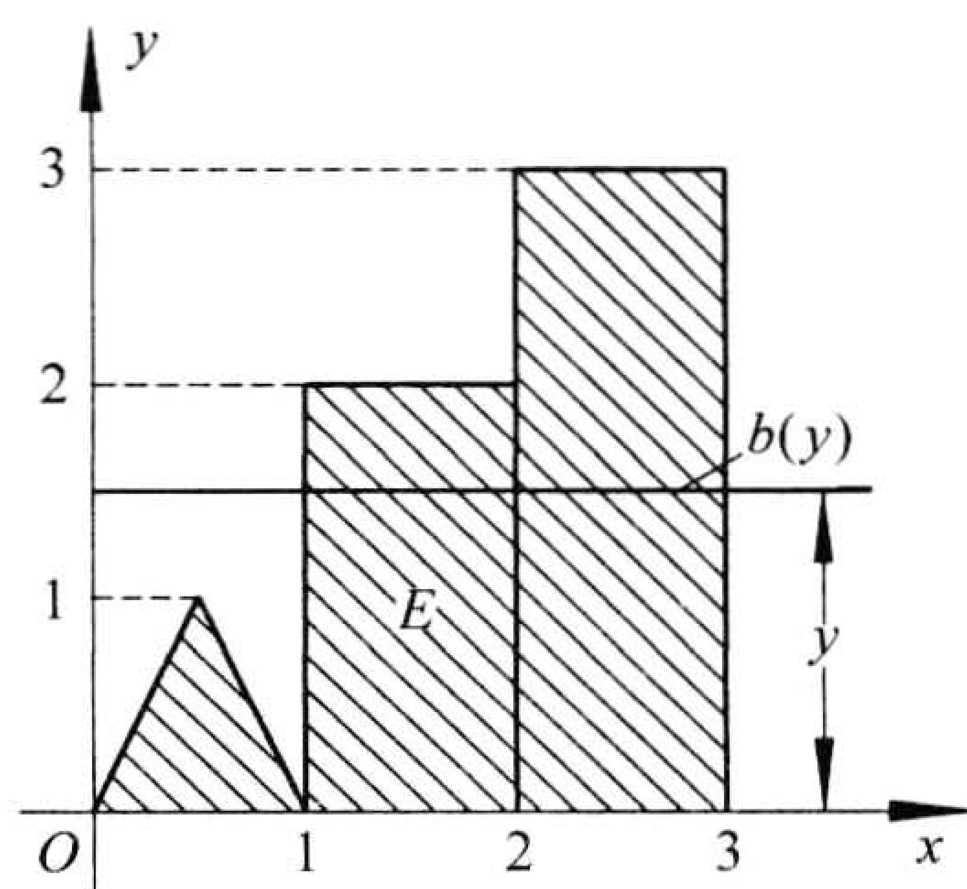


图 1.307

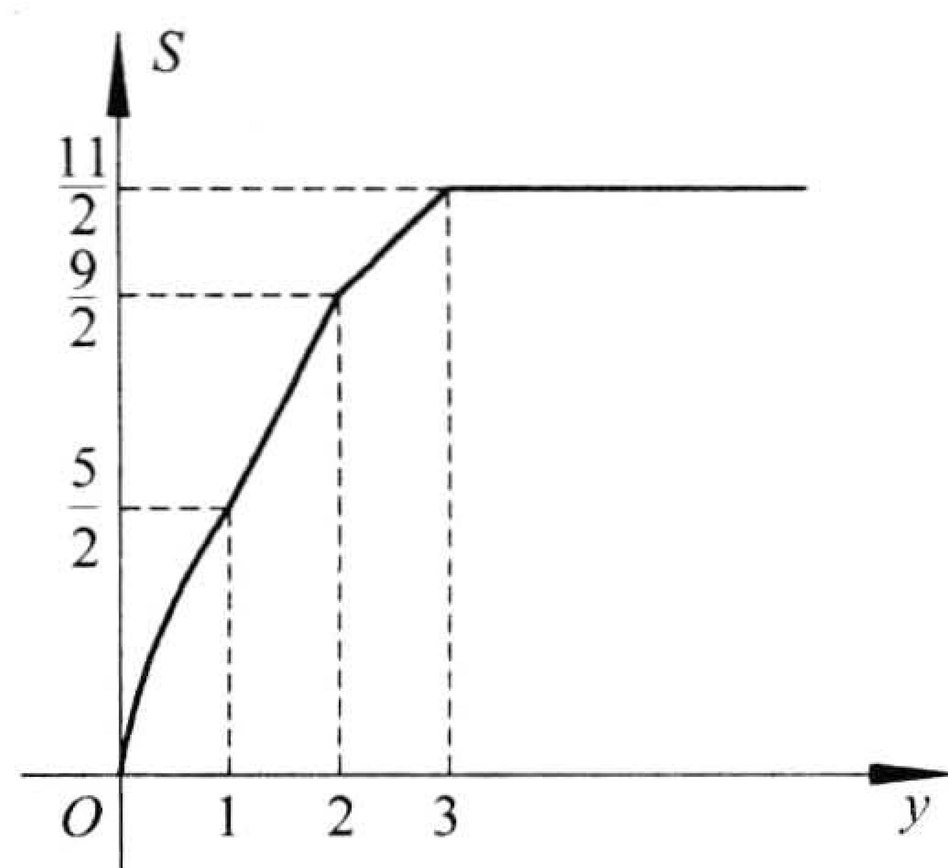


图 1.308

解

$$S=\begin{cases}3y-\dfrac{y^2}{2}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}+2y, & 1<y\leqslant 2,\\ \dfrac{5}{2}+y, & 2<y\leqslant 3,\\ \dfrac{11}{2}, & 3<y<+\infty.\end{cases}$$

处处连续，如图 1.308 所示.

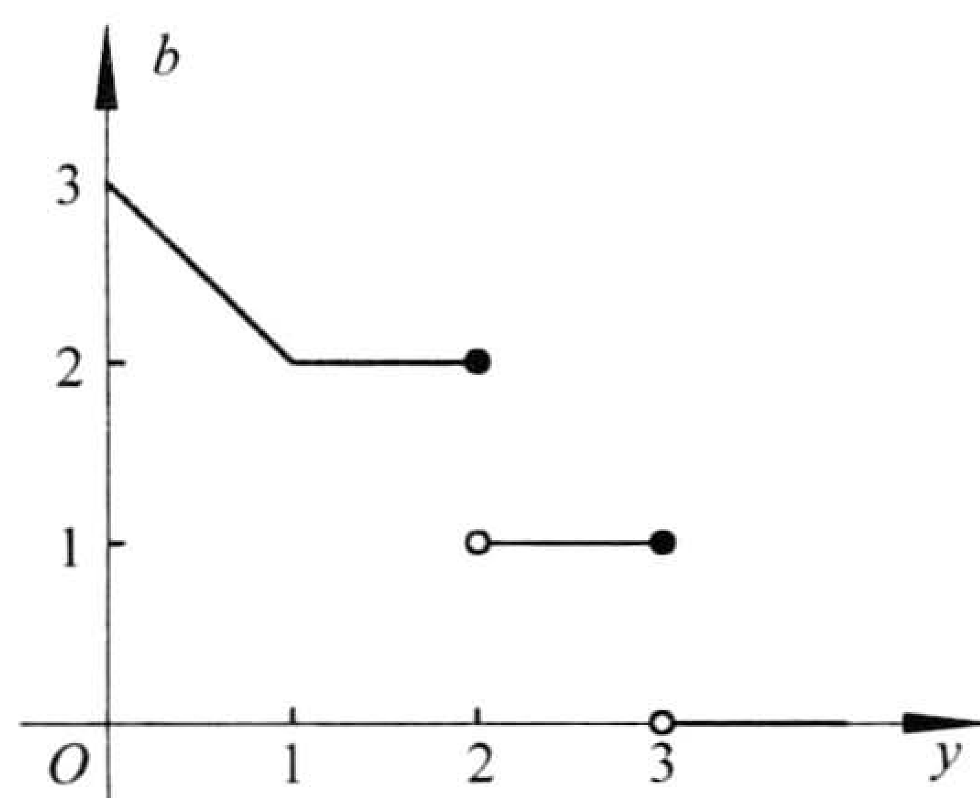


图 1.309

对于函数 $b=b(y)$ 根据假设，则有如下解析表示式：

$$b=\begin{cases}3-y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2, & 1<y\leqslant 2,\\ 1, & 2<y\leqslant 3,\\ 0, & 3<y<+\infty.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点，如图 1.309 所示.

【734】 证明：狄利克雷函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\}$$

对于每一个 x 值都是不连续的.

证明思路 令 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!x)$. 当 x 为有理数时，即 $x=\dfrac{q}{p}$（p,q 为互素的整数，且 $p>0$）. 因此，当 $m>p$ 时，有 $f(m,n)=1$，于是，$\chi(x)=1$；当 x 为无理数时，则对任一固定的 m，有 $|\cos(\pi m!x)|<1$，于是，$\chi(x)=0$. 由此可知

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

设 $x_0\in\mathbf{R}$，由于 x_0 的任何邻域中都有无穷多个有理数和无穷多个无理数，故极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\chi(x)$ 不存在，从而 $\chi(x)$ 在任一点 x_0 均不连续.

证 记 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!x)$.

当 x 为有理数时，总可认为 $m>p$，其中 $x=\dfrac{q}{p}$（p,q 为互素的整数）. 于是，$f(m,n)=1$，故此时 $\chi(x)=1$；当 x 为无理数时，则对任一固定的 m 而言，$|\cos(\pi m!x)|<1$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0$，故此时 $\chi(x)=0$. 总之，

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

由实数的稠密性可知，对于 x 的任意值在其任一邻域内含有无限个有理数和无理数，因而 $\chi(x)$ 的值总

在 1 和 0 这两个数中取一个. 这样,$\chi(x)$的极限就不存在. 于是,当 x 取任一值时,$\chi(x)$都是不连续的.

【735】 设有函数 $f(x)=x\cdot\chi(x)$.

式中 $\chi(x)$为狄利克雷函数(参阅 734 题),研究此函数 $f(x)$的连续性. 作出这函数的草图.

解

$$x\cdot\chi(x)=\begin{cases}x, & x\ 为有理数,\\ 0, & x\ 为无理数及\ 0.\end{cases}$$

因此,$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\chi(x)=0$ 等于在 $x=0$ 处的函数值,故当 $x\neq 0$ 时,$x\cdot\chi(x)$不连续,而当 $x=0$ 时,$x\cdot\chi(x)$连续,如图 1.310 所示.

图 1.310

【736】 证明:黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},其中\ m\ 和\ n\ 为互素的数,\\ 0, & x\ 为无理数.\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时不连续的,而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证 不失一般性,我们仅就区间$[0,1]$讨论,图 1.311 为$f(x)$在 $x\in[0,2]$时的略图.

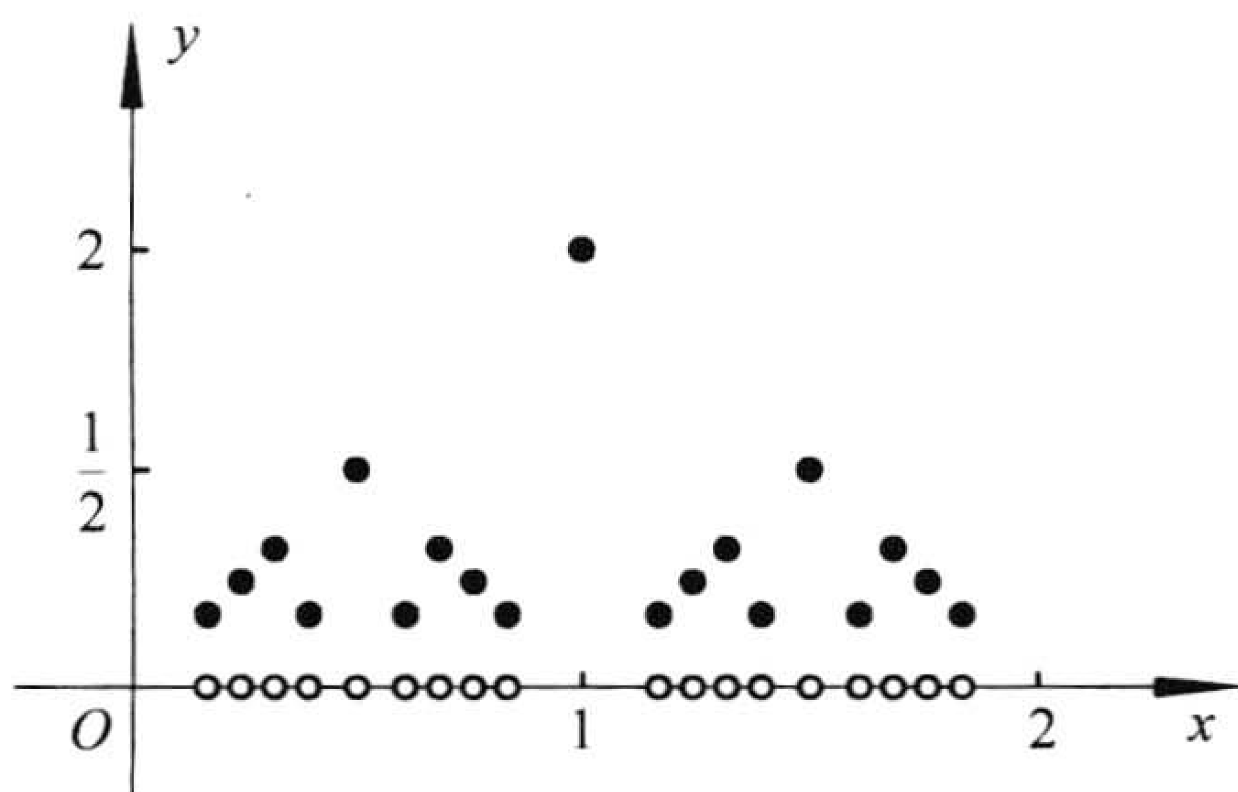


图 1.311

对于任意的 $x_0\in[0,1]$来说,若任取 $\varepsilon>0$,则满足不等式$n<\dfrac{1}{\varepsilon}$的正整数 n 至多只有有限个,即在$[0,1]$中至多只有有限个有理数$\dfrac{m}{n}$,使得 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{n}>\varepsilon$. 因而我们可以取 $\delta>0$,使得 x_0 的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内不含有这样的有理数(若 x_0 为有理数,则可能除去 x_0). 于是,只要 $0<|x-x_0|<\delta$,不论 x 是否为有理数,都成立 $|f(x)|<\varepsilon$. 即证明了对于$[0,1]$中任意点 x_0,都成立

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 为无理数,则 $f(x_0)=0$,可见 $f(x)$在 x_0 连续;若 x_0 是有理数,则 $f(x_0)\neq 0$,函数 $f(x)$在 x_0 点有"可去"的间断,即点 x_0 为 $f(x)$的"可去"的不连续点.

【737】 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+1}, & x\ 为既约有理分数\dfrac{m}{n}\ (n\geqslant 1),\\ |x|, & x\ 为无理数\end{cases}$$

的连续性并作出此函数的草图.

证 当 $x<0$ 时,$f(x)$显然不连续,而对于正有理数 $\xi=\dfrac{m}{n}$,$f(\xi)=\dfrac{m}{n+1}$. 若我们取一列无理数 x_k 趋于ξ,则$\lim\limits_{x_k\to\xi}f(x_k)=\dfrac{m}{n}\neq\dfrac{m}{n+1}$,故$f(x)$在正有理数点也不连续. 当$\xi$为正无理数时,由于对任意的 $\varepsilon>0$,满足$\dfrac{1}{q}>\varepsilon$ 的正整数 q 至多只有有限个. 与 736 题类似可证 $f(x)$在点 $x=\xi$ 连续. 如图 1.312 所示.

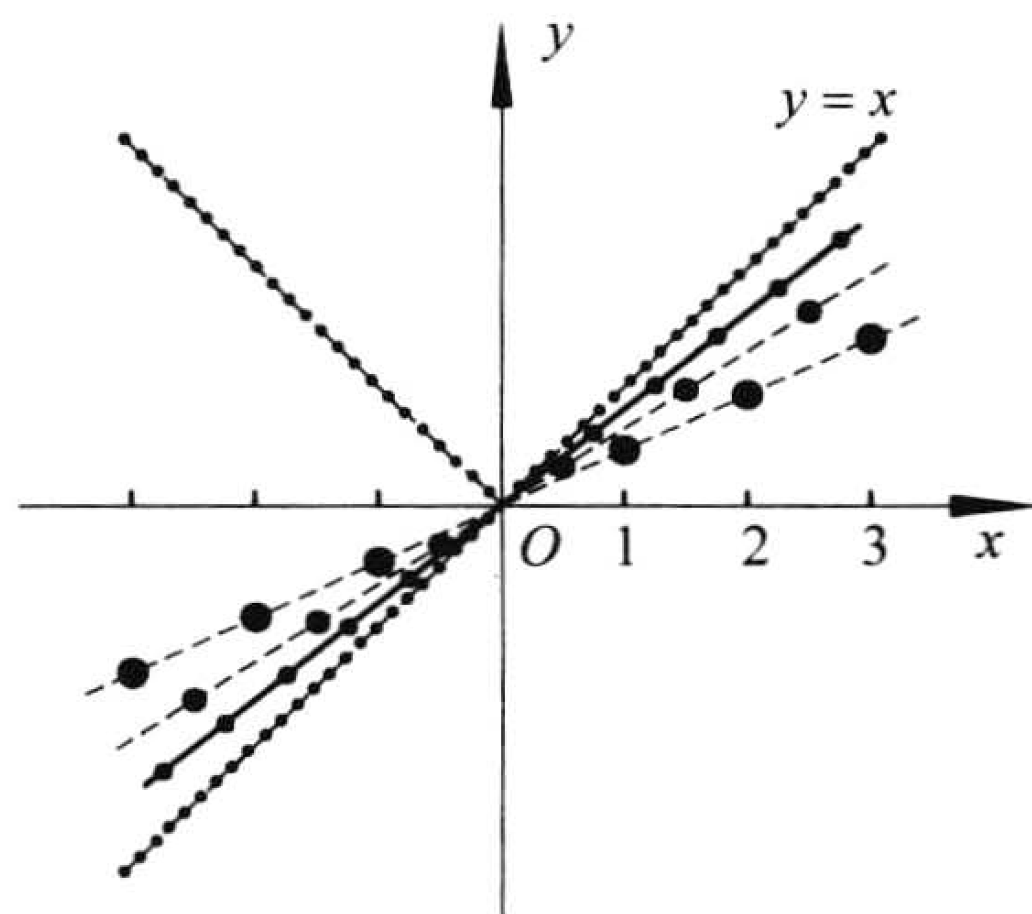


图 1.312

【738】 函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 当自变量 x 取一切非零值时都有定义. 为了使此函数在 $x=0$ 时连续,应当以什么数值作为函数在点 $x=0$ 的值?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,所以,应取 $f(0)=\dfrac{1}{2}$,那么,$f(x)$ 当 $x=0$ 时是连续的.

【739】 证明:无论怎样选取数 $f(1)$,函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 时都是不连续的.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=+\infty$,所以,我们无法选择 $f(1)$ 使之成为连续的.

【740】 下列函数 $f(x)$ 当 $x=0$ 时没有意义,定义 $f(0)$ 的值,使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; (2) $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{x}$; (3) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$;

(4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; (5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$; (6) $f(x)=x^x\ (x>0)$;

(7) $f(x)=x\ln^2 x$.

提示 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$.

(3)(4)(5)(6)(7)均仿(1)及(2).

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{3}{2}$, 故取 $f(0)=\dfrac{3}{2}$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$,故取 $f(0)=2$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 故取 $f(0)=0$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, 故取 $f(0)=\mathrm{e}$.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$, 故取 $f(0)=0$.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$, 故取 $f(0)=1$.

(7) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln^2 x=0$, 故取 $f(0)=0$.

【741】 设:(1)函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的;(2)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的,则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

提示 (1)用反证法易证不连续.

(2) 不. 例如, $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 及 $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

解 (1) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的. 事实上,设 $F(x)=f(x)+g(x)$.

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$,如果 $F(x)$ 在 x_0 连续,则有

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}[F(x)-f(x)]=\lim_{x\to x_0}F(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)=F(x_0)-f(x_0)=g(x_0).$$

因此若当 $g(x_0)$ 有意义,则 $g(x_0)=F(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,这与假设是矛盾的,故 $F(x)$ 在点 x_0 不连续;若 $g(x_0)$ 没有意义,那么当然它在 x_0 点不连续.

(2) 不. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}\quad 及\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续,但其和 $f(x)+g(x)\equiv 0$ 却处处连续.

【742】 设:(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,而函数 $g(x)$ 在点 x_0 不连续;(2)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$

二者都是不连续的，则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必不连续？举出适当的例子.

提示 (1) 不. 例如，$f(x)=0$ 及 $g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) 不. 例如，$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

解 (1) 不. 例如，

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases} \quad 及 \quad f(x)=0.$$

它们满足假设条件，其中 $f(x)$ 处处连续，而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 处处连续.

(2) 不. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases} \quad 及 \quad g(x)=f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续，但其乘积 $f(x)g(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【743】 可否断定不连续函数的平方仍为不连续函数？举出处处不连续但其平方连续的函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(2)之例.

又对于函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x 为有理数,\\ 1, & x 为无理数,\end{cases}$ 处处不连续，但平方后所得函数 $f^2(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【744】 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x^2$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$；

(3) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x-[x]$.

解 (1) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续；而 $g[f(x)]=\begin{cases}2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点不连续.

(2) 因为 $g(x)=x(1-x^2)$ 当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时为正，而当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时为负，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<-1,\\ 0, & x=-1,\\ -1, & -1<x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\\ -1, & x>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1, x=0, x=1$ 处不连续. 而 $g[f(x)]\equiv 0$ 却处处连续.

(3) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续. $g[f(x)]\equiv 1$ 也处处连续.

【745】 设

$$f(u)=\begin{cases}u, & 0<u\leqslant 1,\\ 2-u, & 1<u<2,\end{cases} \qquad \varphi(x)=\begin{cases}x, & x 为有理数,\\ 2-x, & x 为无理数.\end{cases}$$

其中 $0<x<1$.

研究复合函数 $y=f(u)$ 的连续性，其中 $u=\varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时，$u=x$，且 $0<u<1$，故 $f(u)=x$；当 x 为无理数时，$u=2-x$ 且 $1<u<2$，故 $f(u)=2-u=x$. 从而，$f[\varphi(x)]\equiv x$ 处处连续.

【746】 证明：若 $f(x)$ 为连续函数，则下列函数也是连续的：$F(x)=|f(x)|$.

证 设 x_0 为任一连续点，则对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 由

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)| \quad 知 \quad \big||f(x)|-|f(x_0)|\big|<\varepsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续，由点 x_0 的任意性可知，$F(x)$ 也是连续的.

【747】 证明：若函数 $f(x)$ 是连续的，则函数

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & f(x)>c.\end{cases}$$

（式中 c 为任意的正数）也是连续函数.

提示 $f_c(x)=\frac{1}{2}(|c+f(x)|-|c-f(x)|)$.

证 易知 $f_c(x)=\frac{1}{2}(|c+f(x)|-|c-f(x)|)$. 于是，利用 746 题的结果，即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

【748】 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0\in[a,b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon\geqslant m(x_0)-\varepsilon$.

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时，$f(x)\geqslant m(x)>m(x_0)-\varepsilon$. 由此可知当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的，故 $m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$（当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时）.

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续，不妨设 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在点 $x=x_0$ 达到，即 $m(x_0)=f(x_0)$（否则，若 $m(x_0)=f(x_1)$，$a\leqslant x_1<x_0$. 则显然知，当 $x_1<x<x_0$ 时 $m(x)\equiv m(x_0)$，从而左连续）. 任给 $\varepsilon>0$. 仿上述，存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=m(x_0)+\varepsilon,$$

因此，$m(x)<m(x_0)+\varepsilon$，从而，$m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\varepsilon$ （当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时）. 由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

【749】 证明：若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的，则函数 $\varphi(x)=\min[f(x),g(x)]$ 和 $\psi(x)=\max[f(x),g(x)]$ 也是连续的.

证 由 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$,

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

利用 746 题的结果，即知 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续的.

【750】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并有界，证明：函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是左连续的. 而函数

$$\overline{m}(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad \overline{M}(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是右连续的*).

证 设 $x_0\in(a,b]$，要证 $m(x)$ 在 x_0 左连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故 $m(x)$ 恒为有限. 任给 $\varepsilon>0$，必存在一点 $\xi_0\in[a,x_0)$，使得 $f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon$. 于是，当 $\xi_0<x<x_0$ 时，必有

$$m(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon,$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上也为左连续.

*） $\overline{m}(x)$和$\overline{M}(x)$在$[a,b]$上右连续的结论是错误的，今举反例证明之. 例如，对于有界函数

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant p,\\ 0, & p<x\leqslant b.\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}-1, & a\leqslant x\leqslant p,\\ 0, & p<x\leqslant b.\end{cases}$$

分别有$\overline{m}(x)=f_1(x)$，$\overline{M}(x)=f_2(x)$，显然它们在点p不是右连续的.

若定义$\overline{m}(x)=\inf\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$，$\overline{M}(x)=\sup\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$则可证明$\overline{m}(x)$与$\overline{M}(x)$在$[a,b]$上右连续.

【751】 证明：若函数$f(x)$在区间$a\leqslant x<+\infty$上连续，且有有限的$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则此函数在已知区间上是有界的.

证 记$A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，取$\varepsilon=1$，则存在$X>a$，使当$x>X$时，恒有$|f(x)|<|A|+1$，又因$f(x)$在$[a,X]$上连续，因而有界，即存在常数$M_1$，使当$x\in[a,X]$时，恒有$|f(x)|<M_1$，取$M=\max(|A|+1,M_1)$，则当$x\in[a,+\infty)$时，恒有$|f(x)|<M$.

【752】 设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界，证明：对于任何数T，可求得数列$x_n\to+\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 不妨设$T>0$，记$g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT)$，$y\geqslant1$. 取一数列$\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$，且当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to0$. 易见，$g(y)$是$[1,+\infty)$上连续且有界的函数，今按下法取$x_1=x_0+k_1T$，使$|g(k_1)|<\varepsilon_1$，如果$g(1)$，$g(2)$异号，则由连续函数介值定理，存在$k_1$，且$1<k_1<2$，使得$|g(k_1)|=0<\varepsilon_1$，这时取$x_1=x_0+k_1T$. 若$g(1)$与$g(2)$同号，且$g(1)$，$g(2)$，$g(3)$，$g(4)\cdots$都是同号的，不妨设它们均大于0，那么我们可以证明，必存在一个正整数$k_1\geqslant1$，使$g(k_1)<\varepsilon_1$. 因为，若对一切正整数n，$g(n)\geqslant\varepsilon_1$，则由$g(y)$的定义，

$$\begin{aligned}&f(x_0+2T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+T),\\&f(x_0+3T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+2T),\\&f(x_0+4T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+3T),\\&\qquad\vdots\\&f(x_0+nT)\geqslant\varepsilon_1+f[x_0+(n-1)T].\end{aligned}$$

则$f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon_1+f(x_0+T)$，这与$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有界矛盾，故必存在正整数$k_1$，使得$|g(k_1)|<\varepsilon_1$，取$x_1=x_0+k_1T$. 然后，取正整数$p_2>k_1+1$，通过考虑$g(p_2)$，$g(p_2+1)$，…的符号；仿上，可取$x_2=x_0+k_2T$，$k_2>k_1+1$，使$|g(k_2)|<\varepsilon_2$. 依此类推，我们就可得到一数列$\{x_n\}$适合要求.

【753】 若$\varphi(x)$和$\psi(x)$为定义于$-\infty<x<+\infty$的连续周期函数，且$\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$. 证明：$\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证 先证明$\varphi(x)$和$\psi(x)$的周期相同，设$\varphi(x)$的周期为p，则$\varphi(x+p)=\varphi(x)$，由于当$x\to\infty$时，$\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to0$即得$\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$以及

$$\lim_{x\to\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]=\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]-\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0.\tag{1}$$

我们再来证明$\psi(x)$的周期也是p，若不然，则至少存在一个x_0，使$\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p)$. 且设$\psi(x)$周期为q，N为任意正整数，$x=x_0+Nq$，以及$\alpha=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|>0$，此时恒有$|\psi(x)-\psi(x+p)|=\alpha$. 但由(1)式，对充分大的$x$，必成立$|\psi(x)-\psi(x+p)|<\alpha$，这显然是矛盾的.

最后证明$\varphi(x)\equiv\psi(x)$，若结论不成立，则至少存在一个x_1，使$\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$. 记$\beta=|\varphi(x_1)-\psi(x_1)|>0$，则对任意$x=x_1+Np$，恒有$|\varphi(x)-\psi(x)|=\beta$，这与$\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$矛盾. 于是，$\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 证毕.

【754】 证明：单调有界函数的一切不连续点皆为第一类不连续点.

证 不妨设$f(x)$为单调增函数，取其定义域A中的任意点x_0，且设x_0不是A的左端点，由于$x<x_0$时显然有$f(x)\leqslant f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 可见若$f(x)$在$x_0$点不连续，则函数在该点只可能有突跃，即第一类不连续点.

【755】 证明：若函数$f(x)$具有下列性质：(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调；(2)取介于$f(a)$和$f(b)$之间所有的数作为其函数值，则此函数在$[a,b]$上连续.

证明思路 用反证法. 设 $x_0\in[a,b]$, $f(x_0)$ 在点 x_0 不连续, 利用 754 题的结果得出矛盾.

证 用反证法, 不妨设单调函数 $f(x)$ 为递增的且在 x_0 不连续 ($x_0\in[a,b]$), 由 754 题知 x_0 只能是第一类不连续点, 则 $f(x_0)-f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)-f(x_0)$ 中至少有一个大于零, 例如 $f(x_0)-f(x_0-0)>0$. 于是, 由函数 $f(x)$ 的单调性知, $f(x)$ 无法取到 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0)$ 之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$ 的性质(2)矛盾, 从而, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

【756】 证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-a}, & x\neq a,\\ 0, & x=a\end{cases}$$

在任意闭区间 $[a,b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中间值, 但在 $[a,b]$ 上并不连续.

证 事实上, 只要 $a<b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取 $[-1,1]$ 之间的一切值, 当然更取 $f(a)=0$ 与 $f(b)$ ($|f(b)|\leqslant 1$) 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

【757】 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续, 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值 ξ, 使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

证 不妨设 $a<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<b$, 此时设 $x_1\neq x_n$; 当 $x_1=x_n$ 结论显然成立.

由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续, 于是, $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上取得最大值和最小值:

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[x_1,x_n].$$

从而有

$$m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant M.$$

由连续函数的性质, 总存在 $\xi\in[x_1,x_n]$, 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

【758】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 且 $l=\varliminf\limits_{x\to a+0}f(x)$ 及 $L=\varlimsup\limits_{x\to a+0}f(x)$.

证明: 对于任意的数 λ, 此处 $l\leqslant\lambda\leqslant L$, 则存在数列 $x_n\to a+0$ $(n=1,2,\cdots)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

证 当 $\lambda=l$ 或 $\lambda=L$ 时结论都是显然的. 因此设 $l<\lambda<L$.

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, $a_n\to a+0$, $b_n\to a+0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=L$. 于是, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $f(a_n)<\lambda$ 及 $f(b_n)>\lambda$.

再由 $f(x)$ 的连续性知, 在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n, 使 $f(x_n)=\lambda$ $(n>N)$.

这样选取的 $\{x_n\}$, 由于 $a_n\to a+0$, $b_n\to a+0$, 故 $x_n\to a+0$. 从而, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

§8. 反函数. 用参数形式表示的函数

1° **反函数的存在及其连续性** 若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质: (1) 在区间 (a,b) 上有定义并连续; (2) 在此区间上是严格单调的, 则存在单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A,B) 上有定义并连续, 而且是严格单调的, 其中

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x)\quad 和\quad B=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

连续函数 $y=f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝, 可被理解为在其有定义的最大区域上满足方程 $f(g(y))=y$ 的任何一个单值连续函数 $x=g(y)$.

2° **以参数形式表示的函数的连续性** 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α,β) 上有定义并且连续, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格单调的, 则方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

在区间 (a,b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中

$$a=\lim_{t\to\alpha+0}\varphi(t) \quad 及 \quad b=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t).$$

【759】 求分式线性函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$的反函数.在怎样的情形下,反函数与已知函数相同?

解 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$解得,反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ 或写成 $x=\dfrac{-yd+b}{yc-a}$.要反函数与已知函数相同,只要

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-xd+b}{xc-a}.$$

解之得 $a+d=0$,此即所求的条件.

【760】 设 $y=x+[x]$,求反函数 $x=x(y)$.

解 若当 $k\leqslant x<k+1$,即当 $2k\leqslant y<2k+1$ 时,$[x]=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,此时 $y=x+k$,即反函数为 $x=y-k$.

【761】 证明:存在唯一的连续函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$满足**开普勒方程** $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

证 由 640 题知数列

$$y_0=x,\quad y_1=x+\varepsilon\sin y_0,\quad y_2=x+\varepsilon\sin y,\quad \cdots\quad y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1},\quad \cdots$$

的极限 $y(x)$为开普勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的唯一的根.现在证明 $y=y(x)$是连续的.我们只要证明当 $x\to x_0$ 时,$y(x)\to y(x_0)$.为此,我们考虑

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_n(x_0)|&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式,即得

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_n(x_0)|&\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)\\&=|x-x_0|\cdot\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,便有 $|y(x)-y(x_0)|\leqslant\dfrac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.于是,显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$.这就证明了 $y(x)$的连续性.

【762】 证明:对于每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$,方程 $\cot x=kx$ 在区间 $0<x<\pi$ 中有唯一连续的根 $x=x(k)$.

证 令 $f(x)=\dfrac{\cot x}{x}$.显然,在$(0,\pi)$上 $\cot x$ 和$\dfrac{1}{x}$都是连续的严格减函数,从而,$f(x)$在$(0,\pi)$上也是连续的严格减函数,并且,很明显

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty.$$

由此可知,对每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$,恰有一个 $x\in(0,\pi)$,使 $f(x)=k$,即 $\cot x=kx$.另外,由于$f(x)=\dfrac{\cot x}{x}$在$(0,\pi)$上是连续的严格减函数,故 $k=f(x)$的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$存在而且是$-\infty<k<+\infty$上的连续的严格减函数.此 $x=x(k)$即方程 $\cot x=kx$ 的根.

综上所述,可知:对任何$-\infty<k<+\infty$,方程 $\cot x=kx$ 在$(0,\pi)$上具有唯一的根 $x=x(k)$,而且 $x(k)$是 $k(-\infty<k<+\infty)$的连续的严格减函数,证毕.

【763】 非单调的函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$可否有单值的反函数?

提示 可以.例如,函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\-x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

解 可以.例如,函数 $y=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\-x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上为单值的,但不是单调的函数,而其反函数仍为此函数本身.

【764】 在什么情形下,函数 $y=f(x)$和反函数 $x=f^{-1}(y)$是同一个函数?

解 为统一坐标起见，我们把 $y=f(x)$ 的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有 $f^{-1}(x)\equiv f(x)$，即 $x=f(f(x))$，这就是所求的条件.

【765】 证明：不连续函数 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$ 及 $\operatorname{sgn}^2x=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$. 于是，反函数在 $|y|\geqslant 1$ 及 $y=0$ 有定义：

$$x=\begin{cases}\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & y\geqslant 1,\\ -\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & y\leqslant -1,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

【766】 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是严格单调的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)\ (a\leqslant x_n\leqslant b)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调下降. 如果结论不成立，则在 (a,b) 内总存在一个 a_1 及数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}>a_1$.

由于 $f(x)$ 严格单调下降，故有

$$f(x_{n_k})<f(a_1)<f(a).$$

于是，$f(a)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leqslant f(a_1)$，得出矛盾，因此，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

求下列函数的反函数的连续单值分支：

【767】 $y=x^2$.

解 反函数的连续单值分枝为 $x=\sqrt{y}\ (0\leqslant y<+\infty)$ 及 $x=-\sqrt{y}\ (0\leqslant y<+\infty)$.

【768】 $y=2x-x^2$.

解 由于 $x^2-2x+y=0$，故 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4y}}{2}=1\pm\sqrt{1-y}$.

于是，连续单值分枝为 $x=1-\sqrt{1-y}$ 及 $x=1+\sqrt{1-y}\ (-\infty<y\leqslant 1)$.

【769】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2y-2x+y=0$，故 $x=\begin{cases}\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

又由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,\quad \lim_{y\to 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续单值分枝为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(-1\leqslant y\leqslant 1)\quad 及\quad x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(0<|y|\leqslant 1).$$

【770】 $y=\sin x$.

解 连续单值分枝为 $x=(-1)^k\arcsin y+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)(|y|\leqslant 1)$.

【771】 $y=\cos x$.

解 连续单值分枝为 $x=2k\pi\pm\arccos y\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)(|y|\leqslant 1)$.

【772】 $y=\tan x$.

解 连续单值分枝为 $x=\arctan y+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)(-\infty<y<+\infty)$.

【773】 证明：连续函数 $y=1+\sin x$ 在区间 $0<x<2\pi$ 内的值域是闭区间.

证 显然，当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 从而，$0\leqslant 1+\sin x\leqslant 2$. 而由于 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2$，$y\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0$. 而 $y=1+\sin x$ 是 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数，故由介值定理知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0<x<2\pi$ 时，y 的值域是闭区间 $[0,2]$.

【774】 证明：等式 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

证 令 $\varphi=\arcsin x$，则得 $\sin\varphi=x$，从而，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=x$.

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\pi$；而在 $[0,\pi]$ 内有唯一的数，它的余弦等于 x，因此，得

$$\frac{\pi}{2}-\varphi=\arccos x,$$

即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

【775】 证明：等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad(x\neq 0)$.

证 当 $x>0$ 时，令 $\varphi=\arctan x$，则得 $\tan\varphi=x$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 又 $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x$，故

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}.$$

因为 $0<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}$，而在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有唯一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故 $\frac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\frac{1}{x}$，即当 $x>0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

当 $x<0$ 时，令 $\varphi=\arctan x$，则得 $\tan\varphi=x$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$. 又

$$\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x,\quad \text{即 } \tan\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x},$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}-\varphi<0$，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内有唯一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故 $-\frac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\frac{1}{x}$，即当 $x<0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

总之，当 $x\neq 0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$.

【776】 证明反正切加法定理：

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 为取 0，1，-1 这三个值的函数.

当给定 x 的值时，对于怎样的 y 值，函数 ε 可能不连续？在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的相应区域，并求此函数在所得区域内的值.

证 由于 $-\frac{\pi}{2}<\arctan y<\frac{\pi}{2}$ 及 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，故有 $-\pi<\arctan x+\arctan y<\pi$.

若 x 和 y 的符号相反，则 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x+\arctan y<\frac{\pi}{2}$.

若 $x>0$ 和 $y>0$，则 $0<\arctan x+\arctan y<\pi$.

再看这个和是位于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 还是 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 条件 $0<\arctan x+\arctan y<\frac{\pi}{2}$，即 $\arctan x<\frac{\pi}{2}-\arctan y$，它相当于 $x<\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)=\tan(\operatorname{arccot}y)=\frac{1}{y}$，也即 $xy<1$.

因此，当 $x>0,y>0,xy<1$ 时，此和位于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 同法可证，当 $x>0,y>0,xy>1$ 时，此和位于 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

仿此，又可证得：当 $x<0,y<0,xy<1$ 时，此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$；当 $x<0,y<0,xy>1$ 时，此和位于 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

总之，若 $xy<1$，则此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；若 $x>0,xy>1$，则此和位于 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$；若 $x<0,xy>1$，则此和位于 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

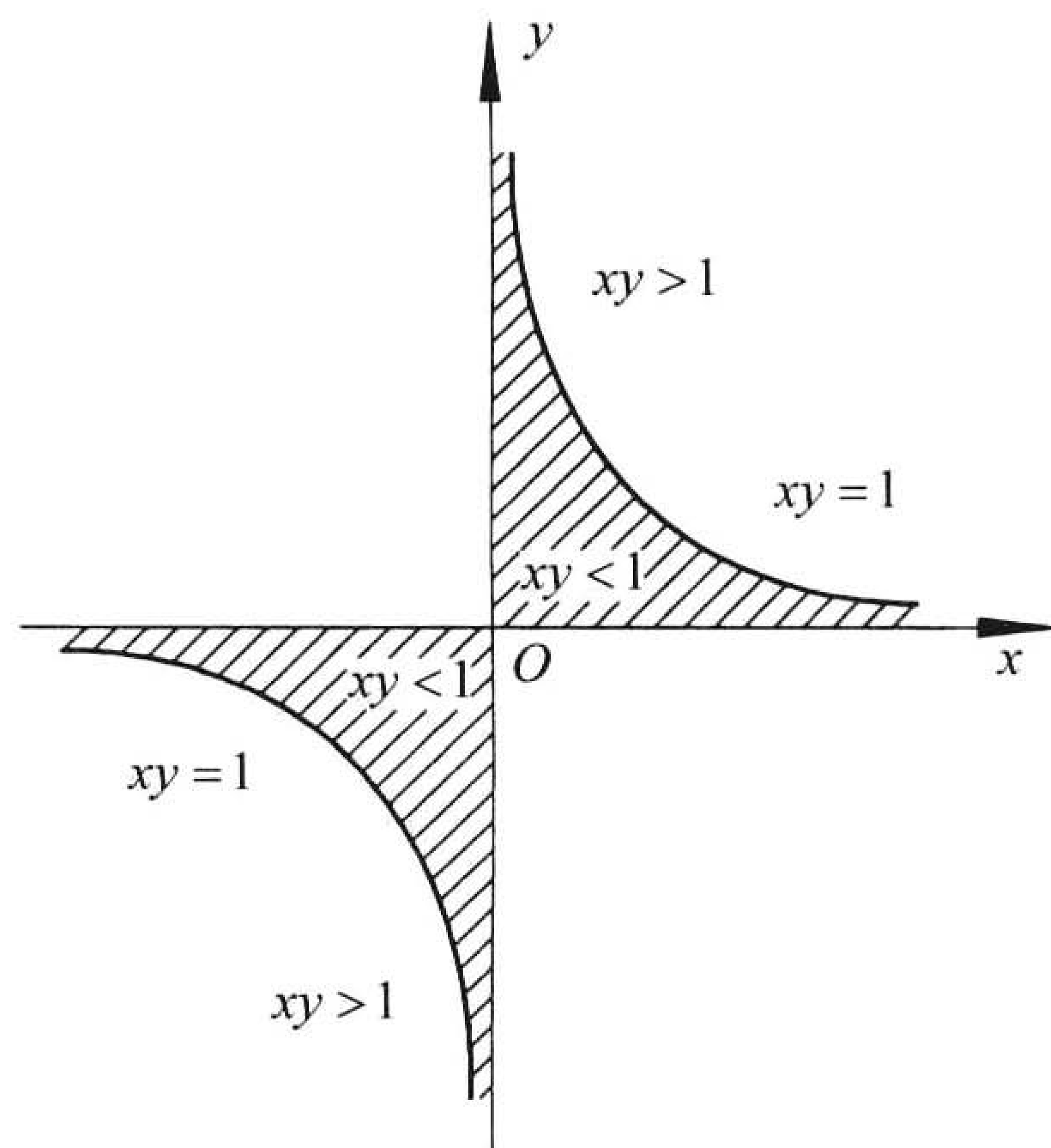


图 1.313

其次，我们考虑此和的正切 $\tan(\arctan x+\arctan y)=\frac{x+y}{1-xy}$. 现令 $u=\arctan x+\arctan y$，$v=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，则得 $\tan u=\tan v$. 因为 $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$，故当 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ 时，$u=v$；当 $\frac{\pi}{2}<u<\pi$ 时，$v+\pi=u$；当 $-\pi<u<-\frac{\pi}{2}$ 时，$u=-\pi+v$. 因此，我们证得

$$\arctan x+\arctan y=\begin{cases}\arctan\frac{x+y}{1-xy}, & xy<1,\\ \pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}, & x>0,xy>1,\\ -\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}, & x<0,xy>1.\end{cases}$$

当 x 固定时，若 $y=\frac{1}{x}$，则 ε 不连续，因为此时（例如设 $x>0$），当 $y>\frac{1}{x}$ 时 $\varepsilon\equiv1$，而当 $y<\frac{1}{x}$ 时 $\varepsilon\equiv0$.

如图 1.313 所示，曲线 $xy=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 的不连续域.

当 $xy<1$ 时，$\varepsilon=0$；

当 $x>0,xy>1$ 时，$\varepsilon=1$；

当 $x<0,xy>1$ 时，$\varepsilon=-1$.

【777】 证明反正弦加法定理：

$$\arcsin x+\arcsin y=(-1)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi\quad(|x|\leqslant1,\ |y|\leqslant1),$$

式中，$\varepsilon=\begin{cases}0, & xy\leqslant0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant1,\\ \operatorname{sgn}x, & xy>0 \text{ 和 } x^2+y^2>1.\end{cases}$

证 令 $u=\arcsin x+\arcsin y$ $(|x|\leqslant1,|y|\leqslant1)$，即得

$$\sin u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

由此，还不能断定

$$u=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

事实上，u 及 $v=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内，其中 v 始终位在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内，而 u 可有三种情形：

情形 Ⅰ：$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$.

若 $xy\leqslant0$，则不是 $0\leqslant x\leqslant1$ 及 $-1\leqslant y\leqslant0$ 就是 $-1\leqslant x\leqslant0$ 及 $0\leqslant y\leqslant1$，不论哪一种情况，总有

$$0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{及}\quad-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant0\quad(\text{或交换})$$

因而，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x+\arcsin y=u\leqslant\frac{\pi}{2}$.

若 $x>0, y>0$ 时，显然有 $u\geqslant 0$，条件 $u\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $u=\arcsin x+\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2}$，相当于

$$\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin y=\arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数，故这又相当于

$$\sin(\arcsin x)\leqslant\sin(\arccos y),$$

或 $x\leqslant\sqrt{1-y^2}$，即 $x^2+y^2\leqslant 1$.

同法可证，若 $x<0, y<0$ 时，必 $u\leqslant 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u$ 相当于 $x^2+y^2\leqslant 1$.

情形Ⅱ：$\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$.

在 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，必 $x>0, y>0$. 条件

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi,\quad 即\quad \arcsin x>\frac{\pi}{2}-\arcsin y,$$

两边取正弦，即得 $x^2+y^2>1$.

情形Ⅲ：$-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$.

在这种情形下必 $x<0, y<0$. 条件

$$-\pi\leqslant\arcsin x+\arcsin y<-\frac{\pi}{2},\quad 即\quad \frac{\pi}{2}<\arcsin(-x)+\arcsin(-y)\leqslant\pi,$$

因此，即 $x^2+y^2>1$.

总之，当 $xy\leqslant 0$ 或 $xy>0$ 但 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时，必有 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$；当 $x>0, y>0, x^2+y^2>1$ 时，必 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$；当 $x<0, y<0, x^2+y^2>1$ 时，必 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$u=v$；当 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，$u=\pi-v$；当 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$ 时，$u=-\pi-v$. 因此，最后得

$$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & x>0, y>0, x^2+y^2>1,\\ -\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & x<0, y<0, x^2+y^2>1.\end{cases}$$

即

$$\arcsin x+\arcsin y=(-1)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x})+\varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon=\begin{cases}0, & xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \operatorname{sgn}x, & xy>0 \text{ 和 } x^2+y^2>1.\end{cases}\quad (|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1)$

【778】 证明反余弦加法定理：

$$\arccos x+\arccos y=(-1)^{\varepsilon}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})+2\varepsilon\pi\quad(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1),$$

式中，$\varepsilon=\begin{cases}0, & x+y\geqslant 0,\\ 1, & x+y<0.\end{cases}$

证 由基本的不等式

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi\quad 及\quad 0\leqslant\arccos y\leqslant\pi,$$

有 $0\leqslant\arccos x+\arccos y\leqslant 2\pi$. 若 $0\leqslant\arccos x+\arccos y\leqslant\pi$，则 $\arccos x\leqslant\pi-\arccos y$.

由于 $\arccos x$ 及 $\pi-\arccos y$ 都含在$[0,\pi]$内，而在此区间内余弦是减函数，故有 $x\geqslant\cos(\pi-\arccos y)=-y$，即 $x+y\geqslant 0$.

同法可证得：若 $\pi<\arccos x+\arccos y\leqslant 2\pi$，则 $x+y<0$.

又由于 $\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$，故知

$$u=\arccos x+\arccos y \quad 及 \quad v=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦. 因 v 始终在 0 与 π 之间,故知:

若 $0\leqslant u\leqslant\pi$,则 $u=v$;若 $\pi\leqslant u\leqslant 2\pi$,则 $u=2\pi-v$. 因此,最后得

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x+y\geqslant 0,\\ 2\pi-\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x+y<0,\end{cases}$$

此即所要证明的公式.

【779】 作函数的图像:

(1) $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$.

解 (1) 利用 777 题的结果得知:由于 $x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1$,故

$$\begin{aligned}y&=\arcsin x+\arcsin(-\sqrt{1-x^2})\\&=\arcsin(x\sqrt{1-(1-x^2)}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2})\\&=\arcsin(x|x|-1+x^2).\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时;$y=-\frac{\pi}{2}$;当 $0<x\leqslant 1$ 时,$y=\arcsin(2x^2-1)$.

可以证明 $\arcsin(2x^2-1)-2\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$,故有

$$y=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2\arcsin x-\frac{\pi}{2}, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

如图 1.314 所示.

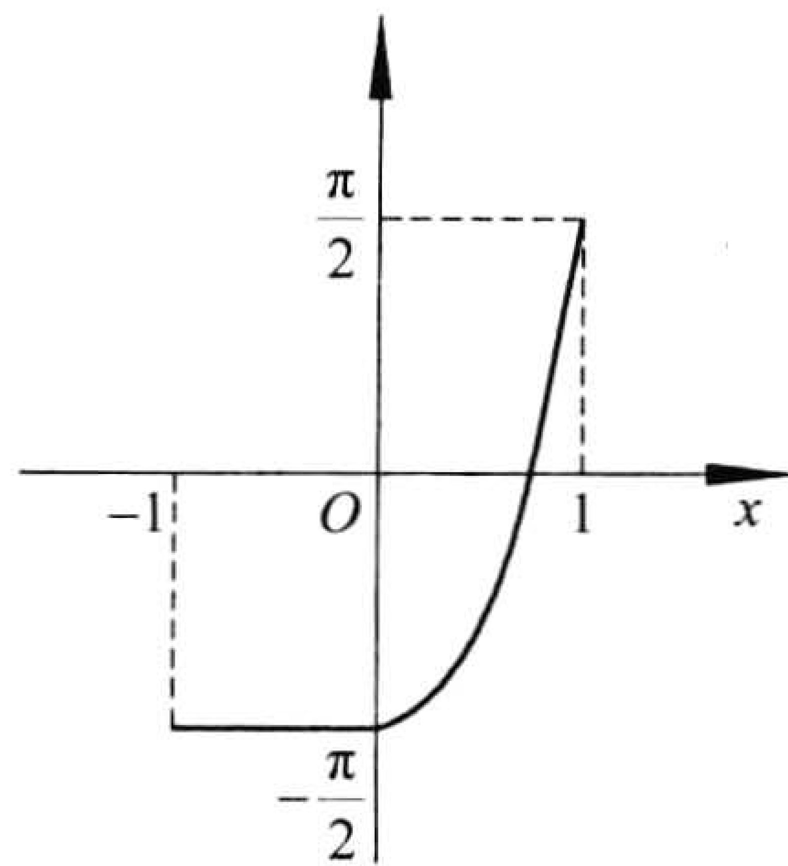


图 1.314

(2)由于

$$2\arcsin x=\arcsin x+\arcsin x=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi\operatorname{sgn}x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & |x|>\frac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

故当 $-1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$y=-(\pi+4\arcsin x)$;

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$y=0$;当 $\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1$ 时,$y=\pi-4\arcsin x$.

如图 1.315 所示.

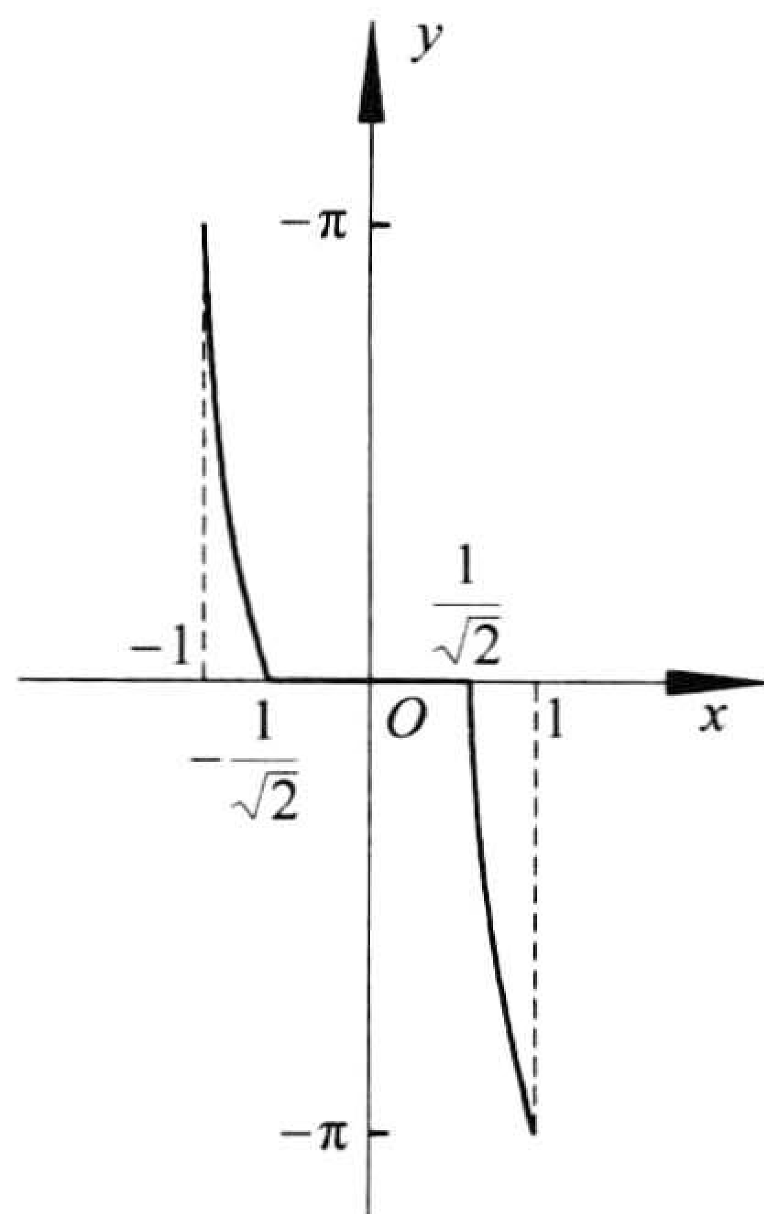


图 1.315

【780】 函数 $y=y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x=\arctan t,\quad y=\operatorname{arccot} t\quad(-\infty<t<+\infty),$$

求此函数. 此函数的定义域是什么?

解 由条件 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$,$0<y<\pi$ 且 $\tan x=t$,$\cot y=t$,即得

$$\cot y=\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

从而,当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $y=\frac{\pi}{2}-x$.

【781】 设 $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$ $(-\infty<t<+\infty)$. 在参量 t 的哪些变化域中可以把变量 y 看作变量 x 的单值函数? 求 y 在不同变化域上的表达式.

解 由于 $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$,故 $x^2-y^2=\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$.

当 $\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant 0$ 时,即 $e^t\geqslant e^{-t}$ 或 $e^{2t}\geqslant 1$ 或 $t\geqslant 0$ 时,$y=\sqrt{x^2-1}$;当 $t\leqslant 0$ 时,$y=-\sqrt{x^2-1}$.

不论 t 为何值,$x\geqslant 1$,故 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义. $t=0$ 是函数 $y=y(x)$ 单值区域的分界值.

【782】 设 y 对 x 的函数关系由方程组 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 给出，问 $y=y(x)$ 是单值函数的充分必要条件是什么？

解 其充分必要条件为，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然，则存在 x^* 及 $t_1\neq t_2$，使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^* \quad 且 \quad \psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

于是，对于这样的 x^*，一方面有 $y_1=\psi(t_1)$ 及 $y_2=\psi(t_2)$，另一方面又有 $y_1\neq y_2$，这样 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，$\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足，则对于任一 $x^*\in\{\varphi(t)\}$，有 t^* 使

$$\varphi(t^*)=x^*, \quad \psi(t^*)=y^*$$

有意义，这样定义的函数 $y=y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同，因此，它由 x^* 唯一确定. 从而，y 定义为 x 的单值函数.

【783】 在怎样的条件下，两个方程组

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \quad (a<t<b) \quad 及 \quad x=\varphi[\chi(\tau)],\ y=\psi[\chi(\tau)] \quad (\alpha<\tau<\beta)$$

定义出同一的函数 $y=y(x)$？

解 当 $\alpha<\tau<\beta$ 时，函数 $\chi(\tau)$ 的值域应为区间 (a,b).

【784】 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义并且连续，且

$$A=\inf_{a<x<b}\varphi(x), \quad B=\sup_{a<x<b}\varphi(x).$$

在何种情况下，存在单值函数 $f(x)$，它在区间 (A,B) 上有定义，并且当 $a<x<b$ 时，$\psi(x)=f[\varphi(x)]$？

解 显然，要求对于使 $\varphi(x)=u$ 的一切 x 值（其中 u 为区间 (A,B) 中的任一给定的数），函数 $\psi(x)$ 应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时，对 $u\in(A,B)$ 可定义

$$f(u)=\psi(x),$$

其中 x 为满足 $\varphi(x)=u\,(a<x<b)$ 的任何数. 上述条件保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§9. 函数的一致连续性

1° **一致连续性的定义** 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X=\{x\}$ 上（X 是开区间、闭区间，等等），若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何数值 $x',x''\in X$，由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上为一致连续的.

2° **康托尔定理** 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此区间上一致连续.

【785】 某工厂的车间制造正方形平板，其边长 x 在 1cm 到 10cm 之间取值. 当边长的允许误差 δ 为何值时，不论制造多大的平板（边长在上述范围内），其面积 y 与设计值之差皆小于 ε？考虑下列情形：

(1) $\varepsilon=1\text{cm}^2$； (2) $\varepsilon=0.01\text{cm}^2$； (3) $\varepsilon=0.0001\text{cm}^2$.

解 $y=x^2$，由于

$$|x'^2-x''^2|=|x'-x''|\,|x'+x''|\leqslant 20|x'-x''|,$$

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，要 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$ 时，只要 $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是，在加工平板边长时，只要取允许误差 $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{20}$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，即可满足要求.

(1) 当 $\varepsilon=1\text{cm}^2$ 时，$\delta\leqslant\frac{1}{20}=0.05\text{cm}=0.5\text{mm}$；

(2) 当 $\varepsilon=0.01\text{cm}^2$ 时，$\delta\leqslant\frac{0.01}{20}=0.0005\text{cm}=0.005\text{mm}$；

(3) 当 $\varepsilon=0.0001\text{cm}^2$ 时，$\delta\leqslant\frac{0.0001}{20}=0.000005\text{cm}=0.00005\text{mm}$.

【786】$^+$ 圆柱形套筒的宽为 ε，长为 δ，将套筒套在曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上并使它沿此曲线滑动，但套筒的轴须保持平行于 Ox 轴. δ 应取何值，才可以使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10\leqslant x\leqslant 10$ 所限定的部分？考虑下列情形：(1)$\varepsilon=1$；(2)$\varepsilon=0.1$；(3)$\varepsilon=0.001$；(4)ε 为任意小数.

解 $y=\sqrt[3]{x}$. 对于 $y'\neq y''$，由于

$$|y'-y''|=\left|\frac{y'^3-y''^3}{y'^2+y'y''+y''^2}\right|=\left|\frac{y'^3-y''^3}{\frac{3}{4}(y'+y'')^2+\frac{1}{4}(y'-y'')^2}\right|\leqslant\frac{|y'^3-y''^3|}{\frac{1}{4}|y'-y''|^2}$$

即

$$\frac{1}{4}|y'-y''|^3\leqslant|y'^3-y''^3|=|x'-x''| \quad 或 \quad |y'-y''|\leqslant\sqrt[3]{4|x'-x''|}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，要 $|y'-y''|<\varepsilon$，只要 $4|x'-x''|<\varepsilon^3$，或 $|x'-x''|<\frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0<\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}$，则当 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有 $\left|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}\right|<\varepsilon$.

(1) 当 $\varepsilon=1$ 时，$\delta<\frac{1}{4}$；

(2) 当 $\varepsilon=0.1$ 时，$\delta<2.5\times10^{-4}$；

(3) 当 $\varepsilon=0.001$ 时，$\delta<2.5\times10^{-10}$；

(4) 当 ε 为任意小数时，$\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}$ $(\varepsilon\leqslant1)$.

【787】 以《$\varepsilon-\delta$》的语言用肯定的方式表达下述论断意义：函数 $f(x)$ 在某集合（开区间，闭区间，等等）上连续，但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E. 所需论断的《$\varepsilon-\delta$》说明如下：对于任给的 $\varepsilon>0$，及 $x_0\in E$，总存在一个数 $\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

同时，至少存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于任意给定的 $\delta>0$，都可找到 $x_1,x_2\in E$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

【788】 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是连续的，但在此区间上并非一致连续的.

证明思路 连续性是显然的. 考虑 $(0,1)$ 上的两串点 $x_n=\frac{1}{n}$，$x_n'=\frac{1}{n+1}$，则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时，不论 $\delta>0$ 如何选取，只要 n 充分大，总可以使 $|x_n-x_n'|<\delta$，但是，$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0$.

证 连续性是显然的，现证其不一致连续. 考虑 $(0,1)$ 上的两串点

$$x_n=\frac{1}{n}, \quad x_n'=\frac{1}{n+1}.$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时，不论 $\delta>0$ 取得多小，只要 n 取得充分大，总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta,$$

但是，

$$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0.$$

因而，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上并非一致连续.

【789】 证明：函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是连续的并且有界，但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x\neq0$ 时，由基本初等函数在其定义域的连续性可知，$f(x)$ 是连续的，同时，由于 $|f(x)|\leqslant1$，因

而它也是有界的.

现考虑(0,1)上的两串点 $x_n=\frac{2}{n}$,$x'_n=\frac{2}{n+1}$,则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时,不论 $\delta>0$ 取得多小,只要 n 充分大,总可以使

$$|x_n-x'_n|=\frac{2}{n(n+1)}<\delta,$$

但是

$$|f(x_n)-f(x'_n)|=1>\varepsilon_0.$$

因而,$f(x)$在(0,1)上并非一致连续.

【790】 证明:函数 $f(x)=\sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 上是连续的并且有界,但在此区间上并非一致连续的.

证明思路 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上显然有界且连续.只需证其不一致连续性.为此,考虑$(-\infty,+\infty)$上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\quad x'_n=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}},$$

下面仿 788 题.

证 函数 $f(x)$的连续性及其有界性是显然的.现证其不一致连续性.

考虑$(-\infty,+\infty)$上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\qquad x'_n=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时,不论 $\delta>0$ 如何选取,只要 n 充分大,总可以使

$$|x_n-x'_n|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}}<\delta,$$

但是,

$$|f(x_n)-f(x'_n)|=1>\varepsilon_0.$$

因而,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上并非一致连续.

【791】 证明:若函数 $f(x)$在区域 $a\leqslant x<+\infty$上有定义并且连续,而且有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则 $f(x)$在此区域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon>0$.由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,故必存在 $X>a$,使当 $x'>X$, $x''>X$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于 $f(x)$在$[a,X+1]$上连续,故一致连续,从而,必有正数 δ'存在,使当 $x'\in[a,X+1]$,$x''\in[a,X+1]$,$|x'-x''|<\delta'$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令 $\delta=\min\{\delta',1\}$.现设 x',x''为满足 $a\leqslant x'<+\infty$,$a\leqslant x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$ 的任何两点.由于 $|x'-x''|<\delta$,故 x'与 x''或同时属于$[a,X+1]$,或同时满足 $x'>X$, $x''>X$,因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上一致连续.证毕.

【792】 证明:无界函数 $f(x)=x+\sin x$ 于全轴$-\infty<x<+\infty$上一致连续.

提示 $|f(x')-f(x'')|\leqslant 2|x'-x''|$ $(x',x''\in R)$.

证 $|f(x')-f(x'')|=|(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')|\leqslant|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\leqslant 2|x'-x''|$.

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$, 则当$-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致连续.

【793】 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的:(1)$(-l,l)$,这里 l 为任意大的正数;(2)在区间$(-\infty,+\infty)$上?

解题思路 (1) $|f(x')-f(x'')|\leqslant 2l|x'-x''|\quad (x',x''\in(-l,l))$.

(2) 考虑 $x_n'=n+\dfrac{1}{n}$, $x_n''=n$. 下面仿 788 题.

解 (1) 当 $x_1,x_2\in(-l,l)$时,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2l|x_1-x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2l}$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$,且 $x_1,x_2\in(-l,l)$时,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,故 $f(x)$ 在 $(-l,l)$上一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0=1$,不论 $\delta>0$ 取得多小,只要 n 充分大,我们总可以使 $x_n'=n+\dfrac{1}{n}$, $x_n''=n$ 的距离 $|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{n}<\delta$,但是,

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=2+\left(\frac{1}{n}\right)^2>\varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

研究下列函数在给定区域上的一致连续性:

【794】 $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\dfrac{x_1}{4-x_1^2}-\dfrac{x_2}{4-x_2^2}\right|=\left|\dfrac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right||x_1-x_2|$.

由于 $\left|\dfrac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right|<\dfrac{4+1}{3\cdot 3}=\dfrac{5}{9}<1$,故对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则对满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 x_1,x_2 $\big(x_1,x_2$ 属于$[-1,1]\big)$值,均有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

因此,$f(x)$在区间$[-1,1]$上一致连续.

【795】 $f(x)=\ln x\quad(0<x<1)$.

解 考虑 $x_n=\dfrac{1}{n}$,$x_n'=\dfrac{1}{2n}$,则当 $0<\varepsilon_0<\ln 2$ 时,不论 δ 如何选取,只要 n 充分大,我们总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{2n}<\delta,$$

但是,

$$|f(x_n)-f(x_n')|=\ln 2>\varepsilon_0.$$

因此,$f(x)$在区间$(0,1)$内非一致连续.

【796】 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\quad(0<x<\pi)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,我们定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

易见 $F(x)$在$[0,\pi]$上连续,由康托尔定理知,$F(x)$在$[0,\pi]$上一致连续.从而,$f(x)$也在$(0,\pi)$上一致连续.

【797】 $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}\quad(0<x<1)$.

解 取 $\varepsilon_0=1$，令 $x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$，$x_n'=\dfrac{1}{n\pi}$（n 为正整数），显然 x_n、x_n' 均属于 $(0,1)$. 不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{(2n+1)n\pi}<\delta,$$

但是，

$$|f(x_n)-f(x_n')|=e^{\frac{1}{n\pi}}>1=\varepsilon_0.$$

因此，$f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

【798】 $f(x)=\arctan x \quad (-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$、$[0,+\infty)$ 上连续，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 及 $(-\infty,1]$ 上均一致连续.

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$，当 x_1、$x_2\in(-\infty,1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$，当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$ 时，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立.

今取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$，则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 时，x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty,1]$，或同时属于 $[0,+\infty)$，故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

【799】 $f(x)=\sqrt{x} \quad (1\leqslant x<+\infty)$.

解 考虑 $[1,+\infty)$ 内任意两点 x_1,x_2.

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}.$$

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$，$x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 时，恒有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

因此，$f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

【800】 $f(x)=x\sin x \quad (0\leqslant x<+\infty)$.

解 考虑点 $x_n=2n\pi+\dfrac{1}{n}$，$x_n'=2n\pi$，则 $|x_n-x_n'|=\dfrac{1}{n}$. 而

$$|f(x_n)-f(x_n')|=\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}=2n\pi\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=0,\quad 及\quad \lim_{n\to\infty}2n\pi\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=2\pi,$$

所以，$|f(x_n)-f(x_n')|\to 2\pi \quad (n\to\infty)$.

现取 $\varepsilon_0=2\pi-1$，于是，不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有 $|x_n-x_n'|<\delta$，并且

$$|f(x_n)-f(x_n')|>\varepsilon_0=2\pi-1.$$

因此，$f(x)=x\sin x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

【801】 证明：函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间 $J_1=(-1<x<0)$ 及 $J_2=(0<x<1)$ 上是一致连续的，

但在它们的和 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上并非一致连续的.

证 在 $J_1=(-1<x<0)$ 上 $f(x)=-\frac{\sin x}{x}$,在 $J_2=(0<x<1)$ 上 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,它们的一致连续性由796题可知.

由于

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}f(x)=-\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

故必存在 $\eta>0(\eta<1)$,使当 $0<x_1<\eta$, $-\eta<x_2<0$ 时恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$. 现取 $\varepsilon_0=1$,则不论 $\delta>0$ 取得多么小,都可取两点 x'_1 和 x'_2,使 $0<x'_1<\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}<x'_2<0$. 于是, $|x'_1-x'_2|<\delta$,但是,

$$|f(x_1')-f(x_2')|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上非一致连续.

【802】 对于 $\varepsilon>0$,求使下列函数 $f(x)$ 在所给区间上满足一致连续条件的 $\delta=\delta(\varepsilon)$(任意的!):

(1) $f(x)=5x-3\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(2) $f(x)=x^2-2x-1\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

(3) $f(x)=\frac{1}{x}\quad(0.1\leqslant x\leqslant 1)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(5) $f(x)=2\sin x-\cos x\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(6) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 (1) $|f(x_1)-f(x_2)|=5|x_1-x_2|$. 只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

(2) $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-2|$. 由于 $-2\leqslant x\leqslant 5$,故 $|x_1+x_2-2|\leqslant 8$,于是只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

(3) $|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{0.01}$. 只需取 $\delta=0.01\varepsilon$.

(4) 对于 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$,显然有不等式 $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 成立.

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$, $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2+\delta}\leqslant\sqrt{x_2}+\sqrt{\delta}=\sqrt{x_2}+\varepsilon.$$

同理可有

$$\sqrt{x_2}<\sqrt{x_1+\delta}\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{\delta}=\sqrt{x_1}+\varepsilon.$$

则恒有 $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\varepsilon$.

(5) $$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&\leqslant 2|\sin x_1-\sin x_2|+|\cos x_1-\cos x_2|\\&\leqslant 2|x_1-x_2|+\left|\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)\right|=3|x_1-x_2|\end{aligned}$$

只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$.

(6)任给 $\varepsilon>0$,当 $x_1,x_2\in\left[\frac{\varepsilon}{3},\pi\right]$ 时,有

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_2)|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_1\sin\frac{1}{x_2}+x_1\sin\frac{1}{x_2}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\\&\leqslant|x_1|\cdot\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_1|\cdot\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|\\&=\left(\frac{1}{x_2}+1\right)\cdot|x_1-x_2|\leqslant\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}$. 现设 $x_1,x_2\in[0,\pi]$满足 $|x_1-x_2|<\delta$,下证必有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

不妨设 $x_1<x_2$，若 $x_1\geqslant\frac{\varepsilon}{3}$，则 x_1,x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3},\pi\right]$，故由上述，知

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot|x_1-x_2|<\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}=\varepsilon.$$

若 $0\leqslant x_1<\frac{\varepsilon}{3}$，则 $x_2=x_2-x_1+x_1<\delta+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}$. 于是，

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_1|+|x_2|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon\quad(\text{当 }x_1>0\text{ 时}),$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|0-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_2|<\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon\quad(\text{当 }x_1=0\text{ 时}),$$

综上所述，只要 $x_1,x_2\in[0,\pi]$，$|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

【803】 将闭区间[1,10]等分为多少段，就足以让函数 $f(x)=x^2$ 在每一段上的振幅小于0.0001？

解 设等分为 n 段，则对于每段中的任意两点均有 $|x_1-x_2|\leqslant\frac{9}{n}$. 于是，

$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\,|x_1-x_2|\leqslant\frac{(10+10)9}{n}=\frac{180}{n}.$$

按题设，我们只需 $\frac{180}{n}<0.0001$，也即 $n>1800000$.

因此，应把[1,10]等分成至少为1800000个等长的线段，就能满足要求.

【804】 证明：有限个在区间 (a,b) 上一致连续函数的和与它们的乘积在此区间上仍是一致连续的.

证 由于有限个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘，故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在有限区间 (a,b) 上一致连续，要证 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 也在 (a,b) 上一致连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，故有 $\delta_1>0$ 存在，使对于 (a,b) 中任何两点 x' 与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又由于 $g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，故又有 $\delta_2>0$ 存在，使对于 (a,b) 中任何两点 x' 与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $\left|g(x')-g(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x'-x''|<\delta$（x',x'' 为 (a,b) 中任何两点）时，恒有

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f(x)+g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 下证 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 为此先证一个结论：若函数 $F(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续，则 $F(x)$ 在 (a,b) 上必有界. 事实上，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都有 $\delta>0$ 存在，使对于 (a,b) 中任何两点 x',x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$. 特别，当 $a<x'<a+\delta$，$a<x''<a+\delta$ 时，必有 $|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$；当 $b-\delta<x'<b$，$b-\delta<x''<b$ 时，也必有 $\left|F(x')-F(x'')\right|<\varepsilon$. 因此，根据柯西收敛准则，知 $F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$ 与 $F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 都存在（有限）. 现在 $[a,b]$ 上定义函数 $F^*(x)$：

$$F^*(x)=\begin{cases}F(x), & a<x<b,\\ F(a+0), & x=a,\\ F(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然，$F^*(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，从而有界，由此可知 $F(x)$ 在 (a,b) 上有界.

根据刚才已证的结论，存在常数 $L>0$ 与 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant L,\quad |g(x)|\leqslant M\quad(a<x<b).$$

任给 $\varepsilon>0$，根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上的一致连续性，可取 $\delta>0$，使对于 (a,b) 中任何两点 x' 与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知

$$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|=|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon.$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注:当 (a,b) 是无穷区间时,(a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 必也一致连续,但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续.例如,设 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$,函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,而函数 $[f(x)]^2=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续(参看 793 题(2)).

【805】 证明:若单调有界的函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 上是连续的,则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 分三种情形予以证明.

(1)设 (a,b) 是有限区间.由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界,故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限).按下式定义 $[a.b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<b,\\ f(a+0), & x=a,\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,当然在 (a,b) 上也一致连续,故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

(2)a 为有限数,$b=+\infty$,此时,令

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<+\infty,\\ f(a+0), & x=a.\end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限),故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 一致连续,从而,$f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 一致连续.

若 $a=-\infty$,b 为有限数.考虑函数 $g(x)=f(-x)(-b<x<+\infty)$,即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(3)$a=-\infty$,$b=+\infty$.任给 $\varepsilon>0$.利用(2)已证的结果,$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续,故存在 $\delta_1>0$,使当 x' 与 x'' 都属于 $(0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(2)已证的结果,$f(x)$ 在 $-\infty<x<1$ 上一致连续,故对于同一个 ε,存在 $\delta_2>0$,使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$,则当 $-\infty<x'<+\infty$,$-\infty<x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$ 时,x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0,+\infty)$,或是同属于区间 $(-\infty,1)$.因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.证毕.

【806】 证明:在有限区间 (a,b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$,可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上,其充分必要条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 必要性:若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,当然 $f(x)$ 在 (a,b) 上也是一致连续的.

充分性:若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.根据 804 题的证明过程,知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限).按下式定义 $[a,b]$ 上的函数:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<b,\\ f(a+0), & x=a,\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然,$f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上 $f^*(x)\equiv f(x)$.

故 $f^*(x)$是在$[a,b]$上的连续延拓. 证毕.

【807】 函数

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为$(a.b)$中受条件$|x_1-x_2|\leqslant\delta$限制的任意两点)称为函数 $f(x)$在区间(a,b)上的**连续模**.

证明:函数 $f(x)$在区间(a,b)上是一致连续的充分必要条件是$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

证 必要性:设 $f(x)$在(a,b)上一致连续. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta'>0$,使(a,b)中任何两点 x_1,x_2,只要$|x_1-x_2|<\delta'$就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0<\delta<\delta'$,则当$|x_1-x_2|\leqslant\delta$时,必有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$,从而,

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由此可知,$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

充分性:设$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta'>0$,使当 $0<\delta<\delta'$时,恒有 $\omega_f(\delta)<\varepsilon$.

现设 x_1 与 x_2 是(a,b)中满足$|x_1-x_2|<\delta'$的任何两点.

若 $x_1=x_2$,则显然$|f(x_1)-f(x_2)|=0<\varepsilon$;

若 $x_1\neq x_2$,令$|x_1-x_2|=\delta^*$,则 $0<\delta^*<\delta'$,于是,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega_f(\delta^*)<\varepsilon$.

由此可知,$f(x)$在(a,b)上一致连续. 证毕.

【808】 设

(1) $f(x)=x^3\quad(0\leqslant x\leqslant1)$;

(2) $f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x\leqslant a)$及$(a<x<+\infty)$;

(3) $f(x)=\sin x+\cos x\quad(0\leqslant x\leqslant2\pi)$.

对函数 $f(x)$的连续模 $\omega_f(\delta)$(参阅前题)作如下形式的估计:$\omega_f(\delta)\leqslant C\delta^\alpha$,式中 C 和 α 为常数.

解 (1) $|x_1^3-x_2^3|=|x_1-x_2||x_1^2+x_1x_2+x_2^2|\leqslant3\delta$,于是,$\omega_f(\delta)\leqslant3\delta$.

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时[参看 802 题(4)的证明过程]

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant\sqrt{|x_1-x_2|}\leqslant\sqrt{\delta},$$

于是,$\omega_f(\delta)\leqslant\sqrt{\delta}$;当 $a<x<+\infty$时

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant\frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是,$\omega_f(\delta)\leqslant\frac{\delta}{2\sqrt{a}}$.

(3) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,故

$$\left|\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}\cdot2\left|\cos\frac{x_1+x_2+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\cdot2\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2}\leqslant\sqrt{2}\delta.$$

于是,$\omega_f(\delta)\leqslant\sqrt{2}\delta$.

§10. 函数方程

【809】 证明:对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\tag{1}$$

的唯一的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是线性齐次函数:

$$f(x)=ax,$$

式中 $a=f(1)$ 是任意的常数.

证 先证:若 $f(x)$ 满足(1),则对任何有理数 c,必有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

事实上,当 m 与 n 为正整数时,有

$$f(mx)=f(x+(m-1)x)=f(x)+f((m-1)x)=f(x)+f(x)+f((m-2)x)=\cdots$$
$$=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x);$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right),\quad 故\ f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x).$$

于是,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,故 $f(0)=0$;又在(1)中令 $y=-x$,并注意到已证的结果 $f(0)=0$,得 $f(-x)=-f(x)$. 于是,

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c,有 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 下面,我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c,此式也成立. 事实上,设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n,使 $c_n\to c(n\to\infty)$. 于是,

$$f(c_n x)=c_n f(x)\quad(n=1,2,\cdots),$$

在此式两端令 $n\to\infty$ 取极限,并注意到函数 f 在点 cx 连续,即得 $f(cx)=cf(x)$. 于是,对任何实数 x 和 c,有 $f(cx)=cf(x)$. 由此可知,对任何实数 x,有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$. 证毕.

【810】 证明:满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是线性齐次的.

证 由 809 题的证明过程,知:对任何有理数 c,有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

下面,我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 也成立. 为确定起见,设 $f(x)$ 是单调递增的,设 c 是无理数,要证 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 只就 $x>0$ 讨论之($x\leqslant 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$ 与 $\{c'_n\}$ 使:

$$c_1<c_2<c_3<\cdots<c<\cdots<c'_3<c'_2<c'_1,$$

并且 $c_n\to c$, $c'_n\to c$ $(n\to\infty)$. 由于 $x>0$,故

$$c_1x<c_2x<c_3x<\cdots<cx<\cdots<c'_3x<c'_2x<c'_1x,$$

并且 $c_nx\to cx$, $c'_nx\to cx$ $(n\to\infty)$. 另外,我们有

$$f(c_nx)=c_nx,\quad f(c'_nx)=c'_nx\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的,故在点 cx 的左、右极限均存在有限,并且满足

$$f(cx-0)\leqslant f(cx)\leqslant f(cx+0).$$

在前面两个等式中令 $n\to\infty$ 取极限,得

$$f(cx-0)=cx,\quad f(cx+0)=cx.$$

由此可知 $f(cx)=cx$.

以下证明同 809 题,不再重复.

【811】 证明:满足方程(1)且在任意小区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上为有界的函数 $f(x)$,是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明过程,知:对任何有理数 c,有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

下面,我们利用 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中的有界性来证明对于任何无理数 c,此式也成立. 用反证法,假定对于某无

理数 c_0 以及某实数 x_0，有 $f(c_0x_0)\neq c_0f(x_0)$. 令 $f(c_0x_0)-c_0f(x_0)=\alpha$，则 $\alpha\neq 0$. 今取一串有理数 $\{c_n\}$，使 $c_n\to c_0(n\to\infty)$. 于是，对于任何正整数 m，有

$$f[m(c_0-c_n)x_0]=mf[(c_0-c_n)x_0]=m[f(c_0x_0)-f(c_nx_0)]=m(c_0-c_n)f(x_0)+m\alpha,$$
$$(n=1,2,3,\cdots;\ m=1,2,3,\cdots).$$

任给 $G>0$. 先取定一个正整数 m，使 $m>\frac{2G}{|\alpha|}$. 对此 m，再取定一个正整数 n，使

$$|m(c_0-c_n)x_0|<\varepsilon,\quad |m(c_0-c_n)f(x_0)|<G.$$

令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$. 于是 $\bar{x}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，并且

$$|f(\bar{x})|\geqslant|m\alpha|-|m(c_0-c_n)f(x_0)|>2G-G=G.$$

由所给 $G>0$ 的任意性，即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 无界，此与假定矛盾. 于是，对任何无理数 c，也有

$$f(cx)=cf(x).$$

以下证明同 809 题，不再重复.

【812】 证明：对所有 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{2}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数：$f(x)=a^x$，式中 $a=f(1)$ 为正的常数.

证 先证必有 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 事实上，由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$，知 $f(x)\geqslant 0$. 由于 $f(x)\neq 0$，故存在 x_0 使 $f(x_0)>0$. 在(2)中令 $x=x_0$，$y=0$，得 $f(x_0)=f(x_0)f(0)$，故 $f(0)=1$；又在(2)中令 $y=-x$，得 $1=f(0)=f(x)f(-x)$，故 $f(x)\neq 0$，由此可知 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 当 m 与 n 为正整数时，

$$f(mx)=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)f(x)=f((m-2)x)f(x)f(x)=\cdots=[f(x)]^m;$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n,\quad 即\ f\left(\frac{x}{n}\right)=[f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

于是，

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知，对任何有理数 c，有

$$f(cx)=[f(x)]^c\quad(-\infty<x<+\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性，仿 809 题的证明易知此式对任何无理数也成立. 因此，对于任何实数 c 与 x，有

$$f(cx)=[f(x)]^c,$$

从而， $f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x$，$a=f(1)>0$.

注：也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 令 $F(x)=\log_a f(x)$，这里 $a=f(1)>0$. 于是，$F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，满足(1)式：

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a[f(x)f(y)]=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

故由 809 题的结果，知 $F(x)=a^*x$，这里

$$a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1,$$

从而，$F(x)=x$. 由此可知 $f(x)=a^x$.

【813】 证明：在区间 $(0,\varepsilon)$ 中有界并满足方程(2)的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知：$f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$，并且对任何有理数 c，有 $f(cx)=[f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c，也有

$$f(cx)=[f(x)]^c\quad(-\infty<x<+\infty).$$

用反证法.假定对某无理数 c_0,及某实数 x_0,有 $f(c_0x_0)\neq[f(x_0)]^{c_0}$.显然 $x_0\neq 0$(因为 $f(0)=1$).不妨设 $x_0>0$.我们有 $f(c_0x_0)=\beta[f(x_0)]^{c_0}$,$\beta>0$,$\beta\neq 1$.不妨设 $\beta>1$.取一串有理数 c_n,使 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_0$,且 $c_n\to c_0$ $(n\to\infty)$.于是,对任何正整数 m,有

$$f[m(c_0-c_n)x_0]=\{f[(c_0-c_n)x_0]\}^m=f(c_0x_0)^m f(-c_nx_0)^m=\beta^m[f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}.$$

现任给 $G>0$.先取定一个正整数 m,使 $\beta^m>2G$.然后,再取一个 n,使

$$0<m(c_0-c_n)x_0<\varepsilon,\quad [f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}>\frac{1}{2}.$$

于是,令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$,则 $\bar{x}\in(0,\varepsilon)$,且 $f(\bar{x})>2G\cdot\frac{1}{2}=G$,故 $f(x)$在$(0,\varepsilon)$无界,此与假定矛盾.注意,若 $\beta<1$,则需取 $c_1>c_2>c_3>\cdots>c_0$,$c_n\to c$ 并考虑

$$f[-m(c_0-c_n)x_0]=\beta^{-m}[f(x_0)]^{-m(c_0-c_n)}.$$

由此可知,对任何无理数 c,$f(cx)=[f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同812题,不再重复.

【814】 证明:对于所有正数 x 和 y 都满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$$(0<x<+\infty)$是对数函数:$f(x)=\log_a x$,式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$中令 $y=1$,得 $f(1)=0$.由于 $f(x)\neq 0$,故存在 $x_0>0$ 使 $f(x_0)\neq 0$.先设 $f(x_0)>0$.

由于 $f(x_0^2)=f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)$,$f(x_0^4)=2f(x_0^2)=4f(x_0)$,$\cdots$,利用数学归纳法,易知 $f(x_0^{2n})=2nf(x_0)\to+\infty$ $(n\to\infty)$.故可取某正整数 n,使 $f(x_0^{2n})>1$.于是,根据连续函数性质知,在 1 与 x_0^{2n} 之间必存在某 a(显然 $a>0$)使 $f(a)=1$.现考虑函数 $F(x)=f(a^x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.显然 $F(x)$连续且满足(1)式:

$$F(x+y)=f(a^{x+y})=f(a^x\cdot a^y)=f(a^x)+f(a^y)=F(x)+F(y).$$

于是,根据809题的结果知,$F(x)=a^* x$ $(-\infty<x<+\infty)$,其中 $a^*=F(1)=f(a)=1$.于是,$F(x)=x$,即

$$f(a^x)=x;$$

令 $a^x=y$,则 $x=\log_a y$,于是,

$$f(y)=\log_a y\quad(0<y<+\infty).$$

若 $f(x_0)<0$,则可考虑函数 $g(x)=-f(x)$.于是,$g(x_0)>0$ 且 $g(x)$也满足 $g(xy)=g(x)+g(y)$,故根据刚才已证的结果,可知 $g(y)=\log_a y$ $(0<y<+\infty)$,其中 $a>0$.即$-f(y)=\log_a y$,或 $f(y)=-\log_a y$.令 $a^*=\frac{1}{a}$,则 $a^*>0$ 且$-\log_a y=\log_{a^*} y$,故

$$f(y)=\log_{a^*} y\quad(0<y<+\infty),$$

其中 $a^*>0$.证毕.

【815】 证明:对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y)\tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$$(0<x<+\infty)$是幂函数 $f(x)=x^a$,式中 a 为常数.

证 考虑函数 $F(x)=f(e^x)$ $(-\infty<x<+\infty)$,则 $F(x)$在$-\infty<x<+\infty$连续不恒为零,且满足(2)式:

$$F(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x\cdot e^y)=f(e^x)f(e^y)=F(x)F(y).$$

于是,根据812题的结果知

$$F(x)=b^x\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $b>0$,即 $f(e^x)=b^x(-\infty<x<+\infty)$.

令 $e^x=y$,则 $y>0$;显然,存在唯一的 $a(-\infty<a<+\infty)$,使 $e^a=b$.于是,

$$f(y)=b^x=e^{ax}=y^a\quad(0<y<+\infty).$$

证毕.

【816】 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程(3)的所有的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

证 因为 $f(xy)=f(x)f(y)$,所以 $f(1)=f(1)f(1)$,于是,$f(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

当 $f(1)=0$ 时,对于任意实数 x,均有 $f(x)=f(1)f(x)\equiv 0$.

当 $f(1)=1$ 时,由于 $f(1)=f((-1)\cdot(-1))=f(-1)f(-1)=1$,所以,$f(-1)=\pm 1$.下面分两种情况讨论:

(i) 当 $f(-1)=1$ 时,由于 $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$,所以,在这种情形下就可把问题归结为对 $0<x<+\infty$ 中的 x 进行讨论.而对于 $x>0$,我们已证得 $f(x)=x^a$,式中 a 为常数*).然后再利用 $f(-x)=f(x)$,即得 $f(x)=|x|^a$,为保证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中连续,需 $a\geqslant 0$.

(ii) 当 $f(-1)=-1$ 时,同(i)可得

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a \quad (a\geqslant 0).$$

综上所述,所求的函数为(1) $f(x)\equiv 0$;或(2) $f(x)=|x|^a(a\geqslant 0)$;或(3) $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a \quad (a\geqslant 0)$.

*) 利用 815 题的结果.

【817】 证明:不连续函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程(3).

证 由 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 知,$f(xy)=\operatorname{sgn}(xy)$.

分三种情况讨论:

(1) 当 $xy>0$ 时,x 与 y 同号,此时 $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=1$;

(2) 当 $xy<0$ 时,x 与 y 异号,此时 $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=-1$.

(3) 当 $xy=0$ 时,在实数域内,x 与 y 中至少有一个为 0,于是,$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=0$.

总之,不论哪一种情形,均有

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y,$$

也即函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程 $f(xy)=f(x)f(y)$.

【818】 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 的所有的连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 显见函数

$$f(x)=\cos ax \quad 或 \quad f(x)=\operatorname{ch}ax$$

满足所给方程.下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式.为此,在方程中令 $y=0$,得

$$2f(x)=2f(x)f(0),$$

则当 $f(x)\neq 0$ 时 $f(0)=1$.又令 $x=0$ 得

$$f(y)+f(-y)=2f(y),$$

所以,$f(-y)=f(y)$.

由 $f(x)$的连续性,故知存在 $c>0$,使当 $x\in[0,c]$时,$f(x)>0$.设 $f(c)=a$.下面分两种情况讨论:

(1) 当 $0<a\leqslant 1$ 时,于是,存在 θ:$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$,使得

$$f(c)=\cos\theta. \tag{1'}$$

从而

$$f(2c)=2[f(c)]^2-f(0)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$f(3c)=2f(2c)f(c)-f(c)=2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta=\cos 3\theta.$$

利用数学归纳法易证,对于所有的正整数 n,均有

$$f(nc)=\cos n\theta. \tag{2'}$$

又

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2=\frac{1}{2}[f(0)+f(c)]=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\cos^2\frac{\theta}{2},$$

由于 $f(x)>0$,故取正根,则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right)=\cos\frac{\theta}{2}. \tag{3'}$$

同样，利用数学归纳法，对于所有的正整数 n，均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right)=\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \tag{4'}$$

重复应用(1′)到(2′)的推理过程于(4′)，可知对于所有的正整数 m，均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \tag{5'}$$

因此，对于$\frac{m}{2^n}$型的正实数 x_n，有

$$f(cx_n)=\cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成$\frac{m}{2^n}$型数列的极限，所以，利用极限过程易得

$$f(cx)=\cos(\theta x). \tag{6'}$$

由于 $f(-y)=f(y)$，故(6′)式对 $x<0$ 也成立. 至于当 $x=0$ 时，$f(cx)=\cos(\theta x)$ 显然成立. 因此，对于 $-\infty<x<+\infty$ 的一切实数，均有 $f(cx)=\cos(\theta x)$. 把 cx 换成 x，并令 $\frac{\theta}{c}=a$，则得

$$f(x)=\cos ax.$$

(2) 当 $a>1$ 时，于是存在这样的 θ，使得 $f(c)=a=\operatorname{ch}\theta$.

根据双曲余弦的关系式，再重复上面的推理过程，可得 $f(x)=\operatorname{ch}ax$. 当 $a=0$ 时，$f(x)\equiv 1$.

综上所述，所求的函数为 $f(x)=\cos ax$ 或 $f(x)=\operatorname{ch}ax$.

【819】 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程组：

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

以及规范条件

$$f(0)=1 \quad 和 \quad g(0)=0$$

的所有的有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

提示 考虑函数 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$.

解 考虑函数 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$，则

$$\begin{aligned}F(x+y)&=f^2(x+y)+g^2(x+y)\\&=[f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2+[f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2=F(x)F(y),\end{aligned}$$

由于 $F(0)=1$ 及 $F(x)\neq 0$，故

$$F(x)=a^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

式中 $a=F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界，故只能有 $a=1$. 因此，对于所有的实数 x，有 $f^2(x)+g^2(x)=1$. 因为

$$0=g(0)=g(x-x)=f(x)g(-x)+f(-x)g(x)$$

及

$$1=f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)-g(-x)g(x).$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$，然后相加，得

$$f(-x)=f(x)[f^2(-x)+g^2(-x)]=f(x);$$

如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$，然后相减，得

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x).$$

从而可得

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)+f(x)f(-y)-g(x)g(-y)=2f(x)f(y).$$

于是，考虑到 $f(x)$ 的有界性，可得

$$f(x)=\cos ax^{**)},$$

再由 $f^2(x)+g^2(x)=1$ 可得

$$g(x)=\pm\sin ax.$$

*) 利用 812 题的结果.

* *) 利用 818 题的结果.

【820】 设 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ 及 $\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$ 分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差分.

证明:若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的且 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$,则此函数是线性函数,即 $f(x)=ax+b$,式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$ 得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x)\equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x=0$,得

$$f(\Delta_1+\Delta_2)-f(\Delta_2)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

令 $\Delta_2=n\Delta_1$,得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(n\Delta_1)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

利用数学归纳法,可得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(0)\equiv(n+1)[f(\Delta_1)-f(0)]. \tag{1'}$$

关系式(1′)可写成

$$f(\Delta_1)-f(0)=\frac{1}{n}[f(n\Delta_1)-f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1=m$,再利用(1′)即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)].$$

所以,$f\left(\frac{m}{n}\right)=a\cdot\frac{m}{n}+b$,式中 $a=f(1)-f(0)$ 及 $b=f(0)$ 均为常数.

于是,对于有理数 x,均有

$$f(x)=ax+b.$$

对于无理数 x,利用 $f(x)$ 的连续性,即可证得上式仍成立.事实上,取有理数列 $x_n\to x$,则

$$\lim_{x_n\to x} f(x_n)=f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n\to x} f(x_n)=\lim_{x_n\to x}(ax_n+b)=ax+b.$$

因此,对于所有的实数 x,均有 $f(x)=ax+b$.